Probability Theory

Chapter 3

Characteristic functions.

Lecturer: Nataliia Kruglova.

Лекція 9. Характеристичні функції.

Означення. Властивості.

В теорії ймовірностей відіграють роль

характеристичних функцій, за допомогою яких розв'язуються багато різноманітних задач.

Означення 9.1. *Функція $h_X(t)$, яка визначається формулою:*

$$h_X(t) = E[e^{itX}]$$

, називають характеристичною функцією випадкової величини X.

Для дискретних випадкових величин це означення можна переписати у вигляді:

$$h_X(t) = E[e^{itX}] = \sum_{i=1}^{\infty} e^{itx_i} p_i.$$

Для абсолютно неперервних випадкових величин:

$$h_X(t) = E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx.$$

Властивості характеристичних функцій.

1. Характеристична функція $h_X(t)$ неперервна для довільних $t \in \mathbf{R}$.

2. $h_X(0) = 1$.

3. $|h_X(t)| \leq 1$ для довільних $t \in \mathbf{R}$.

4. Якщо між випадковими величинами ξ і η існує лінійний зв'язок: $\xi = a\eta + b$, то

$$h_\xi(t) = h_\eta(at)e^{ibt}.$$

5. Якщо випадкові величини ξ і η – незалежні, то

$$h_{\xi+\eta}(t) = h_1(t)h_2(t),$$

де $h_1(t)$ – характеристична функція в.в. ξ і $h_2(t)$ – характеристична функція в.в. η.

6. $h_X(-t) = \overline{h_X(t)}$.

7. Характеристична функція $h_X(t)$ рівномірно неперервна на $\mathbf{R}$.

8. Характеристична функція додатно визначена.

Для характеристичних функкій справедливий наступний критерій:

Теорема 9.1. *(Бохнера-Хінчина). Для того, щоб функція $h(t)$ була характеристичною функцією деякого розподілу, необхідно і достатньо, щоб вона була неперервна, додатно визначена і $h(0) = 1$.*

Знаючи характеристичну функцію, можна визначити щільність абсолютно неперервної величини:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} h_X(t) dt.$$

Характеристичні функції основних розподілів.

Розподіл Бернуллі. Задамо таблицею:

X	0	1
P	1-p	p

За означенням характеристичної функції:

$$h_X(t) = E[e^{itX}] = (1-p)e^0 + pe^{it} = 1 - p + pe^{it}.$$

Біноміальний розподіл. Оскільки кількість успіхів при n випробуваннях є сумою n незалежних випадкових величин Бернуллі з ѕмовірністю успіху p, то за 5 властивістю для характеристичних функцій:

$$h_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} h_{X_i}(t) = (1 - p + pe^{it})^n.$$

Ту саму формулу можна одержати безпосередньо з означення характеристичної функції:

$$h_X(t) = E[e^{itX}] = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(pe^{it}\right)^k (1-p)^{n-k} = (1 - p + pe^{it}).$$

Розподіл Пуассона. За означенням характеристичної функції маємо:

$$h_X(t) = E[e^{itX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{it}\right)^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{\lambda e^{it} - \lambda}.$$

Геометричний розподіл. З означення характеристичної функції отримуємо:

$$h_X(t) = E[e^{itX}] = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} p (1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} \left((1-p)e^{it}\right)^k =$$

$$= \frac{p(1-p)e^{it}}{(1-p)(1-(1-p)e^{it})} = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}.$$

Рівномірний розподіл.

$$h_X(t) = E[e^{itX}] = \int_a^b \frac{e^{itx}}{b-a} dx = \left. \frac{e^{itx}}{(b-a)it} \right|_a^b = \frac{-i(e^{itb} - e^{ita})}{(b-a)t}.$$

Показниковий розподіл.

$$h_X(t) = E[e^{itX}] = \int_0^{\infty} \lambda e^{itx} e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-x(\lambda - it)} dx =$$

$$\left. \frac{-\lambda e^{-x(\lambda - it)}}{\lambda - it} \right|_0^{\infty} = \frac{\lambda(\lambda + it)}{\lambda^2 + t^2}.$$

Нормальний розподіл. Нехай випадкова величина η має стандартний нормальний розподіл. Знайдемо спочатку її характеристичну функцію.

$$h_\eta(t) = E[e^{it\eta}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{(x^2 - 2itx - t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} d(x - it) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Розглянемо тепер випадкову величину ξ розподілену нормально з математичним сподіванням $E[\xi] = a$ та дисперсією $D(\xi) = \sigma^2$ $(N(a, \sigma^2))$. Оскільки $\xi = \sigma\eta + a$, то за 4-ою властивістю:

$$h_\xi(t) = h_\eta(\sigma t) e^{iat} = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2} + iat}.$$

Зв'язок характеристичної функції з моментами.

Теорема 9.2. *Якщо існує k-момент випадкової величини X, тобто $E[X^k] < \infty$, то характеристична функція $h_X(t)$ k разів неперервно диференційовна і*

$$h_X^k(0) = i^k E[X^k], \qquad E[X^k] = \frac{h_X^k(0)}{i^k}.$$

Доведення.

$$h_X^{(k)}(0) = \left.\frac{d^k E e^{itX}}{dt^k}\right|_{t=0} = E(iX)^k e^{itX}\big|_{t=0} = i^k E[X^k].$$

Теорема 9.3. *Якщо існує k-момент випадкової величини X, $k \in \mathbf{N}$, ($E[X^k] < \infty$), то характеристична функція $h_X(t)$ в околі нуля розкладається в ряд Тейлора:*

$$h_X(t) = h_X(0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{h_X^{(j)}(0)t^j}{j!} + o(|t^k|) = 1 + itE[X] - \frac{t^2 E[X^2]}{2!} + \ldots + \frac{(it)^k E[X^k]}{k!} + o(|t^k|).$$

Задачі, які можна розв'язувати за допомогою х.ф.

Розглянемо, як за допомогою характеристичних функцій можна розв'язувати деякі задачі теорії ймовірностей.

Приклад. Нехай випадкові величини розподілені нормально: $X_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2)$ і є незалежними. Знайдіть розподіл випадкової величини $X = X_1 + X_2$.

Розв'язання. Знайдемо характеристичні функції випадкових величин X_1, X_2:

$$h_{X_1}(t) = e^{-\frac{\sigma_1^2 t^2}{2} + ia_1 t}, \qquad h_{X_2}(t) = e^{-\frac{\sigma_2^2 t^2}{2} + ia_2 t}.$$

Тоді за властивістю 5 характеристичних функцій:

$$h_{X=X_1+X_2}(t) = e^{-\frac{\sigma_1^2 t^2}{2} + ia_1 t} e^{-\frac{\sigma_2^2 t^2}{2} + ia_2 t} = e^{-\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2} + i(a_1+a_2)t}.$$

Із вигляду характеристичної функції випадкової величини $X = X_1 + X_2$ випливає, що $X = X_1 + X_2 \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Приклад. Нехай X_1 – Пуассонівська випадкова величина з параметром λ_1, X_2 – Пуассонівська випадкова величина з параметром λ_2. Та нехай X_1 і X_2 — незалежні. Знайдіть розподіл випадкової величини $X = X_1 + X_2$.

Розв'язання. Знайдемо характеристичні функції випадкових величин X_1, X_2:

$$h_{X_1}(t) = e^{\lambda_1 e^{it} - \lambda_1}, \qquad h_{X_2}(t) = e^{\lambda_2 e^{it} - \lambda_2}.$$

Тоді за 5-ою властивістю характеристичних функцій:

$$h_X(t) = h_{X_1}(t)h_{X_2} = e^{\lambda_1 e^{it}-\lambda_1}e^{\lambda_2 e^{it}-\lambda_2} = e^{(\lambda_2+\lambda_1)e^{it}-\lambda_2-\lambda_1}.$$

Отже, випадкова величина $X = X_1 + X_2$ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda_2 + \lambda_1$.

Приклад. Випадкова величина X має стандартний нормальний розподіл. Обчисліть моменти $E[X^k]$ величини X в залежності від k.

Розв'язання. $h_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Розкладемо характеристичну функцію в ряд Тейлора:

$$h_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j t^{2j}}{2^j j!} + o(|t^{2k}|).$$

За теоремою 9.2:

$$E[X^k] = \frac{h_X^k(0)}{i^k}.$$

Тоді, використавши теорему 9.3 і порівнюючи вирази розкладу х.ф. у ряд Тейлора, отримаємо:

$$E[X^{2k-1}] = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$E[X^{2k}] = \frac{(-1)^k(2k)!}{2^k k! i^{2k}} = \frac{(2k-1)!!(2k)!!}{2^k k!} = (2k-1)!!$$

Приклад. Випадкова величина X має щільність розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} A\left(1 - \frac{|x|}{2}\right), & x \in [-2, 2]; \\ 0, & x \notin [-2, 2]. \end{cases}$$

Знайдіть:

a) параметр A;

b) характеристичну функцію;

c) математичне сподівання, дисперсію, використовуючи характеристичну функцію і безпосередньо за означенням.

Розв'язання.

a) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-2}^{2} A\left(1 - \frac{|x|}{2}\right)dx = 2A\int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right)dx = 2A\left(x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^2 = 2A.$ $A = \frac{1}{2}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|x|}{2}\right), & x \in [-2, 2]; \\ 0, & x \notin [-2, 2]. \end{cases}$$

b) $h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx}dx=\int_{-2}^{2}\frac{1}{2}\left(1-\frac{|x|}{2}\right)e^{itx}dx=I_1+I_2$, де

$$I_1=\int_{-2}^{0}\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{itx}dx=\left|\begin{array}{ll}\frac{1}{2}+\frac{x}{4}=u & dx=4du\\ e^{itx}dx=dv & \frac{e^{itx}}{it}=v\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2it}\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{itx}+\frac{e^{itx}}{4t^2}\Bigg|_{-2}^{0}=\frac{1}{2it}+\frac{1}{4t^2}-\frac{e^{-2it}}{4t^2}.$$

$$I_2=\int_{0}^{2}\frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)e^{itx}dx=\left|\begin{array}{ll}\frac{1}{2}-\frac{x}{4}=u & dx=-4du\\ e^{itx}dx=dv & \frac{e^{itx}}{it}=v\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2it}\left(1-\frac{x}{2}\right)e^{itx}-\frac{e^{itx}}{4t^2}\Bigg|_{0}^{2}=-\frac{1}{2it}+\frac{1}{4t^2}-\frac{e^{2it}}{4t^2}.$$

$$h(t)=\frac{1}{2it}+\frac{1}{4t^2}-\frac{e^{-2it}}{4t^2}-\frac{1}{2it}+\frac{1}{4t^2}-\frac{e^{2it}}{4t^2}=\frac{1-\cos 2t}{2t^2}=\frac{\sin^2 t}{t^2}.$$

c) Розкладемо х.ф. в ряд Тейлора:

$$h(t)=\frac{1-\cos 2t}{2t^2}=\frac{1}{2t^2}\left(1-\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2t)^{2k}}{(2k)!}\right).$$

Використавши теорему про розклад характеристиної функції в ряд Тейлора, одержимо:

$$E[X]=0,\qquad D(X)=E[X^2]=\frac{2}{3}.$$

Знайдемо математичне сподівання і дисперсію безпосередньо з означення.

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-2}^{2}\frac{x}{2}\left(1-\frac{|x|}{2}\right)=0,$$

$$D(X)=E[X^2]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_{-2}^{2}\frac{x^2}{2}\left(1-\frac{|x|}{2}\right)=\int_{0}^{2}\left(x^2-\frac{x^3}{2}\right)=$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{8}\Bigg|_{0}^{2}=\frac{8}{3}-2=\frac{2}{3}.$$

Література

1. Теорія ймовірностей : конспект лекцій, В.В. Булдигін, Ю.П. Буценко, О.О. Диховичний/ Київ, 1999, 97с.

2. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб., Н. Д. Федоренко, О. І. Баліна, І. С. Безклубенко/К.: КНУБА, 2007, 104 с.

3. Теорія ймовірностей, математична статистика та імовірнісні процеси : навч. посіб., Ю. М. Слюсарчук, Й. Я. Хром'як, Л. Л. Джавала, В. М. Цимбал/ Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2015, 364 с.
4. Курс теорії ймовірностей: навч. посіб., Б. В. Гнєденко/ К.: ВПЦ Київський університет, 2010, 464 с.
5. Теория вероятностей и математическая статистика. Изд.9. Учебное пособие для вузов, В. Е. Гмурман/М: Высшая школа, 2003, 479с.