«Stochastic Processes and Applications to Mathematical Finance»

«СТОХАСТИЧНІ ПРОЦЕСИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗАДАЧ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ»

Лекція 1

Вступ до випадкових процесів

1.1. Вступ. Поняття випадкового процесу

Випадковий процес або випадкова функція − це певне узагальнення поняття випадкової величини з курсу Теорії ймовірностей. А саме, це параметризоване сімейство випадкових величин. У випадку випадкового процесу результатом експериментів буде не константа або визначена величина, а деяка часова функція, яка при повторюванні експериментів за однакових умов кожен раз випадковим чином змінює свій вигляд. Випадкова функціє є функцією однієї або багатьох змінних.

Невипадкова функція, яку одержуємо в результаті кожного досліду, називається ***реалізацією випадкової функції***. При кожному повторенні досліду будемо отримувати нову реалізацію, тобто випадкову функцію (випадковий процес) $X(t)$ можна розглядати як множину її реалізацій. Такий підхід є достатньо зручним при дослідженні багатьох метеорологічних процесів, а також фінансових та економічних.

Тепер розглянемо випадковий процес з іншого боку. Зафіксуємо певний момент часу t_0 та відновимо перпендикуляр в цій точці. Цей перпендикуляр перетне усі реалізації випадкового процесу. Точка перетину перпендикуляра з усіма реалізаціями є значеннями деякої випадкової величини, яке називають перерізом випадкового процесу (функції). Тоді випадковий процес можна розглядати як сукупність усіх випадкових перерізів, тобто сукупність усіх випадкових величин, що відповідають часовим моментам $t = t_1, t_2, t_3, \ldots$

1.2. Означення та властивості випадкового процесу.

Припустимо, що на просторі елементарних подій Ω задано сімейство випадкових величин $\{X(t), t \in T\}$, $X(t) = X(t, \omega)$, що індексуються параметром t, який пробігає множину значень T (наприклад, векторна випадкова величина має $T = \{1, 2, \ldots, n\}$).

Нехай $(\mathfrak{I}(t), \mathfrak{R}(t))$, $t \in T$ − вимірні простори значень $X(t)$, що відповідають кожному $t \in T$. Надалі будемо розглядати тільки випадок $\mathfrak{I}(t) = \mathbb{R}$ з борелевскою σ-алгеброю $\mathfrak{R}(t)$ підмножин $\mathbb{R}$, але для розуміння конструкції розподілів на нескінченновимірних просторах важливо зберегти індекс t в позначенні просторів значень кожного представника сімейства $\{X(t), t \in T\}$. Це сімейство називається *випадковим процесом*.

Означення 1.1 Відображення $X(t,\omega): \mathrm{T}\times\Omega \to \mathbb{R}$ називається ***випадковим процесом***, якщо для довільного $t_0 \in T$ $X(t_n,\omega)$ задовольняє визначенню випадкової величини. $T \in \mathbb{R}$ − вимірне. Якщо T злічене, то випадковий процес називають ***випадковою послідовністю***. Якщо T більш ніж злічене, то отримуємо випадкову функцію. Якщо замінити $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^n$, то отримуємо випадкове поле

Траєкторія (реалізація) і перетин.

Означення 1.2 ***Траєкторією*** (реалізацією) випадкового процесу $X(t,\omega)$ називається будь-яка функція виду $x(\mathrm{t}) = X(t,\omega_0)$, де $\omega_0 \in \Omega$ (фіксується результат).

Конкретна траєкторія − це одна з можливостей розвитку процесу в часі.

Означення 1.3 Перерізом випадкового процесу називається будь-яка випадкова величина виду $X(t_0,\omega)$; $t_0 \in T$ (фіксується час).

Переріз дає інформацію про імовірнісний розподіл для конкретного моменту часу.

Сімейства скінченновимірних розподілів.

Означення 1.4 Скінченновимірна функція розподілу випадкового процесу $X(t,\omega)$ − це будь-яка функція виду

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = P\left(X(t_1,\omega) < x_1,\ldots,X(t_n,\omega) < x_n\right)$$

$$t_1 < t_2 < \ldots < t_n,\ t_i \in T,\ x_i \in R$$

З іншого боку, це функція розподілу $\left(X(t_1,\omega) < x_1,\dots, X(t_n,\omega) < x_n \right) -$ випадкового вектора. Змінюючи набір n, $t_1, t_2, \dots, t_n$ отримаємо сімейство скінченновимірних розподілів випадкового процесу.

Означення 1.5	Випадкові процеси $X(t,\omega)$ і $Y(t,\omega)$ є ***стохастично еквівалентними***, якщо для довільного $t \in T$ $$P\{X(t,\omega) = Y(t,\omega)\} = 1.$$

Теорема Колмогорова про умови існування випадкового процесу з сімейством скінченновимірних розподілів, що збігається з заданим сімейством

Нехай $\{F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ – сімейство розподілів з наступними властивостями:

1) Функція $F_{t_1,t_2,\dots,t_n}$ неперервна зліва по кожній із змінних при фіксованих інших.

2) Для довільного i

$$\lim_{x_i \to \infty} \{F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)\} = 0.$$

Для довільних $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\lim_{x_1 \to \infty} \{F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)\} = 1, \dots, \lim_{x_n \to \infty} \{F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)\} = 1.$$

3) для довільного $h_i > 0$

$$\Delta_1(\Delta_2 \dots (\Delta_n(F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n))\dots) \ge 0,$$

$$\Delta_i F = F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h_i, x_{i+1} \dots, x_n) - F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1} \dots, x_n)$$

– оператор кінцевої різниці по i-й змінної.

4) $F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не змінюється при будь-перестановці пар індексів (t_i, x_i).

5) для довільного $n > k$

$$F_{t_1, t_2, \ldots, t_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = F_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_k, +\infty \ldots \infty).$$

Тоді існує ймовірнісний простір і заданий на ньому випадковий процес з сімейством розподілів, що задовольняє умовам теореми.

1.3. Приклади випадкових процесів.

Приклад 1. (точкові процеси). На телефонну станцію надходять заявки на міжміські розмови, і при цьому фіксується час надходження заявки. У таких процесах з появою певних подій в випадкові моменти часу зазвичай вважають $X(t)$ дорівнює числу заявок, що надійшли за проміжок часу [0, t]. Ці процеси використовують як математичні моделі при проектуванні систем обслуговування (моделі теорії черг), при аналізі транспортних потоків на магістралях; вони використовуються в ядерній фізиці, астрономії тощо. Множина T в даному випадку – це відрізок $\mathbb{R}^+$ виду [0, T] з можливим нескінченним значенням *T*. Простір $\Im(t)$ значень випадкового процесу при будь-якому $t \in T$ збігається з множиною невід'ємних цілих чисел.

Траєкторія має вигляд ступінчастої функції, зростаючої стрибками в випадкові моменти часу, і величина кожного стрибка дорівнює одиниці.

Приклад 2. (розгалужені процеси). Спостерігається деяка біологічна популяція, що складається з особин, здатних розмножуватися і гинути. Такі дані, як число нащадків в певному коліні окремого представника популяції, чисельність популяції до фіксованого моменту часу *t*, кількість загиблих і новонароджених і т.п., викликають особливий інтерес для популяційної генетики, і важко переоцінити роль імовірнісних моделей у вивченні динаміки розвитку біологічної популяції. Аналогічні моделі використовуються у фізиці елементарних частинок, особливо при вивченні ядерних реакцій. Простору T і $\Im(t)$ ті ж, що і в першому прикладі, траєкторії також мають вигляд східчастих функцій, але величини стрибків - довільні цілі числа.

Приклад 3. (процеси з пам'яттю). Випадкові процеси – основний математичний апарат, яким моделюють більшість видів фінансової діяльності. Математичні моделі процесів з пам'яттю, які виникають в багатьох задачах фізики, економіки, кліматології, гідромеханіки та фінансової математики. Зокрема, такі процеси широко застосовуються для моделювання й прогнозування курсів валют, цін акцій та інших цінних паперів

Розширений фундаментальний матеріал лекції можна знайти у підручниках

1. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст] : учеб. пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 4-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2007. – 479 с. – ISBN 978-5- 06-005820-8

2. Жлуктенко, В. І. Стохастичні процеси та моделі в економіці, соціології, екології [Текст] : навч. посіб. / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – К. : КНЕУ, 2002. – 226 с. – ISBN 966-574- 346-5.

3. Сеньо, П. С. Випадкові процеси [Текст] : підручник / С. П. Сеньо ; Мін-во освіти і науки України, ЛНУ. – Львів : Компакт-ЛВ, 2006. – 288 с. – ISBN 966-96414-7-0.