ЛЕКЦІЯ 2. НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЇ МНОГОЧЛЕНОМ ТЕЙЛОРА

Найпростішими функціями в розумінні обчислень їхніх значень є многочлени. Виникає питання про можливість наближення (заміни) функції f в околі точки x_0 многочленом деякого степеня.

2.1. Многочлен і формула Тейлора

1. Нехай функція f принаймні n разів диференційовна в околі точки x_0.

Многочленом Тейлора n-го порядку функції f за степенями $(x - x_0)$ називають многочлен

$$\tilde{P}_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \ \ (f^{(0)} = f).$$

Значення похідних функції f і її многочлена Тейлора $\tilde{P}_n(x)$ до n-го порядку включно збігаються:

$$f(x_0) = \tilde{P}_n(x_0), f'(x_0) = \tilde{P}_n'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0) = \tilde{P}_n^{(n)}(x_0).$$

2. *Формулою Тейлора n-го порядку функції f в околі точки x_0* називають рівність

$$f(x) = \tilde{P}_n(x) + r_n(x),$$

де $\tilde{P}_n(x)$ — многочлен Тейлора, $r_n(x) = f(x) - \tilde{P}_n(x)$ — *залишковий член формули Тейлора*.

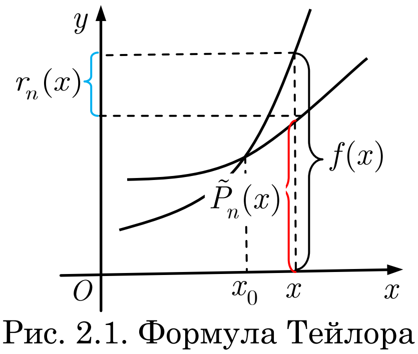

Рис. 2.1. Формула Тейлора

Формулу Тейлора в околі точки $x_0 = 0$ називають *формулою Тейлора — Маклорена.*

Залишковий член формули Тейлора $r_n(x)$ визначає похибку наближення функції f її многочленом Тейлора $\tilde{P}_n(x)$.

Якщо $f(x) = P_n(x)$ є многочленом n-го порядку, то $r_n(x) = 0$:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

2.2. Різні форми Тейлорової формули

1. Покладаючи $x - x_0 = \Delta x, x = x_0 + \Delta x$ у Тейлоровій формулі

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x_0 + \Delta x),$$

дістаємо

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n +$$
$$+ r_n(x_0 + \Delta x).$$

Оскільки

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0),$$
$$f^{(n)}(x_0)\Delta x^n = d^n f(x_0),$$

то Тейлорову формулу n-го порядку функції f можна записати в *диференціальній формі*

$$\boxed{\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \frac{d^3 f(x_0)}{3!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + r_n(x).}$$

2. Теорема 2.1 (Тейлора).

Якщо функція f означена й n разів диференційовна в околі точки x_0, то правдива *формула Тейлора* n-го порядку функції f *із залишковим членом у формі Пеано*:

$$f(x) = \tilde{P}_n(x) + o((x - x_0)^n) =$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$
$$+ o((x - x_0)^n), x \to x_0.$$

► $r_n(x) = f(x) - \tilde{P}_n(x)$

З означення многочлена $P_n(x)$ випливає, що

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Доведімо, що

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Застосуймо n разів правило Бернуллі — Лопіталя для розкриття невизначености вигляду $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{(n-1)!(x - x_0)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{r_n^{(n)}(x)}{n!} = 0,$$

тобто $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$, коли $x \to x_0$. ◄

3. Якщо вимагати від функції $f(x)$ $(n+1)$ разів диференційовності в околі точки x_0, то можна записати *формула Тейлора* n-го порядку функції f *із залишковим членом у формі Лаґранжа*:

$$\boxed{\begin{gathered} f(x) = \tilde{P}_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = \\ = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \\ c \in (x_0; x). \end{gathered}}$$

2.3. Розвинення за формулою Тейлора — Маклорена елементарних функцій

1. Одержім розвинення функції $f(x) = e^x$. Функція $f(x) = e^x$ нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$. Знайдімо послідовні похідні від функції $f(x) = e^x$:

$$\left.\begin{aligned} &f(x)=e^x,\\ &f'(x)=e^x,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &f^{(n)}(x)=e^x,\\ &f^{(n+1)}(x)=e^x, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} f(0)=1,\\ f'(0)=1,\\ \dots\dots\dots\dots\\ f^{(n)}(0)=1\\ f^{(n+1)}(c)=e^c, c\in(0;x). \end{cases}$$

Підставляючи одержані значення $f(0), f'(0),..., f^{(n)}(0), f^{(n+1)}(c)$ у формулу Тейлора — Маклорена із залишковими членами у формі Пеано та Лаґранжа, дістаємо:

$$\boxed{\begin{aligned} e^x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n);\\ e^x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c,\quad c\in(0;x). \end{aligned}}$$

2. Розвинення функції $f(x)=\sin x$:

$$\boxed{\begin{gathered} \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+o(x^{2k});\\ \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+(-1)^k\cos c\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},\\ c\in(0;x). \end{gathered}}$$

3. Розвинення функції $f(x)=\cos x$:

$$\boxed{\begin{gathered} \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2k+1});\\ \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+(-1)^{k+1}\cos c\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!},\\ c\in(0;x). \end{gathered}}$$

4. Розвинення функції $f(x)=\ln(1+x)$:

$$\boxed{\begin{gathered}\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o(x^n);\\ \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n}{(1+c)^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1},\\ c\in(0;x).\end{gathered}}$$

5. Розвинення функції $f(x)=(1+x)^{\alpha}$:

$$\boxed{\begin{gathered}(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n);\\ (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\\ +\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+c)^{\alpha-n-1}x^{n+1},\ c\in(0;x).\end{gathered}}$$

Якщо $\alpha=m\in\mathbb{N}$, то всі члени формули Тейлора — Маклорена, починаючи з $(m+1)$-го зникають, і формула Тейлора — Маклорена перетворюється на відому формулу *Ньютонового бінома*

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+x^m\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

2.4. Застосування Тейлорової формули

1. Формули Тейлора — Маклорена із залишковим членом у формі Пеано є джерелом асимптотичних формул.

Приміром, для $f(x)=\sin x$ маємо

$$\sin x=x+o(x^2);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6), x\to 0.$$

Використаємо одну з цих формул для обчислення границі

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3!}+\frac{o(x^4)}{x^3}\right)=\frac{1}{6}.$$

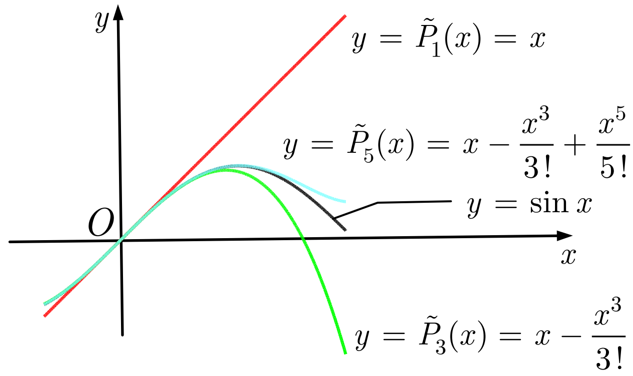

Рис. 2.2. Наближення функції $f(x)=\sin x$ Тейлоровими многочленами в точці $x_0=0$

2. Формулу Тейлора за степенями $(x-x_0)$ із залишковим членом у формі Лаґранжа застосовують для обчислення наближених значень функції в околі $U(x_0)$.

Значення $f(x)$ в околі $U(x_0)$ обчислюють за формулою

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

похибка наближення не перевищує

$$\left|r_n(x)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|,\ c\in(x_0;x).$$

3. Приміром, Обчислімо $e^{0,1}$ з точністю до $0,001$.

❍Запишімо формулу Тейлора — Маклорена для e^x:

$$e^x=1+\frac{x!}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+r_n(x),$$

$$r_n(x)=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},0<c<x.$$

Похибка наближення не повинна перевищувати $0,001$, отже,

$$r_n(x)=\frac{e^c(0,1)^{n+1}}{(n+1)!}<0,001.$$

Оскільки $e^c<2$, то

$$\frac{2}{10^{n+1}(n+1)!}<0,001.$$

Покладаючи $n = 1,2,3,\ldots$, знаходимо, що нерівність виконано, починаючи з $n = 3$.

Отже, з точністю до $0,001$

$$e^{0,1} \approx 1 + \frac{0,1}{1!} + \frac{0,01}{2!} + \frac{0,001}{3!} = 1,105. \bullet$$

4. При $n = 1$ функцію f наближають многочленом 1-го степеня

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

з похибкою

$$r_2(x) = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2$$

Оскільки за означенням $x - x_0 = \Delta x, f'(x_0)\Delta x = df(x_0)$, то

$$f(x) \approx f(x_0) + df(x_0),$$

з похибкою, що не перевищує

$$\left|r_2(x)\right| = \left|\frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2\right|, x_0 < c < x.$$

2.5. Особливості наближення функцій многочленом Тейлора

1. Розгляньмо формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лаґранжа:

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

де $x \in [a;b], c \in (x_0;x), x \neq x_0$. Оскільки за припущенням похідна $f^{(n+1)}$ за припущенням неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку $[a;b]$:

$$M_{n+1} = \max_{x\in[a;b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right| < \infty.$$

Отже,

$$\left|r_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{n+1}$$

та

$$\left|r_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} l^{n+1},$$

де $l = \max\{x_0 - a, x_0 - b\}$.

2. Для похибки апроксимації функції многочленом Тейлора характерно то, що вони достатньо швидко спадає, коли x наближається до

x_0. Принаймні це так, коли $f^{(n+1)}(x) = \mathrm{const} \neq 0$, тобто f є многочлен степеня $n+1$. При цьому $\left|f^{(n+1)}(x)\right| = M_{n+1}, x \in [a;b]$, і нерівності перетворюються на рівності.

Істотно нерівномірна на відрізку $[a;b]$ точність апроксимації функції f є недоліком многочлена Тейлора. Інший недолік полягає в тому, що для побудови многочлена Тейлора треба знаходити у функції f похідні високих порядків.