ЛЕКЦІЯ 4. ІНТЕРПОЛЮВАННЯ СПЛАЙНАМИ

Інтерполювання многочленом Лаґранжа або Ньютона на всьому відрізку $[a;b]$ з використанням великої кількості вузлів інтерполяції часто приводить до поганого наближення, яке можна пояснити сильними накопиченням похибок під час обчислень. Крім того, через розбіжність процесу інтерполяції збільшення кількості вузлів не обов'язково приводить до підвищення точності.

4.1. Сплайни

1. Для того, щоб уникнути великих похибок, відрізок $[a;b]$ розбивають на елементи і на кожному елементі відрізка наближено замінюють функцію f многочленом невисокого степеня (кусково-поліноміальна інтерполяція).

Одним із способів інтерполювання на всьому відрізку є інтерполювання за допомогою сплайн-функцій.

2. Про збіжність інтерполяційного процесу. Виникає питання, чи буде прямувати до нуля похибка інтерполювання $f(x) - L_n(x)$, якщо кількість вузлів n необмежено збільшувати. Відповідь, узагалі кажучи, негативна.

Розглядатимемо множини точок розбиття відрізка $[a;b]$ на елементи $a \le x_0 < x_1 < ... < x_n \le b$:

$$\Omega_0 = \{x_0^{(0)}\},\ \Omega_1 = \{x_0^{(1)}, x_1^{(1)}\}, ..., \Omega_n = \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, ..., x_n^{(n)}\}, ...$$

Нехай функція f означена й неперервна на відрізку $[a;b]$. Тоді можна задати послідовність інтерполяційних многочленів $L_n[f(x)]$, побудованих для функції f за її значеннями у вузлах розбиття Ω_n.

Кажуть, що інтерполяційний процес для функції f *збігається* в точці $x^* \in [a;b]$, якщо існує

$$\lim_{n\to\infty} L_n[f(x^*)] = f(x^*).$$

Властивість збіжності або розбіжності інтерполяційного процесу залежить як від вибору послідовності розбиттів, так і від гладкості функції f.

Приміром, послідовність інтерполяційних многочлені побудованих для неперервної функції $f(x) = |x|$ за рівновіддаленими вузлами на відрізку $[-1;1]$, не збігається до функції $|x|$ у жодній точці відрізка $[-1;1]$, окрім точок $-1, 0, 1$.

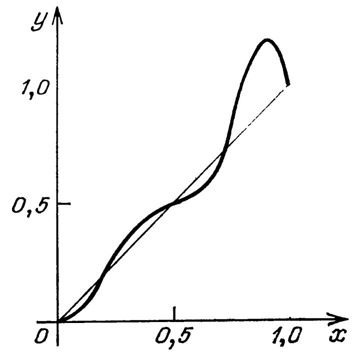

Рис. 4.1. Графік інтерполяційного многочлена $L_9(x)$ для $f(x) = |x|$

2. Нехай на відрізку $[a;b]$ задано точки $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, які розбивають цей відрізок на n елементів.

Функцію $S(x)$, означеному на цьому відрізку, називають *сплайном порядку* r, якщо на кожному елементі $[x_i; x_{i+1}]$ розбиття відрізка $[a;b]$ вона є многочленом степеня не вище за r. У точках $x_j, j = \overline{1, n-1}$, ці многочлени певним чином «склеюють», при цьому якість склейки регулюють дефектом сплайна: сплайн має *дефект* q, якщо в кожній з точок спряження у функції $S(x)$ існує не менше, ніж $r - q$ неперервних похідних.

4.2. Сплайни порядку 1 дефекту 1

Розгляньмо сплайн 1-го порядку дефекту 1 — кусково-лінійну на проміжку $[a;b]$ функцію, із заломами у вузлах $x_j, j = \overline{1, n-1}$.

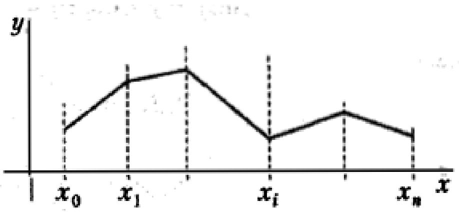

Рис. 4.2. Сплайн 1-го порядку дефекту 1

Оскільки на кожному елементі розбиття $[x_i; x_{i+1}]$ лінійна функція однозначно визначена своїми значеннями на кінцях, задача інтерполяції функції f за її значеннями у вузлах $x_j, j = \overline{0,n},$ однозначно розв'язна.

Розгляньмо «одиничні» інтерполяційні функції

$$s_i(x), i = \overline{0,n},$$

які справджують умови

$$s_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Можна переконатись, що функції $s_i(x)$ задано співвідношеннями

$$s_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}; x_i] \\ \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & x \in [x_i; x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}; x_{i+1}] \end{cases}$$

для всіх внутрішніх вузлів $i = \overline{1, n-1}$ і співвідношеннями

$$s_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_1 - x_0}, & x \in [x_0; x_1], \\ 0, & c \notin [x_0; x_1], \end{cases} \quad s_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x \in [x_{n-1}; x_n], \\ 0, & x \notin [x_{n-1}; x_n] \end{cases}$$

для крайніх вузлів.

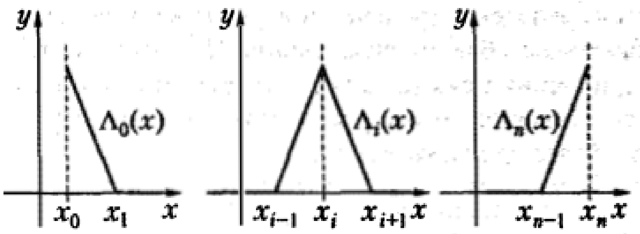

Рис. 4.3. Графіки одиничних функцій

Сплайн $S_1^1(x)$, який набуває в точках $x_j, j = \overline{0,n},$ задані значення f_j, можна подати у вигляді

$$S_1^1(x) = \sum_{j=0}^{n} s_j(x) f_j.$$

Точність інтерполяції гладкої функції f кусково-лінійною функцією $S_1^1(x)$ не гірше, ніж

$$\varepsilon = M\frac{h^2}{8},$$

де $h = \max\limits_{i}\left|x_{i+1} - x_i\right|, M_1 = \max\limits_{x\in[a;b]}\left|f'(x)\right|$.

4.3. Сплайни 3-го порядку

1. Функція $S_3^2(x)$ є сплайном 3-го порядку, якщо на кожному елементі розбиття збігається з деяким многочленом не вище, ніж 3-го степеня. У сплайнах 3-го порядку дефект 2 означає, що в точках x_j склейки двох різних многочленів у них спільна дотична.

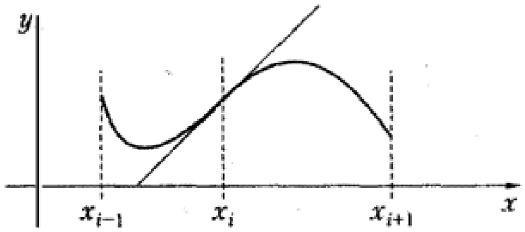

Рис. 4.4. Сплайн 3-го порядку дефекту 2

Сплайни 3-го порядку дефекту 2 є природнім апаратом для розв'язання задачі інтерполяції функції разом зі значеннями її похідної. Можна довести, що якщо на проміжку $[x_i;x_{i+1}]$ задано довільну гладку функцію f, то існує єдиний многочлен, степінь якого не перевищує третій, який набуває на кінцях відрізка ті самі значення, що й функція f, і похідна якого на кінцях відрізку набуває ті самі значення, що й похідна f'.

2. Нехай відрізок $[a;b]$ розбитий на n рівних елементів $[x_i;x_{i+1}]$, де

$$x_i = a + ih, i = \overline{0, n-1}, x_n = b, h = \frac{b-a}{n}.$$

Можна переконатись, що існує єдиний кубічний сплайн на відрізку $[x_i;x_{i+1}]$ вигляду

$$S_3(x) = \frac{(x_{i+1}-x)^2(2(x-x_i)+h)}{h^3}f_i + \frac{(x-x_i)^2(2(x_{i+1}-x)+h)}{h^3}f_{i+1} + \\ + \frac{(x_{i+1}-x)^2(x-x_i)}{h^2}m_i + \frac{(x-x_i)^2(x-x_{i+1})}{h^2}m_{i+1}, \tag{4.1}$$

який справджує умови:

$$S_3(x_i) = f_i, S_3(x_{i+1}) = f_{i+1}, S_3'(x_i) = m_i, S_3'(x_{i+1}) = m_{i+1}.$$

Отже, щоб задати кубічний сплайн $S_3(x)$ на всьому відрізку $[a;b]$, треба задати в $n+1$ вузлі x_i його значення та нахили $m_i, i=\overline{0,n}$.

3. Способи задання нахилів інтерполяційного сплайна.

I (спрощений спосіб). Покладаємо

$$m_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, \ \ i = \overline{1, n-1},$$
$$m_0 = \frac{4f_1 - f_2 - 3f_0}{2h}, m_n = \frac{3f_n + f_{n-2} - 4f_{n-2}}{2h}.$$

II. Якщо відомі значення f_i' похідної f' у вузлах x_i, то покладаємо

$$m_i = f_i', i = \overline{0,n}.$$

Способи I та II називають *локальними*, оскільки за їх допомогою на кожному елементі розбиття $[x_i;x_{i+1}]$ сплайн будують окремо. При цьому маємо неперервність похідної $S_3'(x)$ у вузлах. Неперервність другої похідної $S_3''(x)$ у вузлах сплайна, побудованого за I чи II способом не гарантовано. Тому дефект такого сплайна зазвичай дорівнює 2.

III (глобальний спосіб). Позначимо через $S_3''(x_i+0)$ значення $S_3''(x)$ у вузлі x_i справа, знайдене безпосереднє з формули (4.1), а через $S_3''(x_i-0)$ значення $S_3''(x)$ у вузлі x_i зліва, тобто знайдене з відповідного виразу $S_3(x)$ на елементі розбиття $[x_{i-1};x_i]$.

Маємо

$$S''(x_i+0) = -\frac{4m_i}{h} - \frac{2m_{i+1}}{h} + 6\frac{f_{i+1} - f_i}{h^2},$$
$$S''(x_i-0) = \frac{2m_{i-1}}{h} + \frac{4m_i}{h} - 6\frac{f_i - f_{i-1}}{h^2}.$$

Вимагаючи неперервність $S''(x)$ у вузлах:

$$S_3''(x_i-0) = S_3''(x_i+0), \ \ i = \overline{1, n-1}.$$

приходимо до системи лінійних алгебричних рівнянь щодо нахилів:

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = \frac{3(f_{i+1} - f_{i-1})}{h}, \ i = \overline{1, n-1}.$$

Оскільки невідомих $n+1$, то треба задати ще 2 умови, які називають крайовими. Приміром, якщо відомі $f_0' = f'(a), f_n' = f'(b)$, то задаємо

$$m_0 = f_0', m_n = f_n'.$$

Можна задавати й інші умови.

4. Приміром, інтерполюємо функцію $f(x) = x^4$ на відрізку $[-1;1]$ кубічним сплайном $g(x)$ з вузлами $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ і крайовими умовами $g'(-1) = f'(-1), g'(1) = f'(1)$.

Маємо

$$n = 2, h = 1,$$
$$f_0 = f(-1) = 1, f_1 = f(0) = 0, f_2 = f(1) = 1;$$
$$f'(x) = 4x^3, f'(-1) = m_0 = -4, f'(1) = m_2 = 4.$$

Для нахилів маємо 1 рівняння

$$m_0 + 4m_1 + m_2 = 3(f_2 - f_0) \Rightarrow m_1 = 0.$$

Отже,

$$g(x) = \begin{cases} 1 - 4(x+1) + 5(x+1)^2 - 2(x+1)^3 = -x^2 - 2x^3, & -1 \le x \le 0, \\ -x^2 + 2x^3, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

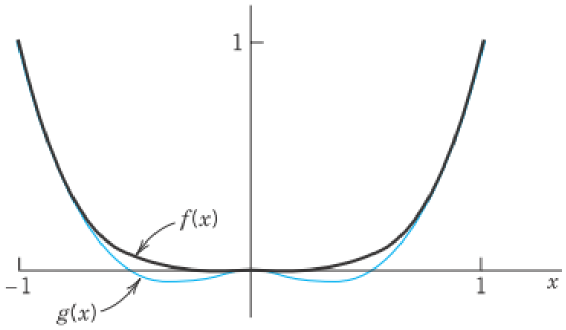

Рис. 4.5. Функція f та кубічний сплайн g

4. Кубічний інтерполяційний сплайн достатньо добре наближає гладкі функції разом і кількома похідними.

Якщо $f \in C^{k+1}[a;b], 0 \le k \le 3$, то інтерполяційний сплайн $S_3(x)$ з нахилами, які задано способом II чи III, справджують нерівність

$$\max_{x \in [x_i;x_{i+1}]} \left| f^{(m)}(x) - S_3^{(m)}(x) \right| \le ch^{k+1-m} \max_{x \in [a;b]} \left| f^{(k+1)}(x) \right|,$$

де $i = \overline{0, n-1}, m = \overline{0, k}$, c — стала, що не залежить від h, i, f.

5. Якщо функція f неперервно диференційовна на всій дійсній осі $k+1$ раз, $0 \le k \le 3$, і має період, що дорівнює $b - a$, то треба покласти $m_0 = m_n$ і приєднати умову

$$m_{n-1} + 4m_0 + m_1 = \frac{3(f_1 - f_{n-1})}{h}.$$

6. Сплайни є зручнішим засобом апроксимації функції на великих проміжках (при великих n), ніж, інтерполяційні многочлени. Апроксимація функції на великому проміжку одним многочленом може вимагати для досягнення заданої точності значного збільшення його степеня, що не є прийнятним.

Розбиття заданого відрізка $[a;b]$ на декілька частин з побудовою на кожній частині свого інтерполяційного многочлена незручно тим, що на стиках буде розривною перша похідна двох сусідніх інтерполяційних многочленів.

Можливо, навіть, значення на стиках цих многочленів будуть різні, якщо точка стику не буде їх спільним вузлом.

Тоді як кубічний сплайн $S_3(x)$, нахили якого знайдено глобальним способом, двічі неперервно диференційовна функція на всьому відрізку $[a;b]$.

Точність апроксимації функції f сплайном $S_3(x)$ визначається вибором n, тобт кроком

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

4.4. Інші приклади інтерполяції

Не будь-яку функцію доцільно наближати алгебричними многочленами.

1. Інтерполяція тригонометричними многочленами. Якщо функція f — періодична функція з періодом $2l$, то природньо будувати наближення за допомогою функцій

$$\varphi_k(x) = a_k \cos\frac{\pi kx}{l} + b_k \sin\frac{\pi kx}{l},\ \ k = 0,1,\ldots n.$$

Отже, тригонометрична інтерполяція полягає в заміні функції f тригонометричним многочленом

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\varphi_k(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos\frac{\pi kx}{l} + b_k \sin\frac{\pi kx}{l}\right),$$

коефіцієнти якого можна знайти із системи рівнянь

$$T_n(x_j) = f(x_j),\ \ k = 1,2,\ldots,2n+1,$$

де $x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n+1}, x_{2n+1} - x_0 = 2l.$

Широкі можливості тригонометричної інтерполяції випливають з того, що зі зростанням n многочлен $T_n(x)$ апроксимує f зі зростаючою точністю, тобто

$$\sup_{x\in[0;2l]}\left|f(x)-T_n(x)\right|\to 0,\ n\to\infty.$$

Це твердження правдиве для досить широкого класу функцій. Цим тригонометрична інтерполяція істотно відрізняється від алгебричної інтерполяції для рівновіддалених вузлів. Для алгебричної інтерполяції різниця між функцією і її інтерполяційним многочленом може бути як завгодно великою скрізь, окрім вузлів інтерполяції. Тригонометричне інтерполювання не має цього недоліку.

2. Наближення раціональними функціями. Нехай значення функції f задано в точках $x_0 < x_1 < ... < x_n$. Треба побудувати функцію

$$\varphi_{kl}(x)=\frac{a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_0}{x^l+b_{l-1}x^{l-1}+...+b_0}$$

$(k,l$ — задано), для якої

$$\varphi_{kl}(x_j)=f(x_j),\ j=\overline{0,n}.\ (*)$$

Рівняння є системою з $n+1$ рівняння щодо $k+l+1$ невідомих $a_0,a_1,...,a_k,b_0,b_1,...,b_{l-1}$.

Вимагатимемо, щоб кількість рівнянь дорівнювала кількості невідомих, тобто $n=k+l$. Тоді дістаємо систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{i=0}^{k}a_ix_j^i-f_j\sum_{i=0}^{l-1}b_ix_j^i=f_jx_j^l,\ \ j=\overline{0,k+l}.$$

Використовуючи наближення за допомогою раціональних функцій, треба стежити за тим, щоб на відрізку інтерполювання знаменник не дорівнював нулеві. Іншою небезпекою є невдалий вибір вузлів інтерполювання, для якого чисельник поділиться без остачі на знаменник і функція виродиться у сталу.

3. Дробово-раціональна інтерполяція. Нехай значення функції f задано у трьох вузлах, а саме в точках x_{i-1},x_i,x_{i+1}, причому $x_{i-1}<x_i<x_{i+1}$. Побудуємо функцію

$$\varphi(x)=\frac{a_1x+a_0}{x+b_0},$$

для якої

$$\varphi(x_j)=f(x_j),j=i-1,i,i+1.$$

Ця задачає є окремим випадком раціональної інтерполяції, коли $k = l = 1$.

Дістаємо таку систему для коефіцієнтів:

$$a_0 + a_1 x_{i-1} - b_0 f_{i-1} = x_{i-1} f_{i-1},$$
$$a_0 + a_1 x_i - b_0 f_i = x_i f_i,$$
$$a_0 + a_1 x_{i+1} - b_0 f_{i+1} x_{i+1} f_{i+1}.$$

4.5. Наближення функції методом найменших квадратів

Інтерполяційний многочлен $P_n(x)$ наближено замінює функцію f на відрізку $[a;b]$, причому значення f в $n+1$ вузлах $x_i, i = \overline{0,n}$, збігається зі значеннями многочлена $P_n(x)$ степеня n в цих вузлах.

На практиці часто буває, що степень m многочлена $P_m(x)$ значно менший за кількість $n+1$ вузлів, і тому побудова такого апроксимувального інтерполяційного многочлена стає неможливою. Отже, апроксимування є загальнішим поняттям, ніж інтерполювання.

Вибір апроксимувального многочлена $P_m(x)$ для заданої функції f залежить від способу оцінки похибки.

Часто використовують оцінку похибки, що мінімізує суму квадратів відхилень значень функції $f_i = f(x_i), i = \overline{0,n}$, від значень $P_m(x_i)$ апроксимувального многочлена у вузлах апроксимації $x_i, i = \overline{0,n}$. Таку оцінку називають *оцінкою за методом найменших квадратів*.

Отже, при побудові апроксимувального многочлена

$$P_m(x) = a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

для функції f за методом найменших квадратів треба підібрати його коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_m, m < n$, щоб величина

$$S = S(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} (P_m(x_i) - f(x_i))^2$$

була якомога меншою.

Прирівнюючи до нуля частинні похідні за змінними a_i функції

$$S = \sum_{i=0}^{n} (a_0 x_i^m + a_1 x_i^{m-1} + \ldots + a_m - f_i)^2,\ f_i = f(x_i),$$

дістаємо систему $m+1$ рівнянь

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_0 x_i^m + a_1 x_i^{m-1} + ... + a_m - y_i) = 0, \ \ j = \overline{0, m}$$

з $m + 1$ невідомими $a_0, a_1, ..., a_m$. Перепишімо її у вигляді

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{2m}\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{2m-1}\right) a_1 + ... + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m}\right) a_m = \sum_{i=0}^{n} x_i^m y_i, \\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{2m-1}\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{2m-2}\right) a_1 + ... + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m-1}\right) a_m = \sum_{i=0}^{n} x_i^{m-1} y_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1}\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m}\right) a_1 + ... + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) a_m = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i, \\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m}\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m-1}\right) a_1 + ... + (n+1) a_m = \sum_{i=0}^{n} y_i. \end{cases} \tag{4.2}$$

Систему (4.2) називають *нормальною системою методу найменших квадратів*. Можна довести, що якщо всі вузли $x_0, x_1, ..., x_n$ різні та $m \le n$, то система (4.2) має єдиний розв'язок

$$a_0 = \hat{a}_0, a_1 = \hat{a}_1, ..., a_m = \hat{a}_m.$$

Числа $\hat{a}_i, i = \overline{0, m}$, мінімізують функцію $S(a_0, ..., a_m)$. Апроксимувальний многочлен має вигляд

$$P_m(x) = \hat{a}_0 x^m + \hat{a}_1 x^{m-1} + ... + \hat{a}_{m-1} x + \hat{a}_m.$$

Якщо $m = n$, то завдяки єдиності інтерполяційного многочлена дістаємо, що $P_n(x) = L_n(x)$, де $L_n(x)$ — інтерполяційний многочлен Лаґранжа.