

# ЛЕКЦІЯ 7. ПРЯМІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Прямими методами розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) називають ті, розв'язки яких можна напевно знайти (або з'ясувати їх несумісність) за скінченну кількість кроків. Найважливішими прямими методами є:

- 1) методи виключення;
- 2) методи розкладання.

## 7.1. Вступ

1. Для того щоб розв'язати систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР)

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = (a_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

її зводять до еквівалентної системи

$$U\vec{x} = \vec{b},$$

де  $U$  — верхня трикутна матриця. Потім, цю систему можна легко розв'язати за допомогою зворотної підстановки.

Позначимо початку СЛАР як

$$A^{(1)}\vec{x} = \vec{b}^{(1)},$$

де

$$A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})_{n \times n}, \vec{b}^{(1)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

2. *Крок 1.* Припускаємо, що  $a_{11}^{(1)} \neq 0$ . Рядкові множники обчислюють за формулами

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, i = 2, 3, \dots, n.$$

Їх використовуємо для виключення змінної  $x_1$  з рівнянь з 2-го по  $n$ -те.

Знаходимо

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(2)} &= a_{ij}^{(1)} - m_{i1}a_{1j}^{(1)}, \quad i, j = \overline{2, n}, \\ b_i^{(2)} &= b_i^{(1)} - m_{i1}b_1^{(1)}, \quad i = \overline{2, n}. \end{aligned}$$

Отже, перші рядки матриць  $A^{(1)}$  та  $b^{(1)}$  залишаємо без змін, перший стовпець матриці  $A$  нижче діагоналі стає нульовим.

Ми одержуємо систему  $A^{(2)}\vec{x} = \vec{b}^{(2)}$  вигляду

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Продовжуємо виключати решту змінних, перетворюючи решту матриці.

Крок  $k$  (загальний крок). Нехай  $1 \leq k \leq n - 1$ . Припустімо, що систему  $A^{(k)}\vec{x} = \vec{b}$  побудовано виключенням змінних  $x_1, \dots, x_{k-1}$  на попередніх кроках і матриця

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ \dots & & & \dots & & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(k)} & \dots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}$$

Знову, припустімо, що  $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ . Визначаємо рядкові множники за формулами

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad i = k + 1, k + 2, \dots, n.$$

Використаємо їх, щоб виключити змінні  $x_k$  з рівнянь з  $(k + 1)$ -го по  $n$ -те.

Одержуємо:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)}, \quad i, j = \overline{k + 1, n}, \\ b_i^{(k+1)} &= b_i^{(k)} - m_{ik}b_k^{(k)}, \quad i = \overline{k + 1, n}. \end{aligned}$$

Рядки з номерами від 1 до  $k$  залишаються без змін і після елементарних перетворень у  $k$ -му рядку з'являються нулі під елементом  $a_{kk}^{(k)}$ .

Після  $(n - 1)$  кроків дістаємо систему

$$A^{(n)}\vec{x} = \vec{b}^{(n)},$$

у вигляді:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \dots \\ b_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Нехай  $U = A^{(n)}$ ,  $\vec{g} = \vec{b}^{(n)}$ . Система

$$U\vec{x} = \vec{b}$$

з верхньою трикутною матрицею, яку можна легко розв'язати зворотною підстановкою, де

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{pmatrix}.$$

Отже, використовуючи метод виключення Гауса, ми одержуємо

$$\left( A \mid \vec{b} \right) \xrightarrow{\text{метод виключення Гауса}} \left( U \mid \vec{g} \right).$$

3. Зворотною підстановкою, спершу одержуємо

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} = \frac{g_n}{u_{nn}}$$

і потім визначаємо

$$\begin{aligned} x_r &= \frac{1}{a_{rr}^{(r)}} \left( b_r^{(r)} - \sum_{j=r+1}^n a_{rj}^{(r)} x_j \right), \quad r = n-1, n-2, \dots, 1; \\ &= \frac{1}{u_{rr}} \left( g_r - \sum_{j=r+1}^n u_{rj} x_j \right), \quad r = n-1, n-2, \dots, 1. \end{aligned}$$

На цьому завершується метод виключення Гауса.

4. Розв'яжімо СЛАР

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ -x_1 - 3x_2 = 2. \end{cases}$$

методом виключення Гауса.

○ Запишемо розширену матрицю системи:

$$(A|\vec{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

*Крок 1.*

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \vec{a}'_2 \leftarrow \vec{a}_2 - 2\vec{a}_1 \\ \vec{a}'_3 \leftarrow \vec{a}_3 + \vec{a}_1 \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

*Крок 2.*

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \vec{a}'_3 \leftarrow \vec{a}'_3 - \frac{1}{2}\vec{a}'_2 \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \end{array} \right).$$

Отже, починаючи з розширеної матриці  $(A|\vec{b})$ , після двох кроків методу виключень Гауса одержали розширену матрицю  $(U|\vec{g})$ , з верхньою трикутною матрицею  $U$ .

Цій перетвореній матриці відповідає система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_2 + x_3 = 3, \\ 0,5x_3 = 0,5. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему зворотною підстановкою:

$$\begin{cases} x_3 = 1, \\ x_2 = \frac{x_3 - 3}{2} = -1, \\ x_1 = -2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Отже,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \bullet$$

## 7.2. Метод Гауса з вибором лідера

1. На кожному  $k$ -му кроці методу виключень Гауса припускали, що  $a_{kk}^{(k)} \neq 0, k = 1, n$ .

Щоб зняти це обмеження, кожний крок виключення можна розпочинати з переставлення рядків, щоб одержати ненульовий елемент на позиції лідера — першого (зліва) ненульового елемента рядка. Якщо матриця  $A$  не вироджена, це завжди можливо. Однак, може трапитись, що лідер є дуже малим.

Щоб подолати цю ситуацію, а також, щоб уникнути накопичення похибок округлення, скористаємось *методом з вибором лідера*. Існує два типи вибору: частковий вибір та повний вибір.

У практичних обчисленнях, найчастіше використовують частковий вибір, оскільки повний вибір вимагає значних додаткових обчислень. З погляду часу на обчислення, повний вибір є дорожчим за частковий вибір.

**2. Частковий вибір.** Нехай на  $k$ -му кроці,  $1 \leq k \leq n - 1$ ,

$$\left| a_{i_0 k}^{(k)} \right| = \max_{k \leq 1 \leq n} \left| a_{ik}^{(k)} \right|.$$

Нехай  $i_0$  є найменшим номером рядка, для якого досягається максимум модуля. Якщо  $i_0 > k$ , спершу міняємо місцями рядки  $k$  та  $i_0$  в матрицях  $A^{(k)}$  та  $\vec{b}^{(k)}$  і потім виконуємо елементарні перетворення рядків  $k$ -го кроку. Усі множники рядків

$$\left| m_{ik} \right| \leq 1, \quad i = k + 1, k + 2, \dots, n.$$

Це допомагає запобігти зростанню елементів матриці  $A^{(k)}$  і одночасно виключає можливість великих втрат точності через накопичення похибок округлення.

Отже, на першій стадії виключення Гауса, у першому стовпці шукають найбільший за модулем елемент і вибирають його за лідера, переставляючи 1-ший рядок з рядком, що містить знайдений лідер. Потім виконують 1-й крок методу виключень Гауса. На 2-й стадії, у 2-му стовпці шукають найбільший за модулем елемент серед  $(n - 1)$  елементів (не розглядаючи 1-й елемент), і цей елемент вибирають за лідера,

переставляючи 2-й рядок з рядком, що містить знайдений лідер. Потім виконують 2-й крок методу виключень Гауса. Процес продовжують до тих пір, поки не одержують систему з верхньою трикутною матрицею

$$U\vec{x} = \vec{g}.$$

**3. Повний вибір.** У цьому процесі, за лідера 1-го рядка вибирають найбільший за модулем елемент матриці  $A$ ; за лідер 2-го рядка — найбільший за модулем елемент матриці  $A$  (за винятком 1-го рядка та 1-го стовпця) тощо. Потім знайдені лідери рядків ставлять на діагональні позиції міняючи місцями відповідні рядки і стовпці.

Нехай  $i_0$  та  $j_0$  найменші числа, для яких

$$\left| a_{i_0 j_0}^{(k)} \right| = \max_{k \leq i, j \leq n} \left| a_{ij}^{(k)} \right|$$

і потім переставляємо рядки  $k$  та  $i_0$  й стовпці  $k$  та  $j_0$ .

Під час переставлення рядків, останній стовпець розширеної матриці також розглядають, але не для вибирання лідерів. Оскільки переставлення стовпців також дозволено під час процесу, мінятиметься позиція елементів стовпця змінних  $\vec{x}$ . Після завершення процесу виключення елементи стовпця  $\vec{x}$  треба переставити у зворотному порядку.

4. Без часткового вибору, обчислювальна схема методу виключення Гауса може порушитись на певному кроці через рівність нулю лідера. Якщо ж на деякому кроці лідер рядка дорівнює нулю або є досить малим за модулем, то відповідний множник рядка буде чисельно великим, так, що після помноження рядка на цей коефіцієнт, одержимо чисельно великі похибки округлення і в результаті результати методу виключень Гауса матимуть значні похибки.

5. Загальними важливими чинниками оцінки якості чисельного методу є:

- 1) часова складність (оцінка кількості часу для завершення методу);
- 2) просторова складність (кількість місця для збереження даних);
- 3) ефект похибок округлення.

Кількість операцій, які потребує метод виключень Гауса для вели-

ких  $n$  наближено дорівнює  $\frac{n^3}{3}$ .

6. Розв'яжімо СЛАР

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 40. \end{cases}$$

методом виключень Гауса з частковим вибором лідера.

○ Записуємо розширену матрицю системи

$$(A|\vec{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & 4 & 13 \\ 3 & 4 & 5 & 40 \end{array} \right).$$

Крок 1.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & 4 & 13 \\ 3 & 4 & 5 & 40 \end{array} \right) \begin{array}{l} \vec{a}'_1 \leftarrow \vec{a}_3 \\ \vec{a}'_2 \leftarrow \vec{a}_2 \\ \vec{a}'_3 \leftarrow \vec{a}_1 \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 40 \\ 2 & -3 & 4 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \end{array} \right) \begin{array}{l} \vec{a}'_2 \leftarrow \vec{a}_2 - \frac{2}{3}\vec{a}'_1 \\ \vec{a}'_3 \leftarrow \vec{a}_3 - \frac{1}{3}\vec{a}'_1 \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 40 \\ 0 & -\frac{17}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{41}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{13}{3} \end{array} \right).$$

Крок 2.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 40 \\ 0 & -\frac{17}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{41}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{13}{3} \end{array} \right) \vec{a}_3 \leftarrow \vec{a}_3 - \frac{1}{17}\vec{a}_2 \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 5 & 40 \\ 0 & -\frac{17}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{41}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{17} & -\frac{60}{17} \end{array} \right)$$

Записуємо відповідну перетвореній розширеній матриці систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 40, \\ -\frac{17}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{41}{3}, \\ -\frac{12}{17}x_3 = -\frac{60}{17}. \end{cases}$$

Після зворотної підстановки:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 40, \\ -\frac{17}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = -\frac{41}{3}, \\ -\frac{12}{17}x_3 = -\frac{60}{17}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 5, \\ x_2 = \left( -\frac{2}{3}x_3 - \frac{41}{3} \right) : \left( -\frac{17}{3} \right) = 3, \\ x_1 = (40 - 4x_2 - 5x_3) : 3 = 1, \end{cases}$$

одержуємо

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}. \bullet$$

### 7.3. Метод Гауса – Йордана

1. Цей метод подібний до методу виключень Гауса з можливим частковим вибором лідера. У цьому методі змінні виключають і нижче від діагоналі, і вище. Отже, на місці матриці системи дістаємо або діагональну (іноді, навіть, одиничну) матрицю.

2. Загальний крок  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ). На  $k$ -му кроці виключення, частково вибираємо лідер. Потім, визначаємо

$$a_{kj}^{(k+1)} = \frac{a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad j = k, k+1, \dots, n.$$

$$b_j^{(k+1)} = \frac{b_k^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}.$$

Виключаючи змінну  $x_k$  з рівнянь, які стоять вище і нижче  $k$ -го рівняння, визначаємо

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k+1)},$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - a_{ik}^{(k)} b_k^{(k+1)}, \quad i = \overline{1, n} \quad (i \neq k).$$

Ця процедура перетворює розширену матрицю  $(A|\vec{b})$  на матрицю  $(E_n|\vec{d})$ .

Отже, використовуючи метод Гауса — Йордана, дістаємо

$$(A|\vec{b}) \xrightarrow{\text{метод Гауса — Йордана}} (E_n|\vec{d}).$$

Тому розв'язок системи

$$x_i = d_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

3. Кількість операцій, які потребує метод виключень Гауса для великих  $n$  наближено дорівнює  $\frac{n^3}{2}$ .

4. Розв'яжімо методом Гауса — Йордана СЛАР:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

○ Записуємо розширену матрицю СЛАР.

$$(A|\vec{b}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right).$$

Оскільки змінних 3, то метод потребує 3-х кроків.

*Крок 1.*

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right) \vec{a}'_1 \leftarrow \frac{1}{2} \vec{a}_1 & \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0,5 & 1,5 \\ 3 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \vec{a}'_2 \leftarrow \vec{a}_3 - 3\vec{a}_1 \\ \vec{a}'_3 \leftarrow \vec{a}_3 - \vec{a}_1 \end{array} \sim \\ \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0,5 & 1,5 \\ 0 & -4 & -3,5 & -6,5 \\ 0 & -3 & 0,5 & 4,5 \end{array} \right) \end{aligned}$$

*Крок 2.*

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0,5 & 1,5 \\ 0 & -4 & -3,5 & -6,5 \\ 0 & -3 & 0,5 & 4,5 \end{array} \right) \vec{a}'_2 \leftarrow -\frac{1}{4} \vec{a}_2 & \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0,5 & 1,5 \\ 0 & 1 & 0,875 & 1,625 \\ 0 & -3 & 0,5 & 4,5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \vec{a}'_1 \leftarrow \vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 \\ \vec{a}'_3 \leftarrow \vec{a}_3 + 3\vec{a}_2 \end{array} \sim \\ \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1,25 & -1,75 \\ 0 & 1 & 0,875 & 1,625 \\ 0 & 0 & 3,125 & 9,375 \end{array} \right) \end{aligned}$$

*Крок 3.*

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1,25 & -1,75 \\ 0 & 1 & 0,875 & 1,625 \\ 0 & 0 & 3,125 & 9,375 \end{array} \right) \vec{a}'_3 \leftarrow \frac{8}{25} \vec{a}_3 & \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1,25 & -1,75 \\ 0 & 1 & 0,875 & 1,625 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \vec{a}'_1 \leftarrow \vec{a}_1 + 1,25\vec{a}_3 \\ \vec{a}'_2 \leftarrow \vec{a}_2 - 0,875\vec{a}_3 \end{array} \sim \\ \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отже, дістали розв'язок СЛАР методом Гауса — Йордана:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}. \bullet$$

**5. Обернення матриці методом Гауса — Йордана.** Щоб знайти обернену матрицю до матриці  $A$ , до матриці  $A_{n \times n}$  дописуємо праворуч одиничну матрицю  $E_n$  того самого порядку. Потім, уже з матриці  $(A|E_n)$  розміром  $n \times 2n$  методом Гауса — Йордана одержуємо матрицю  $(E_n|A^{-1})$ :

$$(A|E_n) \xrightarrow{\text{метод Гауса — Йордана}} (E_n|A^{-1}).$$

## 7.4. Метод LU-розкладання

1. Цей метод є модифікацією методу Гауса. Він ґрунтується на тому, що будь-яку квадратну матрицю можна подати як добуток верхньої і нижньої трикутної матриці, якщо всі головні мінори матриці  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  відмінні від нуля:

$$a_{11} \neq 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \dots, \det A = |A| \neq 0.$$

Якщо матрицю  $A$  можна факторизувати, то такий розклад єдиний.

Якщо можливо, цей метод розкладає матрицю  $A$  СЛАР  $A\vec{x} = \vec{b}$  на добуток нижньої трикутної матриці  $L$  і верхньої трикутної матриці  $U$  так, що

$$A = LU,$$

де

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{12} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тобто маємо

$$l_{i1}u_{1j} + l_{i2}u_{2j} + \dots + l_{in}u_{nj} = a_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n},$$

де

$$l_{ij} = 0, j > i, \quad u_{ij} = 0, i > j.$$

Отже, СЛАР  $A\vec{x} = \vec{b}$  стає

$$LU\vec{x} = \vec{b}. \quad (*)$$

2. Позначмо

$$U\vec{z} = \vec{z}.$$

Підставляючи це співвідношення в рівняння (\*), дістаємо

$$L\vec{z} = \vec{b}.$$

Значення змінних  $z_1, z_2, \dots, z_n$  одержуємо прямої підстановкою, а значення змінних  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — зворотною підстановкою.

Щоб визначити матриці  $L$  та  $U$  для методу  $LU$ -розкладання, використовують такі методи.

**3. Метод Дулітла.** Якщо вибираємо всі елементи головної діагоналі нижньої трикутної матриці  $L$  рівними 1,  $l_{ii} = 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ , то цей метод називають методом Дулітла, який реалізують за формулами:

$$\begin{aligned} l_{ii} &= 1, \\ u_{ii} &= a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{ki}, \\ u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, \quad i < j, \\ l_{ij} &= \frac{1}{u_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj} \right), \quad i > j. \end{aligned}$$

**4. Метод Краута.** Якщо вибираємо всі елементи головної діагоналі верхньої трикутної матриці  $U$  рівними 1,  $u_{ii} = 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ , то цей метод називають методом Краута, який реалізують за формулами:

$$\begin{aligned} u_{ii} &= 1, \\ l_{ii} &= a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{ki}, \\ l_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}, \quad i > j, \\ u_{ij} &= \frac{1}{l_{ii}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right), \quad i < j. \end{aligned}$$

Кількість операцій, які потребує метод Дулітла або метод Краута для великих  $n$  наближено дорівнює  $\frac{n^3}{2}$ .

**5. Розв'яжімо СЛАР**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

методом  $LU$ -розкладання

○ Скористаємось, скажімо, методом Дулітла. Згідно з яким, матрицю системи  $A$  розкладімо так:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{12} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{pmatrix}.$$

Отже, маємо

$$\begin{aligned} u_{11} &= 1, \quad u_{12} = 1, \quad u_{13} = 1, \\ l_{21}u_{11} &= 4, \quad l_{21}u_{12} + u_{22} = 3, \quad l_{21}u_{13} + u_{23} = -1, \\ l_{31}u_{11} &= 3, \quad l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 5, \quad l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 3. \end{aligned}$$

Розв'язуючи ці рівняння, дістаємо:

$$\begin{aligned} u_{11} &= u_{12} = u_{13} = 1, \\ l_{21} &= 4, \quad u_{22} = -1, \quad u_{23} = -5, \quad u_{33} = -10, \\ l_{31} &= 3, \quad l_{32} = -2. \end{aligned}$$

Тепер, використовуючи пряму підстановку, розв'яжімо СЛАР  $L\vec{z} = \vec{b}$ , тобто

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$z_1 = 1, z_2 = 2, z_3 = 5.$$

Розв'язуючи СЛАР  $U\vec{x} = \vec{z}$ , тобто

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

звратною підстановкою, дістаємо

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

**5. Метод Холецкого (метод квадратного кореня).** Нехай  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  — симетрична додатно визначена матриця порядку  $n$ . Тобто для будь-якого  $\vec{x} \neq \vec{0}$  виконано

$$\vec{x}A\vec{x} > 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j > 0.$$

Тоді існує нижня трикутна матриця  $L$  така, що

$$A = LL^T,$$

де  $L = (l_{ij})_{n \times n}$  та  $l_{ij} = 0, i < j$ .

Отже, СЛАР  $A\vec{x} = \vec{b}$  можна записати як

$$LL^T\vec{x} = \vec{b}.$$

Позначаючи

$$L^T\vec{x} = \vec{z},$$

маємо

$$L\vec{z} = \vec{b}.$$

Розв'язки  $z_i, i = \overline{1, n}$ , системи  $L\vec{z} = \vec{b}$  одержують прямою підстановкою, а розв'язки  $x_i, i = \overline{1, n}$ , системи

$$L\vec{z} = \vec{b}$$

— зворотною підстановкою.

Елементи нижньої трикутної матриці  $L$  знаходять за формулами:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}},$$

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}, \quad i = \overline{2, n},$$

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}^2}, \quad i = \overline{2, n},$$

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right), \quad i = j+1, \dots, n, j \geq 2 \text{ та } l_{ij} = 0, i < j.$$

Якщо матриця  $A$  симетрична, але не є додатно визначеною, цей метод також застосовний. Але в цьому випадку, матриця  $L$  має комплексні елементи, що непрактично.

Кількість операцій для методу Холецького наближено дорівнює  $\frac{n^3}{6}$  для великих  $n$ .

## 6. Розв'яжімо СЛАР

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 0, \\ 6x_1 + 34x_2 + 52x_3 = -160, \\ 8x_1 + 52x_2 + 129x_3 = -452 \end{cases}$$

методом Холецького.

○ Задана СЛАР має такий матричний вигляд:

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 34 & 52 \\ 8 & 52 & 129 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -160 \\ -452 \end{pmatrix}.$$

Матриця системи  $A$  симетрична. Розкладаємо матрицю

$$A = LL^T,$$

де  $L$  — нижня трикутна матриця 3-го порядку:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}.$$

Використовуючи формули методу Холецького, дістаємо

$$\begin{aligned} l_{11} &= 2, l_{21} = 3, l_{22} = 5, \\ l_{31} &= 4, l_{32} = 8, l_{33} = 7. \end{aligned}$$

Далі, розв'язуючи систему  $L\vec{z} = \vec{b}$ , тобто

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -160 \\ -452 \end{pmatrix}$$

прямою підстановкою, дістаємо  $z_1 = 0, z_2 = -32, z_3 = -28$ .

Нарешті, розв'язуємо систему  $L^T\vec{x} = \vec{z}$ , тобто

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -32 \\ -28 \end{pmatrix},$$

використовуючи зворотну підстановку:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}. \bullet$$