Probability Theory

Chapter 4

Laws of large numbers

Lecturer: Nataliia Kruglova.

Лекція 13. Закони великих чисел.

Законами великих чисел називаються твердження, за допомогою яких характеризується поведінка середніх арифметичних сум незалежних випадкових величин при зростанні їхньої кількості. Наведемо найпростіші форми таких тверджень.

Нерівність Чебишова.

Нерівність Чебишова встановлює залежність між дисперсією випадкової величини та відхиленням випадкової величини від її середнього значення.

Теорема 13.1. *Нехай для випадкової величини X виконується: $E[X] < \infty$, $D(X) < \infty$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$*

$$P\{|X - E[X]| > \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{49}$$

Доведення. Доведемо нерівність для випадку абсолютно неперервної випадкової величини.

$$D(X) = E[(X - E[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x)dx \geq \int_{-\infty}^{-\varepsilon+E[X]} (x - E[X])^2 f(x)dx+$$

$$+\int_{\varepsilon+E[X]}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x)dx = \int_{(x-E[X])^2>\varepsilon^2} (x - E[X])^2 f(x)dx \geq$$

$$\geq \varepsilon^2 \int_{(x-E[X])^2>\varepsilon^2} f(x)dx = \varepsilon^2 P\left\{(X - E[X])^2 > \varepsilon^2\right\} = \varepsilon^2 P\{|X - E[X]| > \varepsilon\}.$$

Звідси і отримуємо нерівність Чебишова.

Аналогічно можна довести нерівність Чебишова для дискретної випадкової величини.

$$D(X) = E[(X - E[X])^2] = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - E[X])^2 p_i \geq \sum_{(x_i - E[X])^2 > \varepsilon^2} (x_i - E[X])^2 p_i \geq$$

$$\geq \varepsilon^2 \sum_{(x_i - E[X])^2 > \varepsilon^2} p_i = \varepsilon^2 P\left\{(X - E[X])^2 > \varepsilon^2\right\} = \varepsilon^2 P\left\{|X - E[X]| > \varepsilon\right\}.$$

Зауваження 13.1. *Нерівність (49) можна записувати ще і у такій формі:*

$$P\left\{|X - E[X]| \leq \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{50}$$

У формі (50) ця нерівність дає нижню межу ймовірності, а у формі (49) – верхню.

Нерівність Чебишова справедлива для довільних випадкових величин.

Зауваження 13.2. *Для випадкової величини $X = m$ – кількості успіхів у схемі Бернуллі з математичним сподіванням $E[X] = np$ і дисперсією $D(X) = npq$ нерівність (50) набуває вигляду:*

$$P\left\{|m - np| \leq \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2}. \tag{51}$$

Тоді для частоти $\frac{m}{n}$ події A в серії n незалежних випробувань з ймовірністю події A в одному випробуванні $p = P(A)$ нерівність (50) набуває вигляду:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}, \tag{52}$$

Оскільки $E\left[\frac{m}{n}\right] = p$, $D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{pq}{n}$.

Приклад. Нехай у великій партії деталей 40% браку. Яку кількість деталей потрібно вибрати, щоб з імовірністю, не меншою 0.95, частина бракованих деталей становила від 38% до 42%?

Розв'язання. Якщо вибрано n деталей, то можна вважати, що маємо схему Бернуллі з $p = 0.4$. Нехай X – частота бракованих деталей. Тоді $E[X] = p = 0.4$, $D(X) = \frac{pq}{n} = \frac{0.4 \cdot 0.6}{n} = \frac{0.24}{n}$. З (52):

$$P\left\{0.38 \leq X \leq 0.42\right\} = P\left\{|X - 0.4| \leq 0.02\right\} \geq 1 - \frac{0.24}{0.02^2 n} \geq 0.95.$$

$$\frac{600}{n} \leq 0.05 \Rightarrow n \geq 1200.$$

Тому потрібно вибрати не менше 1200 деталей.

Теорема 13.2. *(Нерівність Маркова). Для довільної невід'ємної випадкової величини X з $E[X] < \infty$ і довільного $\varepsilon > 0$ виконується нерівність:*

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{E[X]}{\varepsilon}. \tag{53}$$

Доведення. Доведемо нерівність для випадку абсолютно неперервної випадкової величини.

$$P\{X \geq \varepsilon\} = \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x)dx \leq \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x}{\varepsilon} f(x)dx =$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{\infty} xf(x)dx \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{0}^{\infty} xf(x)dx = \frac{E[X]}{\varepsilon}.$$

Аналогічно можна довести нерівність для дискретної випадкової величини.

$$P\{X \geq \varepsilon\} = \sum_{x_i \geq \varepsilon} p_i \leq \sum_{x_i \geq \varepsilon} \frac{x_i}{\varepsilon} p_i =$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{x_i \geq \varepsilon} x_i p_i \leq \frac{1}{\varepsilon}\sum_{0}^{\infty} x_i p_i = \frac{E[X]}{\varepsilon}.$$

Зауваження 13.3. *Нерівність (53) можна записати у вигляді:*

$$P\{X < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{E[X]}{\varepsilon}. \tag{54}$$

Приклад. Оцініть імовірність того, що випадкова величина відхиляється від свого математичного сподівання менше ніж на $3\sigma(X)$, використавши нерівність Чебишова.

Розв'язання. Використаємо нерівність Чебишова:

$$P\{|X - E[X]| \leq 3\sigma(X)\} \geq 1 - \frac{D(X)}{(3\sigma(X))^2} = 1 - \frac{1}{9} \approx 0.8889.$$

Якщо випадкова величина має нормальний розподіл, то подібна оцінка називається "правило трьох сігм", а відповідна ймовірність дорівнює 0.9973.

Теорема Чебишова.

Основне твердження ЗВЧ міститься в теоремі Чебишова. В ній використовується поняття збіжності випадкових величин за ймовірностю.

Означення 13.1. *Випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ збігаються за ймовірностю до випадкової величини X, якщо для довільного $\varepsilon > 0$:*

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1.$$

Збіжність за ймовірностю позначається наступним чином:

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X.$$

Теорема 13.3. *(Теорема Чебишова) Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – послідовність незалежних випадкових величин з однаковим математичним сподіванням $E[X_i] = a, i = 1, 2, \ldots$ і дисперсіями, які обмежені деякою сталою: $D(X_i) \le C, i = 1, 2, \ldots$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Доведення. Розглянемо випадкову величину $Y_n = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$. За властивостями математичного сподівання:

$$E[Y_n] = E\left[\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right] = \frac{E[X_1] + E[X_2] + \ldots + E[X_n]}{n} = \frac{na}{n} = a.$$

Оскільки $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – незалежні випадкові величини, то

$$D(Y_n) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n)}{n^2} \le \frac{nC}{n^2} = \frac{C}{n}.$$

Застосувавши до випадкової величини Y_n нерівність Чебишова, отримаємо для довільного $\varepsilon > 0$:

$$P\{|Y_n - E[Y_n]| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{D(Y_n)}{\varepsilon^2},$$

$$P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Права частина цієї нерівності прямує до 1, звідки і випливає твердження теореми.

Зауваження 13.4. *Теорема Чебишова дає обґрунтування наступного факту: при достатньо великому числі вимірювань з імовірністю, як завгодно близькою до 1, середнє арифметичне результатів вимірювання буде як завгодно мало відрізнятись від вимірюваної величини.*

Зауваження 13.5. *Якщо виконуються умови теореми Чебишова, то кажуть, що* $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$ *прямує до математичного сподівання за ймовірністю.*

Наслідок 13.1. *Нехай* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *– послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з математичним сподіванням* $E[X_i] = a, i = 1, 2, \ldots$ *і дисперсією* $D(X_i) = \sigma, i = 1, 2, \ldots$. *Тоді для довільного* $\varepsilon > 0$*:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

тобто

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} a.$$

Доведення. Оскільки

$$E[Y_n] = E\left[\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right] = \frac{E[X_1]+E[X_2]+\ldots+E[X_n]}{n} = \frac{na}{n} = a,$$

а $D(X_i) = \sigma^2 < \infty$, то використавши теорему Чебишова, одержимо необхідне твердження.

Теорема Бернуллі.

Теорема Бернуллі являється першою і найбільш простою формою ЗВЧ. Вона теоретично пояснює властивість стійкості відносної частоти події.

Теорема 13.4. *Якщо в кожному з серії незалежних випробувань випадкова подія настає з однією і тою самою ймовірністю* p, *то за достатньо великої кількості випробувань* n *з імовірністю як завгодно близькою до 1, відхилення відносної частоти появи цієї події* $\frac{\mu_n}{n}$ *від її ймовірності* p *не перевищуватиме як завгодно малого наперед заданого числа* $\varepsilon > 0$*:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Доведення. Введемо випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ наступним чином:

$X_i = I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$ (тобто, X_i –індикатор появи події A в i-тому випробуванні).

Тоді кількість появ події A в n випробуваннях можна представити у вигляді:

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Випадкові величини $X_i, i = \overline{1,n}$, мають розподіл Бернуллі, а тому $E[X_i] = p, i = \overline{1,n}$, $D(X_i) = pq, i = \overline{1,n}$. Покажемо, що дисперсії таких випадкових величин будуть обмежені:

$$pq = p(1-p) = -p^2 + p = -\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}.$$

Отже, випадкові величини $X_i, i = \overline{1,n}$, – незалежні з однаковим математичним сподіванням і обмеженими дисперсіями. Тому до них можна застосувати теорему Чебишова:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Узагальнення теореми Чебишова.

Теорема 13.5. *(Теорема Маркова). Нехай $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – послідовність випадкових величин (не обов'язково незалежних) і*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{n^2} = 0,$$

тоді середнє арифметичне випадкових величин прямує за ймовірностю до середнього арифметичного їх математичних сподівань:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n E[X_i]}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Теорема 13.6. *(Теорема Пуассона). Нехай проводиться n незалежних випробувань і ймовірність появи події A в i-тому випробуванні дорівнює p_i, тоді при необмеженному збільшенні кількості випробувань n частота появи події A за ймовірностю збігається до середнього арифметичного ймовірностей p_i:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Приклад. Нехай випадкові величини X_n мають наступний закон розподілу:

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2^n}, \qquad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Визначіть, чи виконується ЗВЧ для послідовності таких випадкових величин.

Розв'язання. Обчислимо математичне сподівання і дисперсію кожної випадкової величини.

$$E[X_n] = \frac{n}{2^n} - \frac{n}{2^n} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 0,$$

$$D(X) = E[X^2] = \frac{n^2}{2^n} + \frac{n^2}{2^n} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{n^2}{2^{n-1}} \leq \frac{9}{4}.$$

Отже, випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ задовольняють умови теореми Чебишова.

Література

1. Теорія ймовірностей : конспект лекцій, В.В. Булдигін, Ю.П. Буценко, О.О. Диховичний/ Київ, 1999, 97с.

2. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб., Н. Д. Федоренко, О. І. Баліна, І. С. Безклубенко/К.: КНУБА, 2007, 104 с.

3. Теорія ймовірностей, математична статистика та імовірнісні процеси : навч. посіб., Ю. М. Слюсарчук, Й. Я. Хром'як, Л. Л. Джавала, В. М. Цимбал/ Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2015, 364 с.

4. Курс теорії ймовірностей: навч. посіб., Б. В. Гнєденко/ К.: ВПЦ Київський університет, 2010, 464 с.

5. Теория вероятностей и математическая статистика. Изд.9. Учебное пособие для вузов, В. Е. Гмурман/М: Высшая школа, 2003, 479с.