Probability Theory

Chapter 3

Independence of random variables. Covariance.

Lecturer: Nataliia Kruglova.

Лекція 11. Незалежні випадкові величини. Коваріація

Незалежність випадкових величин

У 10 лекції було показано, як знаючи закон розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y), знайти закони розподілу компонент X і Y. Виникає очевидне питання: чи можливо, знаючи закони розподілу компонент X і Y, знайти закон розподілу випадкового вектору (X, Y)? Виявляється, що це можливо зробити лише тоді, коли випадкові величини X і Y будуть незалежними.

Означення 11.1. *Випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_n$ називаються незалежними, якщо для довільних дійсних чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$*

$$F(x_2, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n),$$

де $F(x_2, x_2, \dots, x_n)$ — функція розподілу випадкового вектору $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $F_{X_k}(x_k)$ — функція розподілу випадкової величини X_k, $k = \overline{1, n}$.

Більш детально розглянемо випадок $n = 2$. Якщо X, Y — дискретні випадкові величини, то їх незалежність означає, що для довільних i, k події $\{X = x_i\}$ і $\{Y = y_k\}$ є незалежні, а тому

$$p_{ik} = P\{X = x_i, Y = y_k\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_k\} = p_i q_k, \quad i, k = 1, 2, \dots .$$

Нехай X, Y — неперервні випадкові величини з функціями розподілу $F_X(x)$ і $F_Y(y)$ і щільностями розподілу ймовірностей $f_X(x)$ та $f_Y(y)$ відповідно, а $F(x,y)$ і $f(x,y)$ — функція розподілу і щільність розподілу двовимірного випадкового вектору (X,Y). З означення незалежності X і Y отримаємо: $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$.
Продифференціювавши двічі (по x і по y), отримаємо: $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = F'_X(x)F'_Y(y)$, тобто

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y). \tag{30}$$

Можна довести, що умова (30) є не тільки необхідною, але й достатньою для незалежності неперервних випадкових величин X і Y. Дійсно, якщо (30) справджується, то

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_X(u)f_Y(v)dudv =$$
$$\int_{-\infty}^{x} f_X(u)du \int_{-\infty}^{y} f_Y(v)dv = F_X(x)F_Y(y),$$

а це означає, що X і Y — незалежні.
Умовою незалежності для двовимірного дискретного випадкового вектора буде

$$p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}$$

для довільних $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,k}$.

Приклад. Задано розподіл двовимірного випадкового вектору (ξ, η):

$\xi \backslash \eta$	1	13	22	27
12	0.05	0.1	0.1	0.1
14	0	0.2	0.1	0.1
15	0.2	0	0.01	0.04

Перевірте, чи компоненти цього вектора є незалежними.

Розв'язання. $p_{11} = 0.05$; $p_{1\bullet} = 0.35$, $p_{\bullet 1} = 0.25$;

$$p_{1\bullet}p_{\bullet 1} = 0.35 \cdot 0.25 = 0.0875.$$

Бачимо, що умова 1 $p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}$ не виконується.

Приклад. Відомо, що компоненти випадкового вектору (ξ, η) є незалежними. Їхні щільності дорівнюють:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]; \\ 0, & x \notin \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right], \end{cases} \quad f_\eta(x) = \begin{cases} 3x^2, x \in [0;1]; \\ 0, \quad x \notin [0;1]. \end{cases}$$

Знайти сумісну щільність випадкового вектора (ξ, η).

Розв'язання. З умови незалежності $f_{(\xi,\eta)}(x,y) = f_\xi(x) f_\eta(y)$.

Тоді

$$f_{(\xi,\eta)}(x,y) = \begin{cases} 3y^2 \cos x, & (x,y) \in D; \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

де область D обмежена лініями $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$.

Функції від випадкових величин. Функції одного випадкового аргументу

Означення 11.2. *Функцією від випадкової величини X називають таку випадкову величину Y, яка приймає значення $y = \alpha(X)$ щоразу, коли $X = x$, де α є невипадковою функцією.*

Закон розподілу функції дискретної випадкової величини.

Нехай закон дискретної випадкової величини X задано таблицею:

x_i	x_1	x_2	x_3	....	x_k
p_i	p_1	p_2	p_3	....	p_k

Тоді закон розподілу випадкової величини $Y = \alpha(X)$ має наступний вигляд:

$Y = \alpha(x_i)$	$\alpha(x_1)$	$\alpha(x_2)$	$\alpha(x_3)$	....	$\alpha(x_k)$
$P(Y = \alpha(x_i)) = p_i$	p_1	p_2	p_3	....	p_k

Усі можливі значення Y отримують, виконуючи ті операції, що вказані в невипадковій функції, позначеній α.

Якщо у законі розподілу випадкової величини Y є повторення деяких значень, тоді кожне з таких значень пишуть один раз, додаючи їхні імовірності.

Приклад. Закон розподілу дискретної випадкової величини задано таблицею:

$X = x_i$	– 4	–2	–1	1	2	4
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,3

Побудувати закон розподілу ймовірностей для $Y = 3X^2$.

Розв'язання. Оскільки $Y = 3X^2$, то маємо:

$Y = 3X^2$	48	12	3	3	12	48
$P(Y = 3x_i^2) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,3

Враховуючи повтори деяких значень Y, отримаємо:

$$P(Y = 48) = 0,1 + 0,3 = 0,4;$$

$$P(Y = 12) = 0,2 + 0,2 = 0,4;$$

$$P(Y = 3) = 0,1 + 0,1 = 0,2.$$

Таким чином, закон розподілу дискретної випадкової величини Y буде таким:

$Y = y_j$	3	12	48
$P(Y = y_j) = p_j$	0,2	0,4	0,4

Числові характеристики функції дискретного випадкового аргументу

Нехай $Y = \alpha(X)$

1. **Математичне сподівання**

$$E[Y] = \sum_{i=1}^{k} \alpha\left(x_i\right) p_i = \sum_{j=1}^{m} y_j p_j. \tag{31}$$

2. **Дисперсія**

$$D\left(Y\right) = E\left[Y^2\right] - E^2\left[Y\right] = \sum_{i=1}^{k} \alpha^2\left(x_i\right) p_i - E^2\left[Y\right] = \sum_{j=1}^{m} y_j^2 p_j - E^2\left[Y\right]. \tag{32}$$

3. **Середнє квадратичне відхилення**

$$\sigma\left(Y\right) = \sqrt{D\ (Y)}. \tag{33}$$

Приклад. За заданим законом розподілу

$X = x_i$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2

Обчисліть $E[Y]$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$, якщо $Y=\cos^2 X$.

Розв'язання. Побудуємо закон розподілу Y.

$Y=\cos^2 X$	$\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)$	$\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	$\cos^2\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	$\cos^2 0$	$\cos^2\frac{\pi}{6}$	$\cos^2\frac{\pi}{4}$	$\cos^2\frac{\pi}{3}$
$P(Y=\cos^2 x_i)=p_i$	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2

або

$Y=\cos^2 X$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$	1	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$
$P(Y=\cos^2 x_i)=p_i$	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2

або

$Y=cos^2X$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$P(Y=\cos^2 x_i)=p_i$	0,1	0,2	0,1	0,1	0,2	0,1	0,2

або

$Y=y_j$	0,25	0,5	0,75	1
$P(Y=y_j)=p_j$	0,3	0,3	0,3	0,1

$$E\left[Y\right]=\sum_{j=1}^{4}y_jp_j=0,25\cdot 0,3+0,5\cdot 0,3+0,75\cdot 0,3+1\cdot 0,1=$$

$$=0,075+0,15+0,225+0,1=0,55;$$

$$E\left[Y^2\right]=\sum_{j=1}^{4}y_i^2p_j=0,0625\cdot 0,3+0,25\cdot 0,3+0,5625\cdot 0,3+10,1=$$

$$=0,01875+0,075+0,16875+0,1=0,3625;$$

$$D\left(Y\right)=E\left[Y^2\right]-E^2\left[Y\right]=0,3625-0,3025=0,06;$$

$$D(Y)0,06;$$

$$\sigma\left(Y\right)=\sqrt{D\left(Y\right)}=\sqrt{0,06}\approx 0,245;$$

$$\sigma\left(Y\right)=0,245.$$

Функції неперервного випадкового аргументу та їх числові характеристики.

Нехай закон розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини задається щільністю $f(x)$.

Потрібно знайти $f_Y(y)$, якщо $Y=\alpha(X)$.

Розглянемо випадок, коли $Y = \alpha(X)$ – монотонно зростаючою функція, зображеною на рис.

А. *Функція* $\alpha(X)$ *монотонна.*

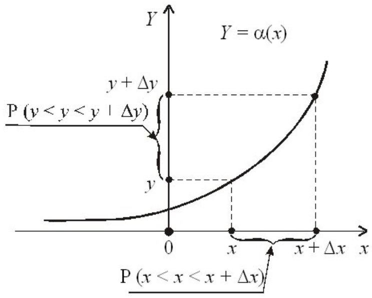

Рис. 1: $\alpha(X)$ монотонно зростаюча

Якщо випадкова величина X належить проміжку $[x; x+\Delta x]$, то, оскільки Y пов'язана з випадковою величиною X функцією $\alpha(X)$, то Y буде належати проміжку $[y, y+\Delta y]$. Таким чином, події $\{x < X < x+\Delta x\}$ і $\{y < Y < y+\Delta y\}$ будуть рівноймовірними:

$$P(x < X < x + \Delta x) = P(y < Y < y + \Delta y). \tag{34}$$

За означенням щільності ймовірностей

$$f_Y\,(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta y}.$$

Але

$$F(y + \Delta y) - F(y) = P(y < Y < y + \Delta y) = P(x < X < x + \Delta x)$$

згідно зі (34).

То:

$$f_Y\,(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{P(y < Y < y + \Delta\, y)}{\Delta\, y} =$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta\, x)}{\Delta\, y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F\,(x + \Delta x) - F\,(x)}{\Delta y}.$$

Таким чином,

$$f_Y\,(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta y}. \tag{35}$$

При $\Delta y \to 0$, $\Delta x \to 0$ з врахуванням функціональної залежності між Y і X, помноживши і поділивши дріб (35) на Δx, отримаємо:

$$f_Y\,(y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = f(x)x'_y.$$

Із $Y = \alpha(X)$ можна однозначно виразити $X = \alpha^{-1}(Y) = \Psi(Y)$. Тоді

$$f_Y\,(y) = f(\Psi(y))\ \Psi'(y). \tag{36}$$

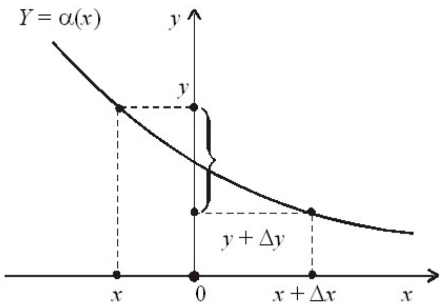

Рис. 2: $\alpha(X)$ монотонно спадна

Якщо $Y = \alpha\,(X)$, де $\alpha\,(\cdot)$ – монотонно спадна функція, то додатному приросту аргументу $x + \Delta x$ відповідатиме від'ємний приріст функції $y - \Delta y$ і похідна $\Psi'(Y) < 0$.

А оскільки $f_Y(y) \geq 0$, то об'єднавши ці випадки, отримаємо

$$f_Y\,(y) = f\,(\Psi(Y))\ \left|\,\Psi'\,(Y)\,\right| \tag{37}$$

Б. *Загальна методика знаходження* $f_Y(y)$.

Нехай неперервна випадкова величина задається щільністю ймовірностей $f(x)$ на $[a;\,b]$.

Потрібно знайти $f_Y(y)$, якщо $Y = \alpha(X)$, де $\alpha(\cdot)$ – монотонна функція.

1. Потрібно знайти множину можливих значень Y.

Оскільки $a \leq x \leq b$, то $\alpha(a) \leq y \leq \alpha(b)$ для монотонно зростаючої функції $\alpha(x)$ ($\alpha(b) \leq y \leq \alpha(a)$ – для монотонно спадної функції).

Позначимо: $m = \min\{\alpha(a), \alpha(b)\}$, $M = \max\{\alpha(a), \alpha(b)\}$.

2. Із $Y = \alpha(X)$ знайдемо явний вираз X через Y, а саме: $X = \Psi(Y)$.

3. Обчислимо похідну

$$X'_y = \Psi'(y).$$

4. Побудуємо щільність імовірностей для випадкової величини Y

$$f_Y(y) = f(\Psi(y)) \ |\Psi'(y)|, \ y \in [m, M].$$

5. Перевіряємо виконання умови нормування для щільності $f(y)$:

$$\int_m^M f_Y(y) dy = 1.$$

Якщо умова нормування виконується, то $f_Y(y)$ знайдено правильно.

За обчисленою $f(y)$ функція розподілу ймовірностей визначається наступним чином:

$$F(y) = \int_m^y f(y) dy. \tag{38}$$

Числові характеристики функцій неперервного випадкового аргументу обчислюються за формулами:

-математичне сподівання

$$E[Y] = \int_m^M y f_Y(y) dy = \int_a^b \alpha(x) f(x)\, dx; \tag{39}$$

-дисперсія

$$D(Y) = E[Y^2] - E^2[Y] = \int_m^M y^2 f_Y(y) \ dy - E^2[Y] =$$

$$= \int_a^b \alpha^2(x) f(x) \ dx - E^2[Y]; \tag{40}$$

середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}. \tag{41}$$

Приклад . Задано

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{10}{7}\sqrt[7]{x^3}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Обчислити $f_Y(y)$, $F(y)$, якщо $Y = 2X^2$.

Знайти $E[Y]$; $D(Y)$; $\sigma(Y)$.

Розв'язання. Використавши методику знаходження $f_Y(y)$, дістанемо:

1. Знайдемо інтервал можливих значень для випадкової величини Y:

$$0 \le X \le 1;$$

$$0 \le Y \le 2,$$

оскільки на проміжку $[0,\ 1]$ $Y = 2X^2$ – монотонно зростаюча функція.

2. Із рівності $Y = 2X^2$ знаходимо

$$X = \sqrt{\frac{y}{2}} = \Psi(y).$$

3. Обчислюємо похідну функції $\Psi(y)$

$$\Psi'(y) = \frac{1}{4}\left(\frac{y}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

4. Використовуючи (37), запишемо функцію $f_Y(y)$:

$$f(y) = f(\Psi(y))\ (\Psi'(y)) = \frac{10}{7}\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{3}{14}}\frac{1}{4}\left(\frac{y}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{15}{14}\left(\frac{y}{2}\right)^{-\frac{4}{14}} = \frac{5}{14}\left(\frac{y}{2}\right)^{-\frac{2}{7}}.$$

5. Перевіримо виконання умови нормування:

$$\int_0^2 f(y)\,dy = \int_0^2 \frac{5}{14}\left(\frac{y}{2}\right)^{-\frac{2}{7}} dy = \frac{5}{14}\int_0^2 \left(\frac{y}{2}\right)^{-\frac{2}{7}} dy = \frac{5}{7}\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{5}{7}}\frac{7}{5}\Bigg|_0^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{5}{7}}\Bigg|_0^2 = 1.$$

Нормування виконується, а тому щільність імовірностей випадкової величини Y

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0; \\ \frac{15}{14}(\frac{y}{2})^{-\frac{2}{7}}, & 0 < y \le 2; \\ 0, & y > 2. \end{cases}$$

Використавши (38), отримаємо

$$F(y) = \int_0^y f_Y(y)dy = \int_0^y \frac{5}{14}\left(\frac{y}{2}\right)^{-\frac{2}{7}} dy = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{5}{7}}\Bigg|_0^y = \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{5}{7}}.$$

Таким чином,

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0; \\ \left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{5}{7}}, & 0 < y \le 2; \\ 1, & y > 2. \end{cases}$$

Використавши формули (39), (40), (41), знайдемо числові характеристики:

$$E[Y] = \int_0^2 y f_Y(y)dy = \int_0^2 \frac{5y}{14}\left(\frac{y}{2}\right)^{-\frac{2}{7}} dy = \frac{5\sqrt[7]{4}}{14}\int_0^2 y^{\frac{5}{7}}dy = \frac{5\sqrt[7]{4}}{14}\cdot\frac{y^{\frac{12}{7}}}{\frac{12}{7}}\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{5}{24}2^{\frac{2}{7}}\cdot 2^{\frac{12}{7}} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}.$$

$E[Y]$ можна знайти, не обчислюючи $f_Y(y)$:

$$E[Y] = \int_0^1 2x^2\cdot\frac{10}{7}\sqrt[7]{x^3}dx = \frac{20}{7}\int_0^1 x^{\frac{17}{7}}dx = \frac{20}{7}\cdot\frac{x^{\frac{24}{7}}}{\frac{24}{7}}\Bigg|_0^1 = \frac{20}{25} = \frac{5}{6}.$$

$$E[Y^2] = \int_0^2 y^2 f_Y(y)dy = \int_0^2 \frac{5y^2}{14}\left(\frac{y}{2}\right)^{-\frac{2}{7}} dy = \frac{5\sqrt[7]{4}}{14}\int_0^2 y^{\frac{12}{7}}dy =$$

$$= \frac{5\sqrt[7]{4}}{14}\cdot\frac{y^{\frac{19}{7}}}{\frac{19}{7}}\Bigg|_0^2 = \frac{5\cdot 2^{\frac{2}{7}}\cdot 2^{\frac{19}{7}}}{38} = \frac{5\cdot 8}{38} = \frac{40}{38} = \frac{20}{19};$$

$$D(Y) = E\left[Y^2\right] - E^2[Y] = \frac{20}{19} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{20}{19} - \frac{25}{26} = \frac{720-475}{684} = \frac{245}{684};$$

Аналогічно, як і для $E[Y]$:

$$E\left[Y^2\right] = \int_0^1 (2x^2)^2 \frac{10}{7}\sqrt[7]{x^3}dx = \frac{40}{7}\int_0^1 x^4 x^{\frac{3}{7}}dx = \frac{40}{7}\int_0^1 x^{\frac{31}{7}}dx = \frac{40}{7}\cdot \left.\frac{x^{\frac{38}{7}}}{\frac{38}{7}}\right|_0^1 = \frac{40}{38} = \frac{20}{19}.$$

$$D\ (Y) = \frac{20}{19} - \frac{25}{36} = \frac{245}{684}.$$

$$\sigma\ (Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{\frac{245}{684}} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{245}{19}}.$$

B. *Функція $\alpha\,(X)$ немонотонна.*

Нехай $Y = \alpha\,(X)$, де функція $\alpha\,(X)$ – немонотонна функція, зображена на рис.

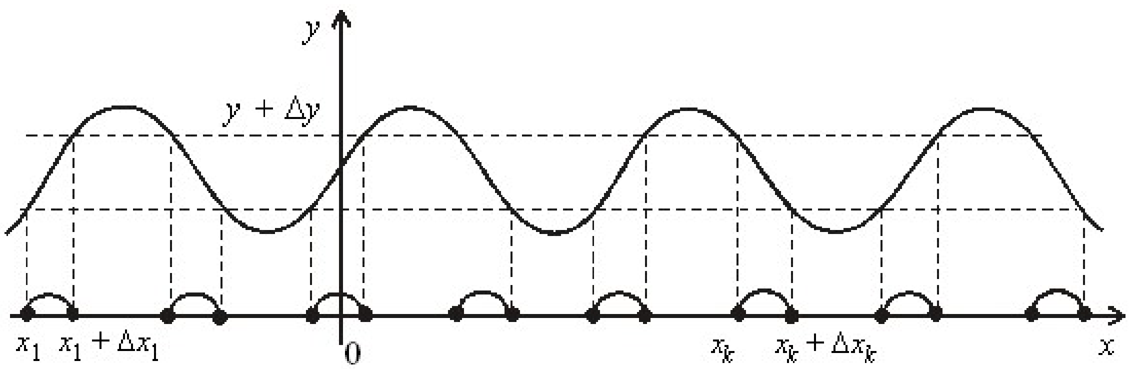

Рис. 3: $\alpha\,(X)$ – немопотонна функція

В такому випадку обернена до $\alpha\,(x)$ функція $X = \Psi\,(y)$ буде неоднозначною, а Y буде відповідати множина обернених функцій $\psi_1(y),\ \psi_2(y),\ ...,\psi_k(y)$.

Очевидно, що випадковій події $\{y < Y < y + \Delta\, y\}$ будуть відповідати k несумісних випадкових подій:

$$(x_1 < X < x_1 + \Delta\, x_1),\ (x_2 < X < x_2 + \Delta\, x_2)\,,\ ...,\ (x_k < X < x_k + \Delta\, x_k).$$

Таким чином, в цьому випадку

$P\,(y < Y < y + \Delta y) = \sum_{i=1}^{k} P\,(x_i < X < x_i + \Delta x_i)$ або, використовуючи властивості функції розподілу ймовірностей, можна записати:

$$F(y + \Delta y) - F(y) = \sum_{i=1}^{k}\left(F(x_i + \Delta x_i) - F(x_i)\right).$$

Таким чином,

$$f\left(y\right)=F'(y)=\lim_{\Delta\, y\to 0}\frac{F(y+\Delta\, y)-F(y)}{\Delta y}=\lim_{\Delta\, y\to 0}\sum_{i=1}^{k}\frac{F(x_i+\Delta\, x_i)-F(x_i)}{\Delta\ y}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0,\Delta x\to 0_i}\textstyle\sum_{i=1}^{k}\frac{F(x_i+\Delta x_i)-F(x_i)}{\Delta x_i}\ \left|\frac{\Delta x_i}{\Delta y}\right|=$$

$$=\textstyle\sum_{i=1}^{k}\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\frac{F(x_i+\Delta x_i)-F(x_i)}{\Delta x_i}\lim\limits_{\Delta y\to 0}\left|\frac{\Delta x_i}{\Delta y}\right|=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}f(x_i)(x'_y)=\sum_{i=1}^{k}f\left(\Psi_i(y)\right)\ \left|\Psi'_i(y)\right|.$$

Тому,

$$f\left(y\right)=\sum_{i=1}^{k}f\left(\Psi_i(y)\right)\ \left|\Psi'_i(y)\right|. \tag{42}$$

Методика знаходження $f_Y(y)$ аналогічна, як і для монотонної функції. Щоб знайти числові характеристики, можна використовувати формули (39), (40), (41).

Приклад. Дано

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ -\infty<x<\infty.$$

Знайдіть $f_Y(y)$, якщо $Y=X^2$.

Розв'язання. Побудуємо графіки $f(x)$, $Y=X^2$.

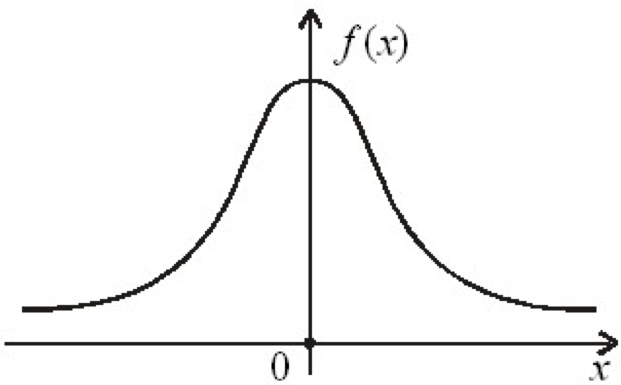

Рис. 4: $f(x)$

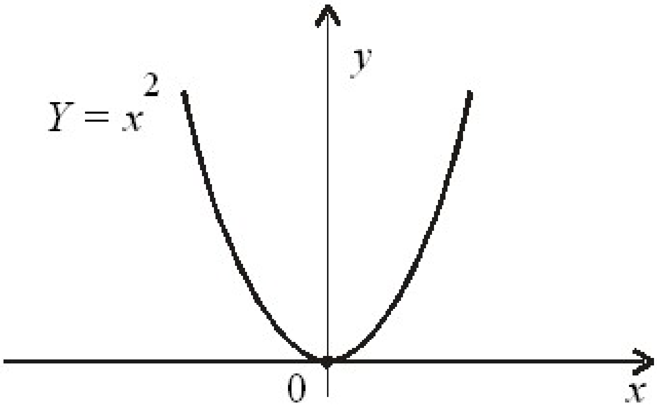

Рис. 5: $Y = X^2$

1. Якщо $-\infty < X < \infty$, то $0 < Y < \infty$.

2. Оскільки $Y = X^2$ – немонотонна функція при $\infty < X < \infty$, знайдемо обернені функції:

$$x_1 = \Psi_1(y) = \sqrt{Y}, \qquad x_2 = \Psi_2(y) = -\sqrt{Y}.$$

3. Похідні від цих обернених функцій будуть:

$$x_1' = \Psi_1'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad x_2' = \Psi_2'(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

4. Будуємо функцію $f_Y(y)$, використавши (42):

$$f\,(y) = \sum_{i=1}^{2} f\,(\Psi_i(y))\ \ (\Psi_i'(y)) = f\,(\Psi_1(y))\ \ (\Psi_1'(y)) + f\,(\Psi_2(y))\ \ (\Psi_2'(y)) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}.$$

5. Перевіримо виконання умови нормування:

$$\int_0^\infty f_Y(y)dy = \int_0^\infty \frac{y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy = \left| \begin{array}{l} y = z^2 \\ dy = 2zdz \end{array} \right| = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{z e^{-\frac{z^2}{2}}}{z} dZ =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = 1.$$

Умова нормування виконується, а це свідчить про те, що $f_Y(y)$ знайдено правильно.

Остаточно:

$$f\left(y\right)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0.\end{cases}$$

Знайдемо числові характеристики:

$$E\left[Y\right]=yf\left(y\right)dy=\int_0^{\infty}\frac{y\cdot y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}y^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}dy=$$

$$=\left|y=z^2 \quad dy=2zdz\right|=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}z^2e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\begin{vmatrix}u=z, \quad du=dz\\ ze^{-\frac{z^2}{2}}dz=dv \quad v=-e^{-\frac{z^2}{2}}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-ze^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right]=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[0+\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right]=1.$$

Для знаходженння дисперсії $D\ (Y)$ обчислимо

$$E\left[Y^2\right]=\int_0^{\infty}y^2f(y)dy=\int_0^{\infty}y^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}y^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{y}{2}}dy=$$

$$=|\ y=z^2 \quad dy=2zdz\ |=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}z^3e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\begin{vmatrix}u=z^2,\ du=2zdz\\ ze^{-\frac{z^2}{2}}dz=dv,\ v=-e^{-\frac{z^2}{2}}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-z^2e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_0^{\infty}+2\int_0^{\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}dz\right]=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-z^2e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_0^{\infty}-2e^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_0^{\infty}\right]=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}.$$

$$D\left(Y\right)=E\left[Y^2\right]-E^2[Y]=\frac{4}{\sqrt{2\pi}}-1=\frac{4-\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Математичне сподівання двовимірної випадкової величини

Нехай задано n-вимірний випадковий вектор $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$. Його математичним сподіванням називається n-вимірний вектор $(E[X_1],E[X_2],\ldots,E[X_n])$, де $E[X_k]$ математичне сподівання випадкової величини X_k.

Для двовимірного дискретного вектору (X,Y) математичні сподівання компонент обчислються за формулами:

$$E[X]=\sum_i x_i\sum_j p_{ij}, \qquad E[Y]=\sum_j y_j\sum_i p_{ij}.$$

Для двовимірного неперервного випадкового вектору (X, Y) з щільністю розподілу $f(x, y)$ за означенням математичного сподівання одновимірної випадкової величини:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx, \qquad E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy.$$

Але, $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$, і тому

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx.$$

Аналогічно одержимо формулу для $E[Y]$:

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy.$$

Дисперсія двовимірної випадкової величини. Коваріація, коефіцієнт кореляції та його властивості

Означення 11.3. *Дисперсією (або дисперсійною матрицею) n-вимірного випадкового вектору $(X_1, \ldots, X_n)$ називається сукупність n^2 чисел, які обчислюються за формулами*

$$b_{ik} = E[(X_i - E[X_i])(X_k - E[X_k])], \qquad i, k = \overline{1, n}.$$

Легко бачити, що дисперсійна матриця симетрична: $b_{ik} = b_{ki}$. Для двовимірного випадкового вектору (X, Y) дисперсією буде сукупність 3-х чисел: b_{11}, b_{22} і $b_{12} = b_{21}$. Перші два числа – це дисперсії компонент цього випадкового вектору:

$$b_{11} = E[(X - E[X])(X - E[X])] = E[(X - E[X])^2] = D(X),$$

$$b_{22} = E[(Y - E[Y])(Y - E[Y])] = E[(Y - E[Y])^2] = D(Y),$$

а третя називається коваріацією випадкових величин X і Y:

$$cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])],$$

або після розкриття дужок:

$$cov(X, Y) = E[XY] + E[X(-E[Y])] + E[Y(-E[X])] + E[E[X]E[Y]] =$$

$$= E[XY] - E[X]E[Y] - E[Y]E[X] + E[X]E[Y] = E[XY] - E[X]E[Y].$$

З одержаної формули слідує, що коваріація незалежних випадкових величин дорівнює нулю. Зв'язок між дисперсією та коваріацією встановлюють формули:

$$cov(X,X) = D(X), \qquad D(X+Y) = D(X) + 2cov(X,Y) + D(Y).$$

Дійсно,

$$D(X+Y) = E[(X+Y-E[X+Y])^2] = E[(X-E[X]+Y-E[Y])^2] =$$

$$= E[(X-E[X])^2] + 2E[(X-E[X])(Y-E[Y])] + E[(Y-E[Y])^2] = D(X) + 2cov(X,Y) + D(Y).$$

Використавши означення математичного сподівання, отримаємо:
для дискретного розподілу

$$cov(X,Y) = \sum_{i,k} (x_i - E[X])(y_k - E[Y])p_{ik};$$

для неперервного розподілу

$$cov(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])(y - E[Y])p(x,y)dxdy.$$

Коваріація двох випадкових величин X і Y показує не тільки ступінь взаємозалежності цих випадкових величин, але й їх розсіювання навколо точки $(E[X], E[Y])$ на площині. Розмірність коваріації $cov(X,Y)$ дорівнює добутку розмірностей випадкових величин X і Y. Для того, щоб отримати безрозмірну величину, але таку, що характеризує тільки залежність між випадковими величинами, а не їх розсіювання, вводять поняття коефіцієнта кореляції.

Означення 11.4. *Коефіцієнтом кореляції між випадковими величинами X і Y називається відношення коваріації до добутку середніх квадратичних відхилень цих величин:*

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Наведемо властивості коефіцієнта кореляції.

1) Коефіцієнт кореляції незалежних випадкових величин дорівнює нулю.

Доведення. Для незалежних випадкових величин X і Y $cov(X, Y) = 0$.

2) Для довільних випадкових величин $|\rho(X, Y)| \leq 1$.

Доведення. Достатньо довести, що $|\rho^2(X, Y)| \leq 1$, тобто

$$cov^2(X, Y) \leq D(X)D(Y). \tag{43}$$

Оскільки математичне сподівання невід'ємної випадкової величини невід'ємне, то для довільного дійсного числа t буде $E[(t(X - E[X]) - (Y - E[Y]))^2] \geq 0$, тобто

$$t^2 D(X) - 2tcov(X, Y) + D(Y) \geq 0. \tag{44}$$

Ліва частина цієї нерівності — квадратний тричлен відносно t з додатним коефіцієнтом при t^2. Цей тричлен буде невід'ємним для всіх дійсних значень t тоді і лише тоді, коли його дискримінант недодатний:

$$cov^2(X, Y) - D(X)D(Y) \leq 0,$$

таким чином, виконується нерівність (43).
3) $|\rho(X, Y)| = 1$ тоді і лише тоді, коли випадкові величини пов'язані лінійною залежністю $Y = aX + b$. То

$$\rho(X, Y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a > 0; \\ -1, & \text{якщо } a < 0 \end{cases} \tag{45}$$

Доведення. ($\Rightarrow$) Нехай $|\rho(X, Y)| = 1$, тобто $cov^2(X, Y) = D(X)D(Y)$, тому дискримінант квадратного тричлена у лівій частині нерівності (44) дорівнює нулю, і цей тричлен має один дійсний корінь

$$t = a = \frac{cov(X, Y)}{D(X)}. \tag{46}$$

Підставивши $t = a$ у рівність $E[(t(X - E[X]) - (Y - E[Y]))^2] = 0$, отримаємо

$$E[(aX - Y - E[aX - Y])^2] = 0,$$

тобто $D(aX - Y) = 0$. А це означає, що випадкова величина $aX - Y$ є сталою, позначимо її через $-b$. Таким чином, $aX - Y = -b$, тоді $Y = aX + b$. В (46) $D(X) > 0$, тому числа

a і $cov(X, Y)$ мають однакові знаки. Але знак $\rho(X, Y)$ визначається знаком $cov(X, Y)$, отже, й знаком a, тоді виконується (45).

($\Leftarrow$) Нехай випадкові величини пов'язані лінійною залежністю $Y = aX + b$. Покажемо, що $|\rho(X, Y)| = 1$, тобто $cov^2(X, Y) = D(X)D(Y)$. Оскільки

$$E[Y] = E[aX + b] = aE[X] + b,$$

$$Y - E[Y] = aX + b - aE[X] - b = a(X - E[X]),$$

тоді

$$cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y]))] = E[a(X - E[X])(X - E[X])] = aD(X).$$

З іншого боку, $D(Y) = D(aX+b) = D(aX)+D(b) = a^2D(X)$. Таким чином, $cov^2(X, Y) = a^2(D(X))^2$,

$$D(X)D(Y) = D(X)a^2D(X) = a^2(D(X))^2,$$

тоді $cov^2(X, Y) = D(X)D(Y)$. Теорему доведено.

Модуль коефіцієнта кореляції випадкових величин X і Y характеризує ступінь тісноти лінійної залежності між ними. Якщо лінійна залежність відсутня, то $\rho(X, Y) = 0$. Якщо між випадковими величинами буде лінійна функціональна залежність $Y = aX+b$, то $\rho(X, Y) = 1$ при $a > 0$ й $\rho(X, Y) = -1$ при $a < 0$.

Означення 11.5. *Дві випадкові величини X і Y називаються корельованими, якщо $\rho(X, Y) \neq 0$, і некорельованими, якщо $\rho(X, Y) = 0$.*

Легко бачити, що дві корельовані випадкові величини будуть також залежними (якщо припустити, що вони незалежні, то прийдемо до суперечності $\rho(X, Y) = 0$). Обернене твердження буде правильним не завжди, тобто якщо дві випадкові величини залежні, то вони можуть бути як корельованими, так і некорельованими. Покажемо на прикладі, що $\rho(X, Y) = 0$ навіть для випадкових величин, пов'язаних функціональною залежністю, тобто з некорельованості випадкових величин не завжди випливає їхня незалежність.

Приклад. Нехай випадкова величина X рівномірно розподілена на проміжку $[-1, 1]$, $Y = X^2$. Тоді

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \in [-1, 1]; \\ 0, & x \notin [-1, 1]. \end{cases} \qquad E[X] = 0.$$

$$cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = E[X^3] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0, \quad \Rightarrow \rho(X, Y) = 0.$$

Можна показати, що для нормально розподілених випадкових величин X і Y некорельованість рівносильна незалежності.

Література

1. Теорія ймовірностей : конспект лекцій, В.В. Булдигін, Ю.П. Буценко, О.О. Диховичний/ Київ, 1999, 97с.

2. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб., Н. Д. Федоренко, О. І. Баліна, І. С. Безклубенко/К.: КНУБА, 2007, 104 с.

3. Теорія ймовірностей, математична статистика та імовірнісні процеси : навч. посіб., Ю. М. Слюсарчук, Й. Я. Хром'як, Л. Л. Джавала, В. М. Цимбал/ Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2015, 364 с.

4. Курс теорії ймовірностей: навч. посіб., Б. В. Гнєденко/ К.: ВПЦ Київський університет, 2010, 464 с.

5. Теория вероятностей и математическая статистика. Изд.9. Учебное пособие для вузов, В. Е. Гмурман/М: Высшая школа, 2003, 479с.