**Probability Theory**

**Chapter 1**

**Basic concepts of probability theory**

Lecturer: Nataliia Kruglova.

# Лекція 1. Основні поняття теорії ймовірностей

### Предмет теорії ймовірностей

Теорія ймовірностей — це математична наука, яка виникла всередині XVII сторіччя. Першими роботами з теоріїї ймовірностей вважаються роботи Фермі П. (1601 – 1665), Б. Паскаля (1623 – 1662), Х. Гюйгенса (1629 – 1695). Подальший розвиток цієї науки пов'язують з ім'ям Я.Бернуллі (1654 – 1705), який вперше довів теорему – "Закон великих чисел"(ЗВЧ).

В XIX сторіччі теорія ймовірностей поширюються в страховій справі, військових науках, наприклад, в артилерії, біології. В цей період поширюються роботи С.Пуассона (1784 – 1840), П. Лапласа (1749 – 1827), К. Гауса (1777 – 1855).

Значний вклад в розвиток теорії ймовірностей було зроблено П. Л. Чебишевим (1821 – 1894), О.М.Ляпуновим (1857 – 1918), А.А.Марковим (1892 – 1922). Вони систематизували поняття теоріїї ймовірностей, перетворивши її на чітку математичну дисципліну.

Теорія ймовірностей – це розділ математики, в якому вивчаються тільки випадкові події зі стійкою частотою, встановлюються закономірності при їх частому повторенні.

В теорії ймовірностей існують деякі початкові поняття, які закладені в її основу. Основним таким поняттям є поняття випадкової події. Під подією розуміють таку дію, про яку можна сказати, що вона або неможлива, або відбулась, або відбувається, або відбудеться.

**Приклади:**

1) При підкиданні симетричної монети герб випаде зверху (може як відбутися, так і не відбутися).

2) Витягнути фіолетову кульку зі скриньки, яка містить 1 червону і 1 жовту кульку (неможлива подія).

З подією пов'зують виконання певного комплексу умов.

Процес виконання такого комплексу умов називається експериментом.

Отже, випадкова подія – це подія, яка може не відбутись або може відбутись в результаті проведення деякого експерименту, тобто, в результаті виконання певного комплексу умов.

**Приклади** випадкових подій:

1) Випадання грані кубика з непарною кількістю очок.

2) Поява інопланетянина.

3) Наявність 15 жінок серед вибраних 100 людей.

Якщо подія обов'язково відбувається під час кожної реалізації заданого комплексу умов, то вона називається вірогідною. Неможлива подія – подія, яка обов'язково не відбудеться в результаті експерименту. Очевидно, що після виконання експерименту лише один раз, ми не визначимо закономірності, що властиві конкретній випадковій події. Але закономірності можна виявити, якщо в однакових умовах здійснювати експеримент багаторазово. Наприклад, при реєстрації народження дітей в селищі за місяць не дадуть чітких співвідношень між кількістю народжених дівчат і хлопців. Однак, якщо розглядати статистичні дані по всій Україні за 10 років, то проаналізувавши їх, ми виявимо, що серед 1000 народжених дітей в середньому буде 515 хлопчиків. Тому, важливим поняттям теорії ймовірностей є поняття масовості подій. Вивчення кількісних закономірностей, характерних для масових однорідних випадкових подій, є предметом теорії ймовірностей.

## Простір елементарних подій. Операції над випадковими подіями

Простором елементарних подій $\Omega$ будемо називати множину, елементами якої є всі елементарні події, що пов'язані з даним експериментом.

Елементарні події $\omega$ – всі результати даного випробування, які взаємно виключають один одного.

**Приклади.**

1) Підкидання грального кубика 1 раз. Тоді $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, де $\omega_k$ – випадіння $k$ очок.

2) Підкидання монети 1 раз. $\Omega = \{\text{Г, Ц}\}$, або $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

3) Стрільба по плоскій мішені. Якщо ввести в площині мішені прямокутну систему координат $xOy$ і влучанню в певну точку площини поставити у відповідність координати цієї точки, тоді простором елементарних подій буде множина всіх впорядкованих пар дійсних чисел: $\Omega = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$.

4) Підкидання монети 2 рази. $\Omega = \{\text{ГГ, ЦЦ, ГЦ, ЦГ}\}$.

Нехай $\Omega$ – довільний простір елементарних подій. Випадковими подіями (подіями) назвемо всі підмножини $A$ множини $\Omega$.

Для прикладу 1 (підкидання кубика) подіями є: $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ - випадіння непарної кількості очок; $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ – випадіння парної кількості очок.

Для прикладу 3 (стрільба) подією є будь-яка область $A$ в площині $xOy$. Подія $A$ відбувається, якщо відбувається влучання в точку $(x, y) \in A$.

Подія $\Omega$ називається вірогідною, оскільки вона обов'язково відбудеться в результаті випробування, а подія $\emptyset$ – неможлива, вона обов'язково не відбудеться в результаті експерименту.

Розглянемо операції над подіями.

**Означення 1.1.** *Кажуть, що подія $A$ спричиняє собою $B$, або $B$ є наслідком $A$, якщо множина $A$ – підмножина множини $B$. Позначають ці відношення так само як для множин: $A \subset B$ або $B \supset A$. Відношення $A \subset B$ означає, що всі елементарні події, які входять до $A$, належать також і до $B$, тобто кожного разу, коли відбувається подія $A$, відбувається також і подія $B$.*

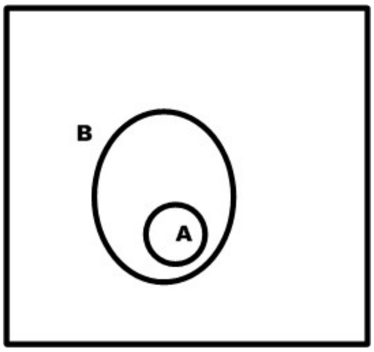


Рис. 1: $A \subset B$

**Приклади.**

1) $A = \{\omega_2, \omega_6\}$, $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \Rightarrow A \subset B$.

2) Подія $A$ - влучання в область $A$, подія $B$ - влучання в область $B \Rightarrow A \subset B$.

**Означення 1.2.** *Події $A$ і $B$ називаються рівносильними, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$. Рівносильність подій позначається так: $A = B$.*

**Означення 1.3.** *Об'єднанням двох подій (сумою подій) $A$ і $B$ ($A + B$ або $A \cup B$) називається така подія, яка відбудеться тоді і лише тоді, коли відбудеться хоча б одна з подій $A$ або $B$ (або лише $A$, або лише $B$, або і $A$, і $B$).*

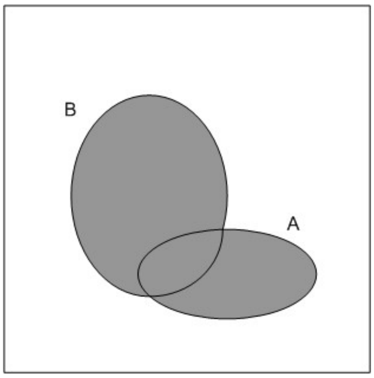


Рис. 2: $A \cup B$

Згідно з цим означенням, якщо події $A$ відповідає підмножина $A$ простору $\Omega$, а події $B$ - підмножина $B$, то події $A+B$ відповідає підмножина $A \cup B$, яка складається з усіх елементарних подій, які належать об'єднанню множин $A$ і $B$.

**Приклади.**

1) $A = \{\omega_2, \omega_4\}$, $B = \{\omega_4, \omega_6\} \Rightarrow A + B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$.

2) Подія $A$ - влучання в область $A$, подія $B$ - влучання в область $B$, тоді $A + B$ — влучання хоча б в одну з областей $A$ або $B$.

**Означення 1.4.** *Перетином двох подій (добутком подій) $A$ і $B$ ($AB$ або $A \cap B$) називається така подія, яка відбудеться тоді і лише тоді, коли відбудеться як подія $A$, так і подія $B$.*

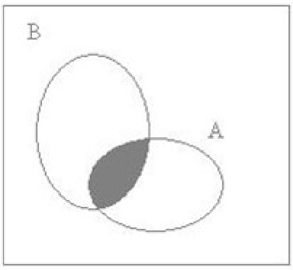


Рис. 3: $A \cap B$

Події $AB$ відповідає перетин множин $A$ і $B$, тобто вона складається з елементарних подій, які входять до складу обох множин $A$ і $B$.

**Приклади.**

1) $A = \{\omega_2, \omega_4\}$, $B = \{\omega_4, \omega_6\} \Rightarrow A \cap B = \{\omega_4\}$.

2) Подія $A$ — влучання в область $A$, подія $B$ — влучання в область $B \Rightarrow A \cap B$ — влучання в перетин цих областей.

**Означення 1.5.** *Різницею двох подій $A$ і $B$ ($A - B$ або $A \setminus B$) називається така подія, яка відбудеться тоді і лише тоді, коли відбудеться подія $A$, але не відбудеться подія $B$.*

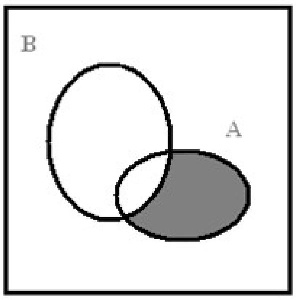


Рис. 4: $A \setminus B$

Події $A - B$ відповідає різниця множин $A$ і $B$, тобто вона складається з елементарних подій, які входять до $A$, але не входять до $B$.

**Приклади.**

1) $A = \{\omega_2, \omega_4\}$, $B = \{\omega_4, \omega_6\}$ $\Rightarrow$ $A - B = \{\omega_2\}$.

2) Подія $A$ - влучання в область $A$, подія $B$ - влучання в область $B$, тоді — влучання в різницю цих областей.

**Означення 1.6.** *Протилежною подією $\bar{A}$ до події $A$ називається подія $\Omega - A$, вона означає, що подія $A$ не відбулася.*

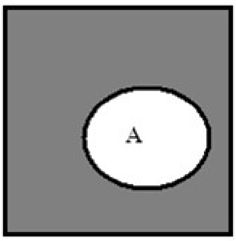


Рис. 5: $\bar{A}$

**Приклади.**

1) $A = \{\omega_2, \omega_4\}$ $\Rightarrow$ $\bar{A} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}$.

2) Подія $A$ - влучання в область $A$, подія $\bar{A}$ - невлучання в область $A$.

**Означення 1.7.** *Події $A$ і $B$ називаються несумісними, якщо їх перетин буде неможливою подією, тобто $AB = \emptyset$.*

Несумісність подій $A$ і $B$ означає, що поява події $A$ виключає можливість появи події $B$, і навпаки.

**Приклад.**

$A = \{\omega_2, \omega_4\}$, $B = \{\omega_3, \omega_5\} \Rightarrow A$ і $B$ — несумісні.

Поняття об'єднання і перетину подій поширюються на випадок будь-якої скінченної, а також зліченної кількості подій. Зокрема, подія $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + A_2 + \ldots$ відбувається тоді і лише тоді, коли відбувається принаймні одна з подій $A_i$, $i = 1, 2, \ldots$, а подія $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 A_2 \ldots$ відбувається тоді і лише тоді, коли відбуваються всі подіїі, $A_i$, $i = 1, 2, \ldots$.

Справедливі **правила де Моргана:**

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{B} \cup \overline{A}.$$

### Елементи комбінаторики

**Комбінаторика** – це розділ математики, предметом якого є теорія скінченних множин.

**Множина** – сукупність об'єктів довільної природи, які володіють спільною для всіх них властивістю.

**Приклади:** множина всіх цілих чисел; множина натуральних чисел – нескінченні множини; множина цілих чисел від 1 до 300 – скінченна множина.

Великими латинськими літерами $A, B, C, ...$ позначають множини; а маленькими літерами – їх елементи.

Позначимо: $N(A)$ - кількість елементів множини $A$. Якщо $N(A) = n$, то казатимемо, що $A$ - $n$-множина. В основі комбінаторики лежать правила **суми** і **добутку**.

Сформулюємо **правило суми.**

Якщо $N(A) = n, \quad N(B) = m, \quad A \cap B = \emptyset$, то $N(A \cup B) = m + n$.

**Правило добутку (основне правило комбінаторики)**: якщо I-ий етап можна здійснити $n_1$ способами, II-ий, який не залежить від першого етапу, – $n_2$ способами, ..., $k$- тий, який не залежить від усіх попередніх, - $n_k$ способами, то перший, другий, ..., $k$-тий етап послідовно можна здійснити $n_1 n_2 ... n_k$ способами.

**Приклад.** Скількома способами можна потрапити з міста A до міста D, якщо з міста

A до міста B веде $m$ доріг, з міста B до міста D - $k$ доріг, з міста A до міста C - $n$ доріг і з міста C до міста D - $l$ доріг?

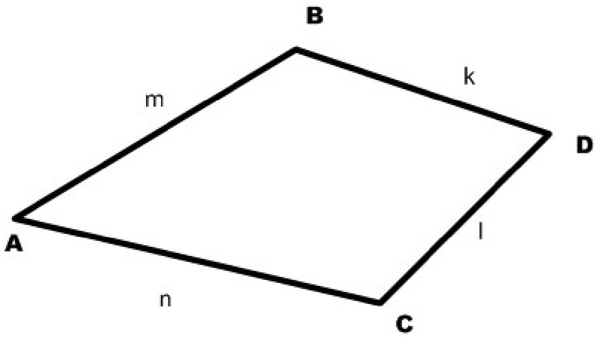


Рис. 6: Задача на правила суми і добутку

**Розв'язання.** За правилом добутку рух шляхом ABD можна здійснити $mk$ способами, а шляхом ACD - $nl$ способами. Згідно з правилом суми з A до D можна потрапити $mk + nl$ способами.

**Означення 1.8.** *Множина $M$ називається впорядкованою, якщо в ній встановлено відношення порядку, що має такі властивості: 1) $\forall a, b \in M$ або $a \prec b$, або $b \prec a$; 2) якщо $a \prec b$, $b \prec c$, то $a \prec c$.*

Щоб впорядкувати $n$-множини, треба кожному з її елементів приписати один з номерів $1, 2, ..., n$, або просто записати її елементи в певному порядку. Ту саму множину, очевидно, можна впорядкувати по-різному.

Наприклад, для множини $M = \{1, 2, 3\}$ можливі такі впорядкування: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$.

### Розміщення, перестановки, комбінації

**Комбінації (сполуки) з $n$ елементів по $k$.** Нехай $A$ - множина з $n$ елементів. Довільна $k$-елементна підмножина множин з $n$ елементів називається комбінацією з $n$ елементів по $k$. Порядок елементів у підмножинах неважливий. Число $k$-елементних підмножин множини з $n$ елементів позначають $C_n^k$. Воно дорівнює:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad \text{де } n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n.$$

Домовимось, що $0! = 1$, тоді $C_n^0 = 1$ Справедливі властивості:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \ C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

**Перестановки.** Впорядковані множини вважаються різними, якщо вони відрізняються або порядком елементів, або елементами . Впорядковані множини, що відрізняються лише порядком елементів (утворені з тієї самої множини), називаються перестановками цієї множини. Число перестановок множини з $n$ елементів дорівнює :

$$P_n = n!$$

**Розміщення з $n$ елементів по $k$.** Упорядковані $k$-елементні підмножини множини, що містить $n$ елементів, називаються розміщенням з $n$ елементів по $k$. Число розміщень з $n$ елементів по $k$ дорівнює:

$$A_n^k = k!C_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \text{ або } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**Біном Ньютона.**

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^n b^n,$$

де $n$ - натуральне число. Якщо $a = b = 1$, то

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^2 = 2^n.$$

Величина $C_n^k a^{n-k} b^k$ є $k$-тим членом в розкладі бінома, $k = 0, ..., n$.

**Число способів розбиття множини з $n$ елементів на $m$ груп.** Нехай $k_1$, $k_2$, ..., $k_m$ - цілі невід'ємні числа, причому $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$. Число способів, якими можна подати множину $A$ з $n$ елементів у вигляді об'єднання $n$ множин, що містять відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ елементів, дорівнює:

$$C_n\left(k_1, \ \ldots, \ k_m\right) = \frac{n!}{k_1! \ k_2! \ \ldots \ k_m!}.$$

**Перестановки з повтореннями.** Число різних перестановок, які можна утворити з $n$ елементів, серед яких є $k_1$ елементів першого типу, $k_2$ елементів другого типу, ..., $k_m$ елементів $m$-го типу, дорівнює:

$$C_n(k_1,\ \ldots,\ k_m) = \frac{n!}{k_1!\ k_2!\ \ldots\ k_m!}.$$

**Розміщеннями з повтореннями із $n$ елементів по $k$** називаються такі розміщення, які можуть містити однакові елементи. Кількість розміщень з повтореннями із $n$ по $k$ позначають $\overline{A}_n^k$ і знаходять за формулою: $\overline{A}_n^k = n^k$.

**Комбінацією з повтореннями з $n$ елементів по $k$** називається довільна підмножина з елементів множини (елементи не обов'язково різні). Число комбінацій з повтореннями з $n$ елементів по $k$ знаходиться за формулою: $\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

**Зауваження.** $\widetilde{C}_n^k$ – це число способів, якими можна розкласти $k$ однакових предметів по $n$ ящиках.

## Приклади розв'язання задач

**Задача 1.** У камері схову встановлено кодовий замок з чотирьох цифр. Скільки різних варіантів можна скласти з цифр $1, 2, 3, 4, 5$, якщо:

а) цифри в коді можуть повторюватися?

б) цифри в коді не повторюються?

в) код починається з цифри "5"?

г) код є непарним числом?

д) код - непарне число, цифри якого не повторюються?

**Розв'язання:**

а) Якщо цифри у коді можуть повторюватися, то на кожній позиції у коді може стояти будь-яка з 5 цифр, тобто, загальна кількість варіантів: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

б) На першому місці може стояти будь-яка з 5 цифр, на другому - 4 (оскільки одна вже стоїть на першому місці), на третьому - 3, на четвертому - 2 цифри. Загальна кількість варіантів підраховується за основним правилом комбінаторики: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

в) На першому місці стоїть цифра 5, на інших місцях можуть стояти будь-які з 5-ти цифр. Загальна кількість варіантів: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

г) Код є непарним числом, якщо на останньому місці стоїть непарна цифра, тобто, або 1, або 3, або 5. На інших місцях можуть стояти будь-які цифри: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 = 375$.

д) Якщо цифри не можуть повторюватися, а на останньому місці стоїть непарна цифра, тоді на передостанньому місці може стояти лише одна з чотирьох цифр, на другому - з 3, на першому з 2 цифр. Загальна кількість варіантів: $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 72$.

**Задача 2.** Скільки можна зробити перестановок з $n$ елементів, у яких дані 2 елементи не стоять поруч?

**Розв'язання.**

Визначимо число перестановок, у яких 2 елементи стоять поруч ($a$ зліва, $b$ - праворуч, і навпаки). Будемо вважати, що $ab$ (чи $ba$) один елемент. Тоді число перестановок, в яких $a$ та $b$ стоять поруч, дорівнює $2[(n-1)!]$. Тому шукане число перестановок дорівнює

$$n! - 2[(n-1)!] = (n-1)!(n-2).$$

**Задача 3.** 8 людей зайшло у потяг метро на певній станції. Скільки існує варіантів їх розміщення, якщо у потягу було 6 вагонів?

**Розв'язання.**

Шукане число дорівнює $\widetilde{C}_6^8 = C_{6+8-1}^8 = \frac{13!}{8!5!} = 1287$.

## Література

1. Теорія ймовірностей : конспект лекцій, В.В. Булдигін, Ю.П. Буценко, О.О. Диховичний/ Київ, 1999, 97с.

2. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб., Н. Д. Федоренко, О. І. Баліна, І. С. Безклубенко/К.: КНУБА, 2007, 104 с.

3. Теорія ймовірностей, математична статистика та імовірнісні процеси : навч. посіб., Ю. М. Слюсарчук, Й. Я. Хром'як, Л. Л. Джавала, В. М. Цимбал/ Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2015, 364 с.

4. Курс теорії ймовірностей: навч. посіб., Б. В. Гнєденко/ К.: ВПЦ Київський університет, 2010, 464 с.
5. Теория вероятностей и математическая статистика. Изд.9. Учебное пособие для вузов, В. Е. Гмурман/М: Высшая школа, 2003, 479с.