**Probability Theory**

**Chapter 3**

**Conditional mathematical expectation.**

Lecturer: Nataliia Kruglova.

# Лекція 12. Умовні математичні сподівання.

### Умовні закони розподілу компонентів дискретної двовимірної випадкової величини.

Нехай закон двовимірного дискретного вектору $(X, Y)$ задано таблицею:

| $Y\backslash X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $\dots$ | $p_{1n}$ | $q_1$ |
| $y_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $\dots$ | $p_{2n}$ | $q_2$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $y_m$ | $p_{m1}$ | $p_{m2}$ | $\dots$ | $p_{mn}$ | $q_m$ |
| $\sum$ | $p_1$ | $p_2$ | $\dots$ | $p_n$ | 1 |

Нехай випадкова величина $Y$ приймає значення $y_k, k = \overline{1, m}$, тоді випадкова величина $X$ може приймати значення $x_1$, ..., $x_n$ з відовідними ймовірностями:

$P(X = x_1|Y = y_k)$, ..., $P(X = x_n|Y = y_k)$.

Введемо позначення: $P(X = x_i|Y = y_k) = p(x_i|y_k)$, $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$.

**Означення 12.1.** *Умовним розподілом дискретної випадкової величини $X$ при фіксованому значенні випадкової величини $Y = y_k$, $k = \overline{1, m}$, називають множину всіх можливих значень випадкової величини $X$ та умовних ймовірностей,що відповідають їм, тобто такий розподіл:*

| $X\|Y = y_k$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X\|Y = y_k)$ | $p(x_1\|y_k)$ | $p(x_2\|y_k)$ | $\dots$ | $p(x_n\|y_k)$ |

Умовні ймовірності $p(x_i|y_k)$, $k=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,n}$, обчислюються за формулою:

$$p(x_i|y_k) = P(X=x_i|Y=y_k) = \frac{P(X=x_i, Y=y_k)}{P(Y=y_k)} = \frac{p_{ik}}{q_k}, \qquad i=\overline{1,n}, \qquad k=\overline{1,m}.$$

Аналогічно визначаються умовні розподіли величини $Y$ при фіксованому значенні випадкової величини $X = x_i$, $i = \overline{1,n}$.

| $Y\|X=x_i$ | $y_1$ | $y_2$ | $\dots$ | $y_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(Y\|X=x_i)$ | $p(y_1\|x_i)$ | $p(y_2\|x_i)$ | $\dots$ | $p(y_m\|x_i)$ |

Умовні ймовірності $p(y_k|x_i)$, $k=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,n}$, обчислюються за формулою:

$$p(y_k|x_i) = P(Y=y_k|X=x_i) = \frac{P(X=x_i, Y=y_k)}{P(X=x_i)} = \frac{p_{ik}}{p_i}, \qquad i=\overline{1,n}, \qquad k=\overline{1,m}.$$

**Приклад.** Розглянемо двовимірний випадковий вектор $(X,Y)$:

| $Y\backslash X$ | -1 | 0 | 1 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.1 | 0.1 | 0.1 | 0.3 |
| 4 | 0.2 | 0.1 | 0 | 0.3 |
| 6 | 0.1 | 0.1 | 0.2 | 0.4 |
| $\sum$ | 0.4 | 0.3 | 0.3 | 1 |

Знайти розподіл випадкової величини $X$ за умови $Y=4$.

**Розв'язання.**

$$P(X=-1|Y=4) = \frac{P(X=-1, Y=4)}{P(Y=4)} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3},$$

$$P(X=0|Y=4) = \frac{P(X=0, Y=4)}{P(Y=4)} = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3},$$

$$P(X=1|Y=4) = \frac{P(X=1, Y=4)}{P(Y=4)} = \frac{0}{0.3} = 0.$$

Подамо у вигляді таблиці:

| $X\|Y=4$ | -1 | 0 |
|---|---|---|
| $P$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

## Умовні закони розподілу компонентів неперервної двовимірної випадкової величини

Для двовимірного неперервного випадкового вектору також розглядаються умовні закони розподілу, їх задають умовними щільностями ймовірностей.

**Умовна щільність** $f\left(X\,|Y=y\right)$ знаходиться за формулою:

$$f_{\left(X|Y=y\right)}\left(x,y\right)=\frac{f_{\left(X,Y\right)}\left(x,y\right)}{f_{Y}\left(y\right)}=\frac{f_{\left(X,Y\right)}\left(x,y\right)}{\int_{-\infty}^{\infty}f_{\left(X,Y\right)}\left(x,y\right)dx},$$

відповідно, **умовна щільність** $f\left(Y\,|X=x\right)$ :

$$f_{\left(Y|X=x\right)}\left(x,y\right)=\frac{f_{\left(X,Y\right)}\left(x,y\right)}{f_{X}\left(x\right)}=\frac{f_{\left(X,Y\right)}\left(x,y\right)}{\int_{-\infty}^{\infty}f_{\left(X,Y\right)}\left(x,y\right)dy}.$$

**Теорема 12.1. Теорема про множення щільностей.** *Сумісна щільність двовимірного неперервного випадкового вектору дорівнює:*

$$f_{\left(X,Y\right)}\left(x,y\right)=f_{Y}\left(y\right)f_{\left(X|Y=y\right)}\left(x,y\right),$$

$$f_{\left(X,Y\right)}\left(x,y\right)=f_{X}\left(x\right)f_{\left(Y|X=x\right)}\left(x,y\right).$$

Властивості умовної щільності:

1. $f_{\left(X|Y=y\right)}\left(x,y\right)\geq 0.$
2. $\int_{-\infty}^{\infty}f_{\left(X|Y=y\right)}\left(x,y\right)dx=1.$

**Приклад.** Дано щільність абсолютно неперервного випадкового вектора $(\xi,\eta)$

$$f_{(\xi,\eta)}\left(x,y\right)=\begin{cases}a\left(12xy+1\right), & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Знайдіть невідому константу $a$, умовні щільності $f_{\left(\xi|\eta=y\right)}\left(x,y\right)$, $f_{\left(\eta|\xi=x\right)}\left(x,y\right)$, якщо область $D$ обмежена лініями $y=2x$, $y=3-x$, $y=0$.

**Розв'язання.** Спочатку зобразимо область $D$ ( рис. 1.) і знайдемо невідому сталу.

$$1=a\int_{0}^{2}dy\int_{y/2}^{3-y}\left(12xy+1\right)dx=a\int_{0}^{2}\left.\left(6x^{2}y+x\right)\right|_{y/2}^{3-y}dy=$$

$$=a\int_{0}^{2}\left(6\left(3-y\right)^{2}y+3-y-\frac{3y^{3}}{2}-\frac{y}{2}\right)dy=a\int_{0}^{2}\left(\frac{9}{2}y^{3}-36y^{2}+\frac{105}{2}y+3\right)dy=$$

$$=a\left.\left(\frac{9}{8}y^{4}-12y^{3}+\frac{105}{4}y^{2}+3y\right)\right|_{0}^{2}=a\left(18-96+105+6\right).$$

$$33a=1,\qquad a=\frac{1}{33}.$$

Далі знайдемо розподіл компонент

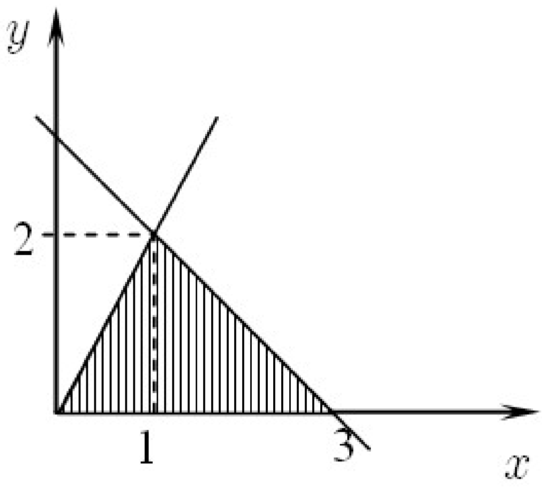


Рис. 1: область $D$

$$f_\xi\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{(\xi,\eta)}\left(x,y\right)dy=$$

$$=\begin{cases}0, & x\notin[0;3]\,;\\ \frac{1}{33}\int_0^{2x}\left(12xy+1\right)dy, x\in[0;1]\,; \\ \int_0^{3-y}\frac{1}{33}\left(12xy+1\right)dy, x\in(1;3]\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}0; & x\notin[0;3]\,;\\ \frac{1}{33}\left(6xy^2+y\right)\Big|_0^{2x}, & x\in[0;1]\,;\\ \frac{1}{33}\left(6xy^2+y\right)\Big|_0^{3x}, & x\in(1;3]\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}0, & x\notin[0;3]\,;\\ \frac{1}{33}\left(24x^3+2x\right), & x\in[0;1]\,;\\ \frac{1}{33}\left(6x\left(3-x\right)^2+3-x\right), & x\in(1;3]\,.\end{cases}$$

$$f_\eta\left(y\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{(\xi,\eta)}\left(x,y\right)dx=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{33}\int_{y/2}^{3-y}\left(12xy+1\right)dx, y\in[0;2]\,;\\ 0, & y\notin[0;2]\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{33}\left(6x^2y+x\right)\Big|_{y/2}^{3-y}, & y\in[0;2]\,;\\ 0, & y\notin[0;2]\end{cases}=$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{33}\left(6y\left(3-y\right)^2+3-y-\frac{3y^2}{2}-\frac{y}{2}\right), & y\in[0;2]\,; \\ 0, & y\notin[0;2] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{33}\left(\frac{9}{2}y^3-36y^2+\frac{105}{2}y+3\right), & y\in[0;2]\,; \\ 0, & y\notin[0;2] \end{cases}$$

Таким чином, умовні щільності будуть такими

$$f_{(\xi|\eta=y)} = \begin{cases} \frac{12xy+1}{4.5y^3-36y^2+52.5y+3}, & (x,y)\in D; \\ 0, & (x,y)\notin D \end{cases},$$

$$f_{(\eta|\xi=x)} = \begin{cases} \frac{12xy+1}{24x^3+(3-x)}, & (x,y)\in D, x\in[0;1]\,; \\ \frac{12xy+1}{6x(3-x)^2+(3-x)}, & (x,y)\in D, x\in(1;3]\,; \\ 0, & (x,y)\notin D. \end{cases}$$

### Умовні математичні сподівання для дискретних випадкових величин

**Означення 12.2.** *Умовним математичним сподіванням компоненти $X$ за умови, що $Y=y_j$ будемо називати число*

$$E\left[X\,|Y=y_j\right]=\sum_{i=1}^{n}x_iP\left\{X=x_i\,|Y=y_j\right\}. \tag{47}$$

*Аналогічно, умовним математичним сподіванням компоненти $Y$ за умови, що $X=x_i$ будемо називати число*

$$E\left[Y\,|X=x_i\right]=\sum_{j=1}^{k}y_jP\left\{Y=y_j\,|X=x_i\right\}.$$

**Приклад**. Задано розподіл дискретного випадкового вектора $(\xi,\eta)$

| $\xi\backslash\eta$ | 2 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|
| 3 | 0.1 | 0.15 | 0.15 |
| 7 | 0.15 | 0.05 | 0.05 |
| 10 | 0.1 | 0.2 | 0.05 |

Знайдіть умовний розподіл випадкової величини $\xi$ за умови, що $\eta=4$, умовний розподіл випадкової величини $\eta$ за умови $\xi=10$, умовне математичне сподівання випадкової величини $\xi$ за умови, що $\eta = 4$, умовне математичне сподівання випадкової величини $\eta$ за умови, що $\xi = 10$.

**Розв'язання.** $P\left\{\xi = x_i \,|\eta = 4\right\} = \frac{P\{\xi = x_i, \eta = 4\}}{P\{\eta = 4\}}$.

Значення ймовірності $P\left\{\eta = 4\right\}$ обчислимо як суму елементів другого справа стовпчика.

$$P\left\{\eta = 4\right\} = 0.15 + 0.05 + 0.2 = 0.4.$$

Потім,

$$P\left\{\xi = 3\,|\eta = 4\right\} = \frac{P\left\{\xi = 3,\ \eta = 4\right\}}{P\left\{\eta = 4\right\}} = \frac{0.15}{0.40} = \frac{3}{8};$$

$$P\left\{\xi = 7\,|\eta = 4\right\} = \frac{P\left\{\xi = 7,\ \eta = 4\right\}}{P\left\{\eta = 4\right\}} = \frac{0.05}{0.40} = \frac{1}{8};$$

$$P\left\{\xi = 10\,|\eta = 4\right\} = \frac{P\left\{\xi = 10,\ \eta = 4\right\}}{P\left\{\eta = 4\right\}} = \frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, умовний розподіл випадкової величини $\xi$ за умови, що $\eta = 4$ буде таким

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | 3 | 7 | 10 |
| $p_i$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{2}$ |

Обчислимо умовне математичне сподівання випадкової величини $\xi$ за умови, що $\eta = 4$:

$$E\left[\xi\,|\eta = 4\right] = \sum_i x_i P\left\{\xi = x_i\,|\eta = 4\right\} =$$

$$= 3 \cdot \frac{3}{8} + 7 \cdot \frac{1}{8} + 10 \cdot \frac{1}{2} = \frac{56}{8} = 7.$$

Перейдемо до знаходження умовного розподілу випадкової величини $\eta$ за умови, що $\xi = 10$:

$$P\left\{\eta = 2\,|\xi = 10\right\} = \frac{0.1}{0.35} = \frac{2}{7};$$

$$P\left\{\eta = 4\,|\xi = 10\right\} = \frac{0.2}{0.35} = \frac{4}{7};$$

$$P\left\{\eta = 8\,|\xi = 10\right\} = \frac{0.05}{0.35} = \frac{1}{7}.$$

Зведемо цей умовний розподіл у таблицю

| | | | |
|---|---|---|---|
| $y_j$ | 2 | 4 | 8 |
| $p_j$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{1}{7}$ |

Потім обчислимо умовне математичне сподівання.

$$E\left[\eta\,|\xi=10\right]=\sum_{j=1}^{3}y_jP\left\{\eta=y_j\,|\xi=10\right\}=$$

$$=2\cdot\frac{2}{7}+4\cdot\frac{4}{7}+8\cdot\frac{1}{7}=\frac{28}{7}.$$

**Означення 12.3.** *Умовним математичним сподіванням випадкової величини $Y$ відносно випадкової величини $X$ називається випадкова величина $E[Y|X]$, яка задається законом розподілу:*

| $E[Y\vert X]$ | $E[Y\vert X=x_1]$ | $E[Y\vert X=x_2]$ | $\dots$ | $E[Y\vert X=x_n]$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $P(X=x_1)$ | $P(X=x_2)$ | $\dots$ | $P(X=x_n)$ |

Подібним чином визначається умовне математичне сподівання випадкової величини $X$ відносно випадкової величини $Y$.

**Властивості умовного математичного сподівання.**

1. Якщо випадкові величини $X$ і $Y$ незалежні, то

$$E[Y|X]=E[Y].$$

**Доведення.** Випливає безпосередньо з (47). Тому, що для незалежних випадкових величин:

$$P\left\{Y=y_j\,|X=x_i\right\}=P\left\{Y=y_j\right\},$$

тоді

$$E\left[Y\,|X=x_i\right]=\sum_{j=1}^{m}y_jP\left\{Y=y_j\,|X=x_i\right\}=\sum_{j=1}^{m}y_jP\left\{Y=y_j\right\}=E[Y].$$

2. Якщо випадкова величина $X=c$, $c=const$, то

$$E[Y|X]=c.$$

**Доведення.** Випливає безпосередньо з (47):

$$E\left[Y\,|X=x_i\right]=\sum_{j=1}^{m}y_jP\left\{Y=y_j\,|X=x_i\right\}$$

Якщо $y_j \neq c$, то

$$P\left\{Y = y_j \left| X = x_i \right.\right\} = \frac{P\left\{Y = y_j, X = x_i\right\}}{P\{X = x_i\}} = 0,$$

а при $y_j = c$

$$P\left\{Y = y_j \left| X = x_i \right.\right\} = \frac{P\left\{Y = c, X = x_i\right\}}{P\{X = x_i\}} = 1.$$

3. $E[E[Y|X]] = E[Y]$.

**Доведення.**

$$E\left[E\left[Y\left|\right.\right]\right] = \sum_{i=1}^{m} E\left[Y\left|X = x_i\right.\right] P\{X = x_i\} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j P\left\{Y = y_j \left|X = x_i\right.\right\} P\{X = x_i\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j P\left\{Y = y_j, X = x_i\right\} = \sum_{j=1}^{m} y_j P\left\{Y = y_j\right\} = E[Y].$$

4. Нехай $g(x)$– деяка борелівська функція, тоді

$$E[Yg(X)|X] = g(X)E[Y|X].$$

**Доведення.** Скористаємося (47):

$$E\left[Yg(X)\left|X = x_i\right.\right] = \sum_{j=1}^{m} y_j g(x_i) P\left\{Y = y_j \left|X = x_i\right.\right\} =$$

$$= g(x_i)E\left[Y\left|X = x_i\right.\right].$$

## Умовне математичне сподіванння абсолютно неперперевних випадкових величин

**Означення 12.4.** *Умовне математичне сподівання абсолютно неперервних випадкових величин визначається рівностями:*

$$E[Y|X] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(x, y) dy, \qquad E[X|Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x, y) dx. \tag{48}$$

Умовне математичне сподівання $E[Y|X = x] = g(x)$ випадкової величини $Y$ при заданому значенні $X = x$ називається **регресією** $Y$ на $x$. Аналогічно, $E[X|Y = y] = z(y)$ – **регресія** $X$ на $y$.

Якщо дві функції регресії $Y$ на $x$ і $X$ на $y$ лінійні, то кажуть, що випадкові величини пов'язані між собою **лінійною кореляційною залежністю**.

**Теорема 12.2.** *(Теорема про нормальну кореляцію) Якщо двовимірний випадковий вектор $(X,Y)$ розподілений за двовимірним номальним законом, то його компоненти пов'язані між собою лінійною кореляційною залежністю.*

**Доведення.** Щільність двовимірного нормального вектору задається формулою:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}}\exp\left(-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left(\frac{(x-a_x)^2}{\sigma_x^2}-2r_{xy}\frac{(x-a_x)(y-ay)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-a_y)^2}{\sigma_y^2}\right)\right).$$

Щільність компоненти $X$:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{(x-a_x)^2}{2\sigma_x^2}}.$$

Знайдемо умовну щільність $f_{Y|X}(x,y)$:

$$f_{Y|X}(x,y)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left(\frac{(x-a_x)^2}{\sigma_x^2}-2r_{xy}\frac{(x-a_x)(y-ay)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-a_y)^2}{\sigma_y^2}\right)}}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}\sigma_x}{e^{-\frac{(x-a_x)^2}{2\sigma_x^2}}}.$$

Оскільки

$$-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left(\frac{(x-a_x)^2}{\sigma_x^2}-2r_{xy}\frac{(x-a_x)(y-ay)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-a_y)^2}{\sigma_y^2}\right)+\frac{(x-a_x)^2}{\sigma_x^2}\cdot\frac{1-r_{xy}^2}{1-r_{xy}^2}=$$

$$=-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left(\frac{(x-a_x)^2}{\sigma_x^2}-\frac{(x-a_x)^2(1-r_{xy}^2)}{\sigma_x^2}-2r_{xy}\frac{(x-a_x)(y-ay)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-a_y)^2}{\sigma_y^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left(\frac{r_{xy}^2(x-a_x)^2}{\sigma_x^2}-2r_{xy}\frac{(x-a_x)(y-ay)}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{(y-a_y)^2}{\sigma_y^2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left(\frac{(y-a_y)^2}{\sigma_y^2}-r_{xy}\frac{(x-a_x)}{\sigma_x}\right)^2.$$

Отже, з вигляду умовної щільності:

$$f_{Y|X}(x,y)=\frac{e^{-\frac{\left(y-\left(a_y+\frac{r_{xy}\sigma_y(x-a_x)}{\sigma_x}\right)\right)^2}{2\sigma_y^2(1-r_{xy}^2)}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}}$$

зрозуміло, що умовний закон розподілу також є нормальним розподілом з наступними параметрами.

$$E[Y|X]=a_y+\frac{r_{xy}\sigma_y(x-a_x)}{\sigma_x},\qquad D[Y|X]=\sigma_y^2(1-r_{xy}^2).$$

Аналогічно можна одержати регресію $X$ на $y$:

$$E[X|Y]=a_x+\frac{r_{xy}\sigma_x(y-a_y)}{\sigma_y},\qquad D[X|Y]=\sigma_x^2(1-r_{xy}^2).$$

Оскільки обидва умовних математичних сподівання – лінійні функції, то кореляція між випадковими величинами лінійна.

**Приклад.** Двовимірний випадковий вектор $(X, Y)$ задано щільністю розподілу:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & (x,y) \in [0,1]^2, \\ 0 & (x,y) \notin [0,1]^2. \end{cases}$$

Обчисліть $E[X|Y]$ і $E[Y|X]$.

**Розв'язання.** I спосіб.

Спочатку знайдемо маргінальні і умовні щільності компонент.

$$f_Y(y) = \int_0^1 4xydx = 2yx^2\Big|_0^1 = 2y, \qquad y \in [0,1].$$

$$f_X(x) = \int_0^1 4xydy = 2xy^2\Big|_0^1 = 2x, \qquad x \in [0,1].$$

$$f_{X|Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy}{2y} = 2x, & x \in [0,1], \\ 0 & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy}{2x} = 2y, & y \in [0,1], \\ 0 & y \notin [0,1]. \end{cases}$$

Скористаємося (47).

$$E[Y|X] = \int_0^1 y f_{Y|X}(x,y)dy = \int_0^1 2y^2dy = \frac{2y^2}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$E[X|Y] = \int_0^1 x f_{Y|X}(x,y)dx = \int_0^1 2x^2dx = \frac{2x^2}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

II спосіб. Оскільки

$$f_X(x)f_Y(y) = f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & (x,y) \in [0,1]^2, \\ 0 & (x,y) \notin [0,1]^2, \end{cases}$$

то випадкові величини $X$ і $Y$ – незалежні і

$$E[Y|X] = E[Y] = \int_0^1 y f_Y(y)dy = \int_0^1 2y^2dy = \frac{2y^2}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$E[X|Y] = E[X] = \int_0^1 x f_X(x)dx = \int_0^1 2x^2dx = \frac{2}{3}.$$

**Література**

1. Теорія ймовірностей : конспект лекцій, В.В. Булдигін, Ю.П. Буценко, О.О. Диховичний/ Київ, 1999, 97с.

2. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб., Н. Д. Федоренко, О. І. Баліна, І. С. Безклубенко/К.: КНУБА, 2007, 104 с.

3. Теорія ймовірностей, математична статистика та імовірнісні процеси : навч. посіб., Ю. М. Слюсарчук, Й. Я. Хром'як, Л. Л. Джавала, В. М. Цимбал/ Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2015, 364 с.

4. Курс теорії ймовірностей: навч. посіб., Б. В. Гнєденко/ К.: ВПЦ Київський університет, 2010, 464 с.

5. Теория вероятностей и математическая статистика. Изд.9. Учебное пособие для вузов, В. Е. Гмурман/М: Высшая школа, 2003, 479с.