Probability Theory

Chapter 3

Random vectors.

Lecturer: Nataliia Kruglova.

Лекція 10. Випадкові вектори.

Часто в імовірнісних моделях розглядаються одразу декілька випадкових величин. Наприклад, кількість очок, що випадає під час підкидання двох гральних кубиків, які є значенням системи двох випадкових величин X і Y, де X — кількість очок, що випаде на першому кубику, Y — кількість очок, що випаде на другому кубику. В математичній моделі у таких випадках на ймовірнісному просторі (Ω, F, P) визначено декілька випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, які інколи розглядають як координати випадкового вектору $\overline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ із n-вимірного простору $\mathbb{R}^n$. Випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ можуть бути і дискретними, і неперервними. Закон розподілу випадкового вектору $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ в загальному випадку задається функцією розподілу.

Означення 10.1. *Функцією розподілу n-вимірного випадкового вектору $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ називається ймовірність:*

$$X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n; \quad x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n},$$

тобто

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n\}.$$

Властивості функції розподілу будемо розглядати для двовимірного випадкового вектору (X, Y). Функція розподілу $F(x, y)$ має такі властивості:

1) $F(x,y)$ — неспадна функція за кожним аргументом;

2) для функції $F(x,y)$ виконуються такі граничні співвідношення:

$$F(-\infty,y)=0,\quad F(x,-\infty)=0,\quad F(-\infty,-\infty)=0,\quad F(\infty,\infty)=1.$$

3)

$$\lim_{y\to\infty} F(x,y)=F(x,\infty)=F_X(x),\qquad \lim_{x\to\infty} F(x,y)=F(\infty,y)=F_Y(y),$$

де $F_X(x)$ — функція розподілу випадкової величини X; $F_Y(y)$ — функція розподілу випадкової величини Y.

4) Функція розподілу неперервна зліва по кожному зі своїх аргументів:

$$\lim_{x\to x_0-0} F(x,y)=F(x_0,y),\qquad \lim_{y\to y_0-0} F(x,y)=F(x,y_0).$$

5) Імовірність потрапляння значення випадкового вектора в прямокутник зі сторонами, паралельними координатним осям, дорівнює:

$$P\{x_1\le X\le x_2, y_1\le Y\le y_2\}=F(x_2,y_2)+F(x_1,y_1)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2).$$

Двовимірні випадкові вектори

Означення 10.2. *Двовимірний випадковий вектор (X,Y) називається дискретним, якщо X і Y є дискретними випадковими величинами, і неперервним, якщо X і Y є непервними випадковими величинами.*

Складові X і Y двовимірного випадкового вектору (X,Y) ще називають його компонентами.

Дискретні випадкові вектори

Для того, щоб задати дискретний випадковий вектор (X, Y), досить вказати його можливі значення (x_i, y_k) та відповідні ймовірності:

$$p_{ik} = P\{X = x_i, Y = y_k\}, \qquad i, k = 1, 2, \dots .$$

Для випадкових величин X і Y введемо позначення:

$$p_i = P\{X = x_i\}, \quad i = 1, 2, \dots ; \qquad q_k = P\{Y = y_k\}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Дослідимо зв'язок між імовірностями p_{ik}, p_i і q_k. Для цього достатньо відмітити, що подію $\{X = x_i\}$ можна представити як об'єднання попарно несумісних подій:

$$\{X = x_i\} = \{X = x_i, Y = y_1\} \bigcup \{X = x_i, Y = y_2\} \bigcup \dots ,$$

звідки за акісомою адитивності $p_i = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}$. Аналогічно можна отримати формулу $q_k = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ik}$. Таким чином,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} = \sum_{k=1}^{\infty} q_k = \sum_{i=1}^{\infty} p_i .$$

Розглянемо двовимірний випадковий вектор (ξ, η). Припустимо, що складова ξ приймає значення $x_1, x_2, \dots$,x_n, складова η приймає значення $y_1, y_2, \dots y_k$ і $P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = p_{ij}$. Розподіл двовимірного дискретного вектора можна задати у вигляді таблиці

$\xi \backslash \eta$	y_1	y_2	$\dots$	y_k
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1k}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2k}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nk}

Легко бачити, що $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1$, $P\{(\xi, \eta) \in B\} = \sum_{(x_i, y_j) \in B} p_{ij}$, де $B \subset \mathbb{R}^2$.

Приклад. Задано розподіл двовимірного випадкового вектору (ξ, η)

$\xi \backslash \eta$	-1	3	5	7
2	0.1	0.11	0.09	0.04
8	0	a	0.13	0.07
10	0.12	0.04	a	0.01

Знайдіть a.

Розв'язання. Оскільки

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}p_{ij}=1,$$

тоді

$$0.1+0.11+0.09+0.04+a+0.13+0.07+0.12+0.04+a+0.1=1,$$

$$0.8+2a=1, \qquad a=0.1$$

Приклад. Задано розподіл двовимірного випадкового вектору (ξ,η)

$\xi\backslash\eta$	-1	1	5	7
-2	0.1	0	0.15	0.15
0	0.12	0.08	0	0.1
1	0.08	0.12	0.1	0

Обчисліть $P\{|\xi|<2,\ \eta>1\}$.

Розв'язання. Очевидно, що

$$P\{|\xi|<2,\ \eta>1\}=P\{\xi=\{0;1\},\eta=\{5;7\}\}.$$

$$P\{\xi=\{0;1\},\eta=\{5;7\}\}=P\{\xi=0;\eta=5\}+P\{\xi=1;\eta=5\}+$$

$$+P\{\xi=0;\eta=7\}+P\{\xi=1;\eta=7\}=0+0.1+0.1+0=0.2.$$

Приклад. Задано розподіл двовимірного випадкового вектору (ξ,η)

$\xi\backslash\eta$	3	5	7	10
-1	0.04	0.07	0.03	0.1
4	0.12	0.1	0	0.03
8	0.2	0.1	0.11	0.1

Знайдіть розподіл компонент.

Розв'язання.

$$P\{\xi=-1\}=P\{\xi=-1;\eta=3\}+$$

$$+P\{\xi=-1;\eta=5\}+P\{\xi=-1;\eta=7\}+P\{\xi=-1;\eta=10\}=$$

$$=0.04+0.07+0.03+0.1=0.24;$$

$$P\{\xi=4\}=P\{\xi=4;\ \eta=3\}+P\{\xi=4;\ \eta=5\}+$$

$$+P\{\xi=4;\ \eta=7\}+P\{\xi=4;\ \eta=10\}=0.12+0.1+0+0.03=0.25;$$

$$P\{\xi=8\}=P\{\xi=8;\ \eta=3\}+P\{\xi=8;\ \eta=5\}+$$

$$+P\{\xi=8;\eta=7\}++P\{\xi=8;\ \eta=10\}=0.2+0.1+0.11+0.1=0.51.$$

Доцільно провести перевірку. Відомо, що $\sum_i p_i=1$. Перевіримо, що це дійсно так:

$$0.24+0.25+0.51=1.$$

Отже, розподіл компоненти ξ буде наступним

x_i	-1	4	8
p_i	0.24	0.25	0.51

Розглянемо тепер компоненту η:

$$P\{\eta=3\}=P\{\xi=-1;\ \eta=3\}+P\{\xi=4;\ \eta=3\}+P\{\xi=8;\ \eta=3\}=$$

$$=0.04+0.12+0.2=0.36;$$

$$P\{\eta=5\}=P\{\xi=-1;\ \eta=5\}+P\{\xi=4;\ \eta=5\}+P\{\xi=8;\ \eta=5\}=$$

$$=0.07+0.1+0.1=0.27;$$

$$P\{\eta=7\}=P\{\xi=-1;\ \eta=7\}+P\{\xi=4;\ \eta=7\}+P\{\xi=8;\ \eta=7\}=$$

$$=0.03+0+0.11=0.14;$$

$$P\{\eta=10\}=P\{\xi=-1;\ \eta=10\}+P\{\xi=4;\ \eta=10\}+P\{\xi=8;\ \eta=10\}=$$

$$=0.1+0.03+0.1=0.23.$$

Перевіряємо: 0.36+0.27+0.14+0.23=1.

Таким чином, розподіл компоненти η буде таким:

y_j	3	5	7	10
$p_{\cdot j}$	0.36	0.27	0.14	0.23

Відмітимо, що розподіл компонент можна знайти значно простіше.

Розглянемо таблицю розподілу вектора, додавши один рядок знизу і один стовпчик справа. Потім знаходимо суми елементів по рядкам і записуємо ці суми в останній стовпчик, а також знаходимо суми елементів по стовпчиках і значення знайдених сум записуємо в нижній рядок. Одержані суми є значеннями ймовірностей. Наприклад, сума верхнього рядка є ймовірністю $P\{\xi=-1\}$, сума другого рядка є ймовірністю $P\{\xi=4\}$, відповідно сума третьоого рядка – $P\{\xi=8\}$. Для того, щоб знайти $P\{\eta=5\}$ потрібно знайти суму елементів другого стовпчика і т.д.

$\xi\backslash\eta$	3	5	7	10	$\sum$
-1	0.04	0.07	0.03	0.1	0.24
4	0.12	0.1	0	0.03	0.25
8	0.2	0.1	0.11	0.1	0.51
$\sum$	0.36	0.27	0.14	0.23	1

Приклад. Задано розподіл двовимірного випадкового вектора (ξ,η)

$\xi\backslash\eta$	-1	3	7
2	0.05	0.05	0.05
3	0.1	0.05	0.1
4	0	0.1	0.1
5	0.1	0.2	0.1

Знайдіть функцію розподілу.

Розв'язання. Оскільки найменше значення для ξ це 2, а для η -1, то ймовірність того, що випадковий вектор буде приймати менші значення дорівнює 0. Тому зліва і зверху ми проставляємо нулі.

Далі позначимо значення незаповнених клітинок через F_{ij} $\left(i=\overline{1,4},\ j=\overline{1,3}\right)$. Очевидно, що

$$F_{ij}=\sum_{s=1}^{i}\sum_{m=1}^{j}p_{sm}.$$

$\xi\backslash\eta$	$y \leq -1$	$-1 < y \leq 3$	$3 < y \leq 7$	$y > 7$
$x \leq 2$	0	0	0	0
$2 < x \leq 3$	0	0.05	0.1	0.15
$3 < x \leq 4$	0	0.15	0.25	0.4
$4 < x \leq 5$	0	0.15	0.35	0.6
$x > 5$	0	0.25	0.65	1

Неперервний випадковий вектор.

Для двовимірного неперервного випадкового вектору (X, Y) існує невід'ємна функція $f(x, y)$ така, що функція розподілу випадкового вектора (X, Y) задається формулою:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) du dv, \tag{29}$$

крім того, функція $f(x, y)$ неперервна всюди, окрім, можливо, скінченної кількості точок і називається **щільністю розподілу ймовірностей** випадкового вектору (X, Y).
З (29) випливає, що щільність розподілу можна визначити як другу мішану похідну від функції розподілу в точках неперервності:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Враховуючи, що $F(+\infty, +\infty) = 1$, з (29) одержимо основну властивість щільності розподілу випадкового вектору (X, Y):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Якщо можливі значення двовимірноїго неперервного випадкового вектору (X, Y) розміщені в деякій області $G \subset \mathbb{R}^2$, то формулу (29) можна переписати так:

$$P\{(x, y) \in G\} = \iint_G f(x, y) dx dy.$$

Знаючи щільність розподілу $f(x, y)$ випадкового вектору (X, Y), можна знайти щільності розподілу його компонент $f_X(x)$ та $f_Y(y)$ – **маргінальні щільності**. Дійсно,

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) du dv,$$

тому

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,v)dv.$$

Аналогічно можна обчислити $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,y)du.$$

Приклад. Задано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора (ξ, η)

$$f_{(\xi,\eta)}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \notin D; \\ a\left(2x+3y^2\right), & (x,y) \in D. \end{cases}$$

Знайти a, $P(\xi > 1)$, $P\{\eta < 2\}$, $P\{\xi < 1, \eta > 1\}$, $P\{\eta > 2\xi\}$, якщо область D обмежена лініями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 10$.

Розв'язування. Спочатку обчислимо константу a. Для цього зобразимо область D

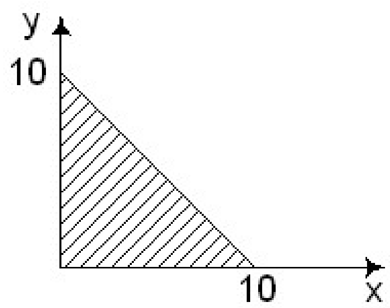

Рис. 1: Область D

$$1 = \iint_D a\left(2x+3y^2\right)dxdy = a\int_0^{10} dx \int_0^{10-x} \left(2x+3y^2\right)dy =$$

$$= a\int_0^{10} \left(2xy+y^3\right)\Big|_0^{10-x} dx = a\int_0^{10} 2x(10-x)\,dx + a\int_0^{10} (10-x)^3\,dx =$$

$$= a\left(\left(10x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^{10} - \frac{(10-x)^4}{4}\Bigg|_0^{10}\right) = a\left(\frac{1000}{3} + \frac{10000}{4}\right) =$$

$$= \frac{17000a}{6} = 1,$$

$$a = \frac{6}{17000}.$$

Обчислимо $P\left\{\xi > 1\right\}$.

$$P\left\{\xi > 1\right\} = \frac{6}{17000}\int_1^{10} dx \int_0^{10-x} \left(2x+3y^2\right) dy = \frac{6}{17000}\int_1^{10} \left(2xy+y^3\right)\Big|_0^{10-x} dx =$$

$$= \frac{6}{17000}\int_1^{10} \left(20x - 2x^2 + (10-x)^3\right) dx = \frac{6}{17000}\left(10x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{(10-x)^4}{4}\right)\Bigg|_1^{10} =$$

$$= \frac{6000}{3\cdot 17000} - \frac{6}{17000}\left(10 - \frac{2}{3} - \frac{9^4}{4}\right) = \frac{23571}{34000}.$$

Далі знайдемо ймовірність $P\left\{\eta < 2\right\}$.

$$P\left\{\eta < 2\right\} = \int_0^2 dy \int_0^{10-y} \frac{6}{17000}\left(2x+3y^2\right) dx = \frac{6}{17000}\int_0^2 \left(x^2+3y^2x\right)\Big|_0^{10-y} dy =$$

$$= \frac{6}{17000}\int_0^2 \left((10-y)^2 + 3y^2\left(10-y\right)\right) dy = \frac{6}{17000}\int_0^2 \left((10-y)^2 + 30y^2 - 3y^3\right) dy =$$

$$= \frac{6}{17000}\left(-\frac{(10-y)^3}{3} + 10y^3 - \frac{3}{4}y^4\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{6}{17000}\left(\left(-\frac{512}{3} + 80 - 12\right) + \frac{1000}{3}\right) = \frac{1384}{17000}.$$

Перейдемо до знаходження ймовірності $P\left\{\xi < 1, \eta > 1\right\}$.

$$P\left\{\xi < 1, \eta > 1\right\} = \int_0^1 dx \int_1^{10-x} \frac{6}{17000}\left(2x+3y^2\right) dy = \frac{6}{17000}\int_0^1 \left(2xy+y^3\right)\Big|_1^{10-x} dx =$$

$$= \frac{6}{17000}\int_0^1 \left(20x - 2x^2 + (10-x)^3 - (2x+1)\right) dx =$$

$$= \frac{6}{17000}\left(10x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{(10-x)^4}{4} - x^2 - x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{6}{17000}\left(10 - \frac{2}{3} - \frac{9^4}{4} - 1 - 1 + \frac{10^4}{4}\right) = \frac{10405}{34000}.$$

І, нарешті, обчислимо ймовірність $P\left\{\eta > \xi\right\}$. Зобразимо графічно область інтегрування

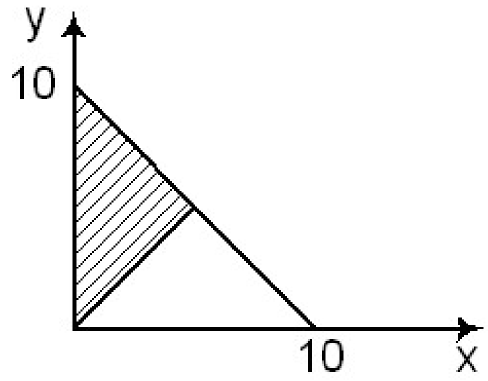

Рис. 2: $\{\eta > \xi\}$

З малюнку видно, що спочатку необхідно знайти точку перетину прямих $y = x,\ y = 10 - x$

$$\begin{cases} y = x, \\ y = 10 - x, \end{cases}$$

$$x = 10 - x, \qquad 2x = 10, \qquad x = 5,$$

$$P\{\eta > \xi\} = \int_0^5 dx \int_x^{10-x} \frac{6}{17000}\left(2x + 3y^2\right) dy = \frac{6}{17000}\int_0^5 \left(2xy + y^3\right)\Big|_x^{10-x} dx =$$

$$= \frac{6}{17000}\int_0^5 \left(20x - 2x^2 + (10 - x)^3 - 2x^2 - x^3\right) dx =$$

$$= \frac{6}{17000}\left(10x^2 - \frac{4x^3}{3} - \frac{(10 - x)^4}{4} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^5 =$$

$$= \frac{6}{17000}\left(250 - \frac{500}{3} - \frac{5^4}{4} - \frac{5^4}{4} + \frac{10^4}{4}\right) = \frac{2725}{3400}.$$

Література

1. Теорія ймовірностей : конспект лекцій, В.В. Булдигін, Ю.П. Буценко, О.О. Диховичний/ Київ, 1999, 97с.

2. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб., Н. Д. Федоренко, О. І. Баліна, І. С. Безклубенко/К.: КНУБА, 2007, 104 с.

3. Теорія ймовірностей, математична статистика та імовірнісні процеси : навч. посіб., Ю. М. Слюсарчук, Й. Я. Хром'як, Л. Л. Джавала, В. М. Цимбал/ Львів : Вид-во Львів.

політехніки, 2015, 364 с.

4. Курс теорії ймовірностей: навч. посіб., Б. В. Гнєденко/ К.: ВПЦ Київський університет, 2010, 464 с.

5. Теория вероятностей и математическая статистика. Изд.9. Учебное пособие для вузов, В. Е. Гмурман/М: Высшая школа, 2003, 479с.