ЛЕКЦІЯ 3. ІНТЕРПОЛЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

Найпростішими функціями в розумінні обчислень їхніх значень є многочлени. Виникає питання про можливість наближення (заміни) функції $f(x)$ в околі точки x_0 многочленом деякого степеня.

Обчислюючи значення функції f часто буває зручно скористатись процедурою обчислення іншої функції φ, у деякому сенсі «схожої» на обчислювано, але «зручнішою з обчислювального погляду». Залежно від того як формалізують поняття «схожості» і «зручності обчислень», будують конкретну постановку задачі.

3.1. Постановка задачі

1. Задача інтерполяції (екстраполяції). Нехай функцію f задано таблицею своїх значень, тобто відомі значення $f(x_i) = f_i$ функції в деяких точках $x_0 < x_1 < ... < x_n$. Задача полягає в обчисленні значення функції f у точці $x \neq x_i$. Можна сказати, що в цьому випадку «зручність» обчислень полягає у можливості обчислення значень функції f. Нехай функція φ така, що спосіб обчислення її значень у точці $x = x_i$ відомий, і нехай, крім того, «схожість» φ та f означає збіг їх значень у точках, у яких відомі значення функції f:

$$\varphi(x_i) = f(x_i), i = \overline{0, n}.$$

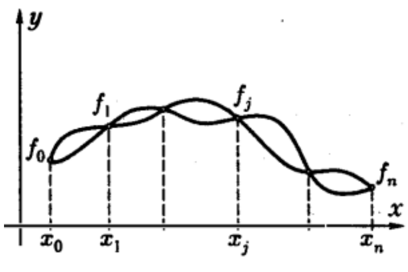

Рис. 3.1

Покладаючи $f(x) = \varphi(x)$ у решті точок, дістаємо можливість обчислювати значення функції f, відсутні в таблиці. Якщо $x_0 < x < x_n$, то кажуть про *задачу інтерполяції*, інакше — про *задачу екстраполяції*.

Без додаткових обмежень на функцію φ так сформульована задача має нескінченно багато розв'язків — через задані $(n+1)$ точку $(x_i; f_i)$ на площині можна провести скільки завгодно різних кривих. Зазвичай звужують множину можливих розв'язків, у розглядуваній задачі конкретизують клас інтерполяційних (екстраполяційних) функцій. Приміром, розглядають многочлени, тригонометричні многочлени або дробово-раціональні функції, і таким чином надають математичного сенсу поставленій задачі.

2. Нехай значення функції f одержано з деякими похибками δ_i, так що табличні значення мають вигляд

$$\tilde{f}(x_i) = f(x_i) + \delta_i, i = \overline{0, n},$$

де $f(x_i)$ — точні (але невідомі) значення функції f. Замінюючи функцію f функцією φ вже не має сенсу вимагати збігу значень цих функції в точках x_i — справдження цієї вимоги призводить до складних обчислень для побудови φ, громіздкому виразу для неї, тоді як не покращує точності представлення функції f функцією φ.

У цій ситуації краще вибирати функцію φ якомога простішою, а близькість f та φ розуміти як близькість у сенсі деякого критерію

$$\Psi(f, \varphi) \to \min,$$

який описує сумарне відхилення функції φ від f у тих точках, де задано табличні значення. У якості критерію $\Psi(f, \varphi)$ можна взяти, приміром, один з наступних:

$$\Psi_1(f, \varphi) = \sum_{i=0}^{n} \left| f(x_i) - \varphi(x_i) \right|^2 \to \min;$$

$$\Psi_2(f, \varphi) = \sum_{i=0}^{n} \left| f(x_i) - \varphi(x_i) \right| \to \min;$$

$$\Psi_3(f, \varphi) = \max_{0 \le i \le n} \left| f(x_i) - \varphi(x_i) \right| \to \min.$$

3.2. Інтерполяційний многочлен Лаґранжа

1. Найпростішими функціями дійсної змінної є многочлени. Тому часто намагаються наблизити (апроксимувати) задану функцію f многочленом n-го степеня $P_n(x)$.

Одним із многочленів, що апроксимує функцію f, є многочлен Тейлора, для побудови якого треба знати n похідних функції f у точці x_0, що не завжди можливо.

Нехай функцію f означено на відрізку $[a;b]$ та $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — різні точки цього відрізка, які називають *вузлами*,

$$a \le x_0 < x_1 < x_1 < \ldots < x_n \le b.$$

Нехай відомо значення f_i цієї функції у вузлах x_i, тобто

$$f(x_i) = f_i, i = \overline{0,n}.$$

Задача інтерполювання функції f на відрізку $[a;b]$ полягає в тому, щоб підібрати многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$$

з дійсними коефіцієнтами, що набуває у вузлах x_i ті самі значення f_i, що й функція f, тобто виконано рівності:

$$P_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_i^{n-k} = f(x_i) = f_i, \ i = \overline{0,n}. \tag{3.1}$$

Такий многочлен $P_n(x)$ називають *інтерполяційним многочленом*, а точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — *вузлами інтерполяції*.

2. Рівності (3.1) утворюють лінійну систему $n+1$ алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_0 + a_n = f_0, \\ a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_1 + a_n = f_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0x_n^n + a_1x_n^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_n + a_n = f_n, \end{cases}$$

з $n+1$ невідомими $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Визначник цієї системи є визначником Вандермонда

$$\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

оскільки вузли x_i — різні. Отже, система має єдиний розв'язок для будь-яких правих частин f_i, тобто коефіцієнти інтерполяційного многочлена $P_n(x)$ можна знайти однозначно.

Розв'язати поставлену задачу, многочленом, степінь якого нижче за n, узагалі кажучи, не можна.

Многочлени, степеня вище за n, із системи не можна визначити однозначно.

Розв'язання системи можна записати в різних формах.

3. Інтерполяційний многочлена Лаґранжа. Інтерполяційна формула Лаґранжа дозволяє представити многочлен $L_n(x)$ у вигляді лінійної комбінації

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j l_j(x)$$

значень функції $f(x)$ у вузлах інтерполювання.

Знайдімо явний вираз для коефіцієнтів $l_j(x)$. З умов інтерполювання, дістаємо

$$\sum_{j=0}^{n} l_j(x_i) f_j = f_i, \; i = \overline{0,n}.$$

Ці умови будуть виконано, якщо на функції $l_j(x)$ накласти умови:

$$l_j(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j; \end{cases} \; i, j = \overline{0,n},$$

які означають, що кожна з функцій $l_j(x), j = \overline{0,n}$, має не менше як n нулів на відрізку $[a;b]$. Оскільки $L_n(x)$ — многочлен степеня n, коефіцієнти $l_j(x)$ також природньо шукати у вигляді многочленів степеня n, а саме

$$l_j(x) = \lambda_j (x - x_0)\dots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\dots(x - x_n).$$

З умови $l_j(x_j) = 1$ маємо

$$\lambda_j = \frac{1}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)...(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})...(x_j - x_n)}.$$

Отже, коефіцієнти $l_j(x)$ інтерполяційного многочлена знаходять за формулою

$$\boxed{l_j(x) = \frac{(x - x_0)...(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})...(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)...(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})...(x_j - x_n)} = \frac{\prod\limits_{k\neq j}(x - x_k)}{\prod\limits_{k\neq j}(x_j - x_k)}.}$$

Коефіцієнти $l_j(x)$ можна записати також в іншому вигляді. Розгляньмо допоміжний многочлен $(n+1)$-го степеня

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_j)...(x - x_n)$$

і обчислімо його похідну в точці x_j:

$$\omega'(x_j) = (x_j - x_0)...(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})...(x_j - x_n).$$

Тоді дістаємо, що

$$\boxed{l_j(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_j)\omega'(x_j)}, \ \ j = \overline{0,n}.}$$

Отже, інтерполяційний многочлен Лаґранжа має вигляд

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\prod\limits_{k\neq j}(x - x_k)}{\prod\limits_{k\neq j}(x_j - x_k)} f_j = \sum_{j=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_j)\omega'(x_j)} f_j.$$

4. Приміром, побудуємо інтерполяційний многочлен Лаґранжа за даними.

i	0	1	2	3
x_i	0	2	3	5
f_i	1	3	2	5

Згідно з формулою для інтерполяційного многочлена Лаґранжа для $n = 3$ маємо

$$L_3(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)}\cdot 1+\frac{x(x-3)(x-5)}{2(2-3)(2-5)}\cdot 3+$$
$$+\frac{x(x-2)(x-5)}{2(3-2)(3-5)}\cdot 2+\frac{x(x-2)(x-3)}{5(5-2)(5-3)}\cdot 5=$$
$$=\frac{3}{10}x^3-\frac{13}{6}x^2+\frac{62}{15}x+1.$$

4. Інтерполяційний многочлен Лаґранжа з рівновіддаленими вузлами. Інтерполяційний многочлен Лаґранжа спрощується, якщо вузли інтерполяції рівновіддалені, тобто величина

$$h=x_{i+1}-x_i,$$

яку називають *кроком інтерполяції*, стала.

У цьому випадку вузол $x_i=x_0+ih, i=\overline{0,n}$. Позначмо

$$t=\frac{x-x_0}{h}.$$

Тоді

$$x-x_i=x_0+th-x_0-ih=(t-i)h;$$
$$\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)=$$
$$=th(t-1)h\ldots(t-n)h=t(t-1)\ldots(t-n)h^{n+1}.$$

Оскільки $x_j-x_i=(x_0+jh)-(x_0+ih)=(j-i)h$, то

$$\omega'(x_j)=jh(j-1)h\ldots(j-j+1)h(j-j-1)h\ldots(j-n)h=$$
$$=h^n j(j-1)\ldots 2\cdot 1(-1)(-2)\ldots(j-n)=h^n j!(-1)^{n-j}(n-j)!.$$

Ураховуючи формули для інтерполяційного многочлена Лаґранжа маємо

$$L_n(x)=L_n(x_0+ht)=\sum_{j=0}^{n}\frac{t(t-1)\ldots(t-n)h^{n+1}}{(t-j))h\cdot h^n j!(-1)^{n-j}(n-j)!}f_j=$$
$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n-j}f_j}{j!(n-j)!}t(t-1)\ldots(t-j+1)(t-j-1)(t-n).$$

3.3. Інтерполяційний многочлен Ньютона

1. Розділені різниці. Інтерполяційний многочлен Ньютона є різницевим аналогом многочлена Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Нехай в n різних точках $x_k \in [a;b], k = \overline{0,n}$, відомі значення функції f. Розділеними різницями 1-го порядку називають відношення

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}, \; i, j = \overline{0,n}, \; i \neq j.$$

Розглядатимемо розділені різниці, які складено за сусідніми вузлами, тобто вирази $f(x_0, x_1), f(x_1, x_2), ..., f(x_{n-1}, x_n)$.

За цими розділеними різницями 1-го порядку можна побудувати розділені різниці 2-го порядку

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0},$$
$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_{n-1}, x_n) - f(x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}},$$

Так само означують розділені різниці вищих порядків. Приміром, якщо відомі різниці k-го порядку

$$f(x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k}), f(x_{j+1}, x_{j+2}, ..., x_{j+k+1}),$$

то розділену різницю $(k+1)$-го порядку означують як

$$f(x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k}, x_{j+k+1}) =$$
$$= \frac{f(x_{j+1}, x_{j+2}, ..., x_{j+k+1}) - f(x_j, x_{j+1}, ..., x_{j+k})}{x_{j+k+1} - x_j}.$$

Під час обчислиння значення роділених різниць записують до таблиці

x_0	$f(x_0)$				
		$f(x_0, x_1)$			
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0, x_1, x_2)$		
		$f(x_1, x_2)$	$\cdot$		
x_2	$f(x_2)$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$f(x_0, x_1, \dots x_n)$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$		
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$		
$\cdot$	$\cdot$	$f(x_{n-1}, x_n)$			
x_n	$f(x_n)$				

Розділену різницю k-го порядку можна виразити через значення функції у вузлах:

$$f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}) = \sum_{i=j}^{j+k} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{l \neq i \\ l=j}}^{j+k} (x_i - x_l)}.$$

Зокрема,

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}.$$

2. Інтерполяційним многочленом Ньютона називають многочлен

$$N_n(x) = f(x_0) + f(x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots$$
$$+ \dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n).$$

Роль точки x_0 може відігравати будь-який вузол інтерполяції. Якщо вузли інтерполяції строго зростають, то формулу інтерполяції Ньютона називають інтерполюванням уперед, а якщо вузли інтерполяції строго спадають — формулою інтерполювання назад.

Можна показати, що многочлен $N_n(x)$ тотожно дорівнює многочлену Лаґранжа $L_n(x)$.

В інтерполяційному многочлені Лаґранжа видно його явну залежність від кожного значення функції $f_i, i = \overline{0, n}$. Однак при зміні n інтерполяційний многочлен Лаґранжа доводиться будувати спочатку. В цьому полягає його недолік.

Інтерполяційний многочлен Ньютона виражається не через значення функції f, а через її розділені різниці. При зміні степеня n в інтерполяційного многочлена Ньютона доводиться тільки додати або відкинути відповідну кількість стандартних доданків.

4. Скінченні різниці. Нехай $x_k = x_0 + kh$, де k — ціле, $h > 0$, $f_k = f(x_k)$. Скінченною різницею 1-го порядку функції f у точці x_k (з кроком h) називають вираз

$$\Delta f_k = f(x_k + h) - f(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k) = f_{k+1} - f_k.$$

Скінченною різницею 2-го порядку функції f у точці x_k називають вираз

$$\Delta^2 f_k = \Delta(\Delta f_k) =$$
$$= \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = (f_{k+2} - f_{k+1}) - (f_{k+1} - f_k) = f_k - 2f_{k+1} + f_{k+2}.$$

Скінченною різницею n-го порядку функції f у точці x_k називають вираз

$$\Delta^n f_k = \Delta(\Delta^{n-1} f_k) = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k,$$

де $n \geq 1, \Delta^0 f_k = f_k$.

Якщо $x_k = x_0 + kh, k = \overline{0,n}$, то між розділеної і скінченною різницею n-го порядку правдиве співвідношення:

$$\boxed{f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}.}$$

5. Інтерполяційний многочлен Ньютона з рівновіддаленими вузлами. Нехай $x_k = x_0 + kh, h > 0, k = \overline{0,n}, f_k = f(x_k)$. Тоді,ураховуючи зв'язок розділеної та скінченної різниці і позначаючи

$$t = \frac{x - x_0}{h},$$

інтерполяційний многочлен Ньютона можна переписати у вигляді

$$N_n(x) = N_n(x_0 + th) =$$
$$= f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!} t + \frac{\Delta^2 f_0}{2!} t(t-1) + \ldots + \frac{\Delta^n f_0}{n!} t(t-1)\ldots(t-n+1).$$

3.4. Оцінка похибка інтерполювання

1. Значення інтерполяційного многочлена Лаґранжа у вузлах інтерполяції за означенням дорівнює значення інтерпольовуваної функції. Якщо інтерпольовувана функція — многочлен, степень якого не перевищує n, то інтерполяційний многочлен тотожно дорівнює їй у всіх точках відрізка інтерполяції.

2. Якщо ж інтерпольовувана функція не є многочленом, то при $x \neq x_j$ вже $L_n(x) \neq f(x)$ і виникає питання про якість інтерполяції, тобто наскільки може великою різниця між значеннями інтерполяційного многочлена й інтерпольовуваної функції.

Нехай $L_n(x)$ — інтерполяційний многочлен. Величину

$$r_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

називають *похибкою інтерполювання*. Якщо функцію f задано лише тільки своїми значеннями f_i у вузлах інтерполювання $x_i, i = \overline{0,n}$, то відносно $r_n(x)$ нічого сказати не можна.

3. Дістаньмо оцінку похибки інтерполювання, вважаючи, що f — $(n+1)$-раз неперервно диференційовна функція на відрізку $[a;b]$, де $x_i, x \in [a;b], x \neq x_i$. Розгляньмо функцію

$$F(t) = f(t) - L_n(t) - C\omega(t),$$

де C вибираємо з умови

$$C = \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega(x)} = \frac{r_n(x)}{\omega(x)}.$$

Оскільки $F(x_i) = 0, i = \overline{0,n}$ та $F(x) = 0$, то функція $F(t)$ має на відрізку $[a;b]$ $(n+2)$ різних нулів. Тоді після повторного застосування теореми Роля дістаємо, що похідна $F^{(n+1)}(t)$ має принаймні один корінь c, який лежить у найменшому інтервалі, який містить точки $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$, тобто $F^{(n+1)}(c) = 0$.

Але

$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - L_n^{(n+1)}(t) - C\omega^{(n+1)}(t),$$

де $L_n^{(n+1)}(t) = 0, \omega^{(n+1)}(t) = (n+1)!$. Тому

$$F^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - C(n+1)! = 0.$$

Звідки маємо, що

$$\boxed{r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\omega(x).}$$

Якщо відома верхня межа

$$M_{n+1} = \sup_{x\in[a;b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|,$$

то правдива рівномірна оцінка

$$\left| r_n(x) \right| \le \frac{M_{n+1}\left|\omega(x)\right|}{(n+1)!} \quad \forall x \in [a;b].$$

3.5. Окремі випадки інтерполювання

1. Лінійна інтерполяція. Інтерполяцію при $n = 1$ називають *лінійною*, оскільки у цьому випадку інтерполяційний многочлен є лінійною функцією:

$$L_1(x) = f_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f_0 =$$
$$= a_0 x + a_1.$$

Геометрично лінійна інтерполяція функції f означає заміну її графіка відрізком прямої лінії, що з'єднує точки $(x_0; f_0)$ та $(x_1; f_1)$.

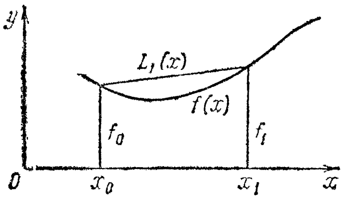

Рис. 3.2. Лінійна інтерполяція

Для лінійної інтерполяції функції $f \in C^2[a;b]$, похибка інтерполювання визначає співвідношення

$$r_1(x) = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)(x - x_1).$$

Знайдімо найбільшу можливу похибку при лінійній інтерполяції. Позначмо $x - x_0 = h$. Оскільки для функції

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

стаціонарною точкою є сердина відрізка $[x_0; x_1]$, тобто точка $\dfrac{x_0 + x_1}{2}$, то

$$\max_{x \in [x_0; x_1]} \left|\omega(x)\right| = \max_{x \in [x_0; x_1]} \left|(x - x_0)(x - x_1)\right| = \frac{h^2}{4}.$$

Отже,

$$\left|r_1(x)\right| \le \frac{M_2}{8} h^2,$$

де $M_2 = \max\limits_{x \in [x_0; x_1]} \left|f''(x)\right|$.

2. Інтерполяцію при $n = 2$ називають квадратичною, оскільки для цього випадку інтерполяційний многочлен є квадратичною функцією

$$L_2(x) = f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} =$$
$$= a_0 x^2 + a_1 x + a_2.$$

Геометрично квадратична інтерполяція функції f з вузлами x_0, x_1 та x_2 означає заміну її графіка параболічною кривою, що проходить через точки $(x_0; f_0), (x_1; f_1)$ та $(x_2; f_2)$.

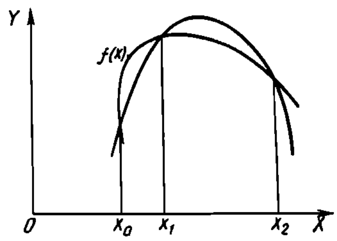

Рис. 3.3. Квадратична інтерполяція

Похибка квадратичної інтерполяції для функції $f \in C^3[a;b]$ дорівнює

$$r_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).$$

Якщо вузли інтерполяції рівновіддалені, то

$$\left| t\left(t - \frac{1}{2}\right)(t-1) \right| \le \frac{\sqrt{3}}{36} \quad \forall t \in [0;1]$$

та

$$\left| r_2(x) \right| \le \frac{M_3 (b-a)^3}{216} \sqrt{3}.$$

3.6. Мінімізація оцінки похибки інтерполяції

1. Нехай задано деяку функцію $f \in C^{n+1}[a;b]$. Виникає питання, як вибрати на відрізку $[a;b]$ вузли $x_0, x_1, \ldots, x_n$ інтерполяційного многочлена, щоб максимальна похибка інтерполяції функції f на цьому відрізку була мінімальною.

Цю задачу вдається розв'язати тільки для деяких функцій f. Простішою є задача розташування вузлів інтерполяції $x_i, i = \overline{0,n}$, на відрізку $[a;b]$, при якому мінімальна величина $\max\limits_{x \in [a;b]} \left| \omega(x) \right|$.

2. Многочлени Чебишова. Многочлени Чебишова $T_n(x), n \ge 0$, на відрізку $[-1;1]$ можна задати формулою

$$\boxed{T_n(x) = \cos(n \arccos x).}$$

Зокрема, при $n = 0$ та $n = 1$ маємо

$$T_0(x) = \cos(0 \arccos x) = 1;$$
$$T_1(x) = \cos(\arccos x) = x.$$

З тотожності

$$\cos(n+1)\varphi = 2\cos\varphi\cos n\varphi - \cos(n-1)\varphi,$$

покладаючи $\varphi = \arccos x$, дістаємо рекурентне співвідношення для многочленів Чебишова

$$\boxed{T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),}$$

де $n = 1,2,\ldots$. Отже, $T_n(x)$ справді є алгебричним многочленом степеня $n \geq 0$.

Покладаючи $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$ на всій осі і поширюючи рекурентне співвідношення на всю вісь можна, зокрема, одержати:

$$T_2(x) = 2x^2 - 1; \qquad T_3(x) = 4x^3 - 3x;$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \quad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \ldots$$

3. Многочлени Чебишова мають властивості:

1) при парному (непарному) n многочлен $T_n(x)$ містить тільки парні (непарні) степені, тобто є парною (непарною) функцією;

2) старший коефіцієнт многочлена $T_n(x)$ при $n \geq 1$ дорівнює 2^{n-1};

3) $T_n(x)$ має n дійсних коренів в інтервалі $(-1;1)$, які можна виразити формулою

$$x_i = \cos\frac{(2i+1)\pi}{2n}, \quad i = \overline{0, n-1};$$

4) $\max\limits_{x\in[-1;1]} \left|T_n(x)\right| = 1$, причому

$$T_n\left(\cos\frac{m\pi}{n}\right) = (-1)^m, \quad m = \overline{0, n};$$

5) многочлен

$$\bar{T}_n(x) = 2^{1-n}T_n(x), n \geq 1,$$

серед усіх многочленів n-го степеня із старшим коефіцієнтом, рівним одиниці, має на відрізку $[-1;1]$ найменше значення максимуму модуля (найменше відхиляється від нуля).

4. Вузли, які мінімізують оцінку похибки інтерполяції. Візьмімо на відрізку $[-1;1]$ за вузли інтерполяції корені многочлена Чебишова $T_{n+1}(x)$, тобто точки

$$x_i = \cos\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}, \quad i = \overline{0,n}.$$

Тоді за властивістю 2

$$\omega(x) = 2^{-n} T_{n+1}(x).$$

При цьому за властивістю 4 оцінка похибки інтерполяції

$$\max_{x\in[-1;1]} \left| r_n(x) \right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!\,2^n},$$

де $M_{n+1} = \max\limits_{x\in[-1;1]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$.

Завдяки властивості 5 многочленів Чебишова цю оцінку покращити на відрізку $[-1;1]$ за рахунок іншого вибору вузлів інтерполяції не можна. Більш того для будь-якого іншого вибору вузлів, які не збігаються з нулями многочленів Чебишова, відповідна оцінка максимальної похибки інтерполяції буде гірше.

5. У разі інтерполювання на довільному відрізку $[a;b]$ лінійною заміною аргументу

$$x = \frac{1}{2}((b-a)t + b + a, \;\; t = \frac{2x-b-a}{b-a}$$

його можна перевести у відрізок $[-1;1]$. Кореням многочлена Чебишова $T_{n+1}(t)$ відповідають точки

$$x_i = \frac{1}{2}\left((b-a)\cos\frac{(2i+1)\pi}{2n+2} + b + a \right), \;\; i = \overline{0,n},$$

відрізка $[a;b]$, які є оптимальними вузлами для оцінки похибки на цьому відрізку.

Можна показати, що

$$\omega(x) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}} \overline{T}_{n+1}(t);$$

$$\max_{x\in[a;b]} \left| \omega(x) \right| = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}} \max_{x\in[-1;1]} \left| \overline{T}_{n+1}(t) \right| = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}};$$

$$\max_{x\in[-1;1]} \left| r_n(x) \right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}},$$

де $M_{n+1} = \max\limits_{x\in[-1;1]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$.

6. Порівняймо способи апроксимації функції $f \in C^{n+1}[a;b]$ многочленом Тейлора $\tilde{P}_n(x)$ й інтерполяційним многочленом $L_n(x)$ з вузлами в нулях многочлена Чебишова. Для побудови многочлена Тейлора доцільно взяти точку $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$.

Тоді оцінка максимальної похибки многочлена Тейлора буде наступною

$$\max_{x\in[a;b]}\left|r_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

Отже, оцінка похибк многочлена Тейлора в 2^n разів більше оцінки похибки інтерполяційного многочлена Лаґранжа $L_n(x)$ з оптимальними вузлами.

Похибка інтерполяційного многочлена рівномірніше розподілена на відрізку $[a;b]$, ніж у многочлена Тейлора, який має істотно нерівномірну похибку. Тому не тільки оцінка похибки, але зазвичай фактична максимальна похибка інтерполяційного многочлена на всьому відрізку $[a;b]$ менше, ніж у многочлена Тейлора.