ЛЕКЦІЯ 8. ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Прямі методи дозволяють знайти розв'язки після заздалегідь відомої схеми обчислень. Навпаки, використовуючи непрямий або ітераційний метод, починають з наближення до справжнього розв'язку, і, якщо процес обчислення збігається, дістають послідовність наближених розв'язків, що стають усе ближче справжнього після кожного кроку до тих пір, поки не буде досягнута потрібна точність. Тому, в прямому методі кількість обчислень фіксована, але в ітераційному методі кількість обчислень залежить від заданої точності і змінюється від задачі до задачі.

Є сенс застосовувати ітераційні методи, які швидко збігаються, щоб одержати перевагу в кількості обчислень порівняно з прямими методами. Особливо ця перевага відчутно до систем з розрідженою матрицею, тобто матрицею, яка має велику кількість нульових елементів.

В ітераційних методах, процес починається з вибору початкового наближення вектора невідомих $\vec{x}$ системи $A\vec{x} = \vec{b}$ і потім послідовні наближення покращують за допомогою ітераційного процесу

$$\vec{x}^{(k+1)} = Q\vec{x}^{(k)} + C,$$

де $\vec{x}^{(k+1)}$ та $\vec{x}^{(k)}$ є відповідно $(k+1)$-м та k-м наближенням вектора невідомих $\vec{x}$, матриці Q та $\vec{c}$ є ітераційною матрицею і сталою матрицею-стовпцем відповідно до вибраного методу. Існують різні методи генерувати матриці Q та $\vec{c}$.

Розгляньмо такі ітераційні мтеоди:
1) Ґауса — Якобі;
2) Ґауса — Зейделя;
3) метод релаксації.

8.1. Метод Ґауса — Якобі

1. Спершу задану систему рівнянь переупорядкуємо так, щоб $a_{ii} \neq 0, i = \overline{1,n}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

2. Переписуємо систему у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1), \\ x_2 = -\dfrac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n - b_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = -\dfrac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n,n-1}x_{n-1} - b_n), \end{cases}$$

У методі Ґауса — Якобі, ітерації генерує формула

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i\right], \quad i = \overline{1,n}, \ k = 0,1,2,\ldots,$$

де початкове наближення $x_i^{(0)}, i = \overline{1,n},$ можна вибрати довільно.

3. У матричні формі, цей метод можна записати так:

$$\begin{aligned} \vec{x}^{(k+1)} &= -D^{-1}[(L+U)\vec{x}^{(k)} - \vec{b}\,] = \\ &= -D^{-1}(L+U)\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b},\ k = 0,1,2,\ldots, \end{aligned} \tag{*}$$

де L та U є відповідно нижня та верхня трикутні матриці з нульовими діагональними елементами, матриця D — діагональна. Отже,

$$A = L + D + U.$$

Тепер рівняння (*) можна переписати у вигляді

$$\vec{x}^{(k+1)} = Q_{GJ}\vec{x} + \vec{c}_{GJ},$$

де $Q_{GJ} = -D^{-1}(L+U), \vec{c}_{GJ} = D^{-1}\vec{b}$.

Переписуємо рівняння (*) ще так:

$$\begin{aligned} \vec{x}^{(k+1)} &= \vec{x}^{(k)} - (E_n + D^{-1}(L+U))\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b} = \\ &= \vec{x}^{(k)} - D^{-1}(D+L+U)\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b} = \\ &= \vec{x}^{(k)} + D^{-1}(\vec{b} - A\vec{x}^{(k)}). \end{aligned}$$

Отже,

$$\vec{h}^{(k)} = D^{-1}(\vec{b} - A\vec{x}^{(k)}) = D^{-1}\vec{r}^{(k)},$$

де

$$\vec{h}^{(k)} = \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}$$

є похибкою наближення та

$$\vec{r}^{(k)} = \vec{b} - A\vec{x}^{(k)}$$

є нев'язкою.

Якщо розв'язати рівняння

$$D\vec{h}^{(k)} = \vec{r}^{(k)}$$

щодо стовпця $\vec{h}^{(k)}$ і одержати рівність

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \vec{h}^{(k)}.$$

Ці рівняння виражають метод Ґауса — Якобі у формі похибки.

4. Збіжність методу ітерацій Ґауса — Якобі. Для того щоб проаналізувати збіжність методу ітерацій Ґауса — Якобі, позначмо як

$$\vec{\varepsilon}^{(k)} = \vec{x} - \vec{x}^{(k)}, k \geq 0,$$

похибку k-ї апроксимації.

Тоді

$$\varepsilon_i^{(k+1)} = -\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \varepsilon_i^{(k)}, \ \ i = \overline{1,n}, k = 0,1,2,\ldots$$

Тоді

$$\left|\varepsilon_i^{(k+1)}\right| \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \left|\varepsilon_i^{(k)}\right| \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \left\|\vec{\varepsilon}^{(k)}\right\|_\infty \leq K \left\|\vec{\varepsilon}^{(k)}\right\|_\infty,$$

де

$$K = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|.$$

Отже,

$$\left\|\vec{\varepsilon}^{(k+1)}\right\|_\infty \leq K \left\|\vec{\varepsilon}^{(k)}\right\|_\infty \Rightarrow \left\|\vec{\varepsilon}^{(k)}\right\|_\infty \leq K^k \left\|\vec{\varepsilon}^{(0)}\right\|_\infty.$$

Якщо $K < 1$, то $\vec{\varepsilon}^{(k)} \to \vec{0}$, коли $k \to \infty$, тобто метод ітерацій Ґауса — Якобі збігається.

Для того щоб виконувалась нерівність $K < 1$, матриця системи A повинна бути діагонально панівною, тобто

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right|, \ \ i = \overline{1,n}.$$

Тому, метод ітерацій Ґауса — Якобі збігається, якщо матриця системи є діагонально панівною. Ця умова є достатною, але не є необхідною.

З рівності

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \vec{h}^{(k)}$$

випливає, що

$$\vec{h}^{(k)} = \vec{\varepsilon}^{(k)} - \vec{\varepsilon},$$

де $\vec{\varepsilon}^{(k)} = \vec{x} - \vec{x}^{(k)}$.

Тому, використовуючи нерівність трикутника, дістаємо

$$\left\|\vec{\varepsilon}^{(k+1)}\right\|_\infty \le K\left\|\vec{\varepsilon}^{(k)}\right\|_\infty = K\left\|\vec{\varepsilon}^{(k+1)} + \vec{h}^{(k)}\right\|_\infty \le K\left(\left\|\vec{\varepsilon}^{(k+1)}\right\|_\infty + \left\|\vec{h}^{(k)}\right\|_\infty\right).$$

Отже, дістаємо таку оцінку для похибки.

$$\left\|\vec{\varepsilon}^{(k+1)}\right\|_\infty \le \frac{K}{1-K}\left\|\vec{h}^{(k)}\right\|_\infty .$$

5. Розв’яжімо СЛАР

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_3 = 12{,}5, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 18{,}5, \\ 8x_1 + 2x_2 + x_3 = -11{,}5. \end{cases}$$

методом ітерацій Ґауса — Якобі.

❍Переставляючи рівняння системи досягаємо, того щоб матриця системи стає діагонально панівною:

$$8x_1+2x_2+x_3=-11.5$$

$$x_1+6x_2+2x_3=18.5$$

$$4x_1+5x_3=12.5$$

Отже, метод ітерацій Ґауса — Якобі напевно збіжний.

Переписуємо систему у вигляді:

$$x_1=\frac{1}{8}(-11.5-2x_2-x_3)$$

$$x_2=\frac{1}{6}(18.5-x_1-2x_3)$$

$$x_3=\frac{1}{5}(12.5-4x_1)$$

Послідовні ітерації методу Ґауса — Якобі треба зупинити, якщо

$$\left\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\right\|_\infty < \varepsilon,$$

де $k \ge 0$ та ε описує задану точність. Візьмімо $\varepsilon = 0{,}01$.

Початковий крок:

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$$

Перший крок.

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{8}(-11.5 - 2x_2^{(0)} - x_3^{(0)}) = \frac{-11.5}{8} = -1.4375$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{6}(18.5 - x_1^{(0)} - 2x_3^{(0)}) = \frac{18.5}{6} = 3.0833$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{5}(12.5 - 4x_1^{(0)}) = \frac{12.5}{5} = 2.5$$

Однак,

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\right\|_\infty = \mathrm{Max}\{1.4375,\ 3.0833,\ 2.5\} = 3.0833 > \varepsilon$$

Друга ітерація

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{8}(-11.5 - 2x_2^{(1)} - x_3^{(1)}) = \frac{1}{8}[-11.5 - 2\times(3.0833) - 2.5] = -2.5208$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{6}(18.5 - x_1^{(1)} - 2x_3^{(1)}) = \frac{1}{6}(18.5 + 1.4375 - 5) = 2.4896$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{5}(12.5 - 4x_1^{(1)}) = \frac{1}{5}[12.5 - 4\times(-1.4375)] = 3.65$$

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{x}^{(1)}\right\|_\infty = \mathrm{Max}\{1.0833,\ 0.5937,\ 1.15\} = 1.15 > \varepsilon$$

Третя ітерація

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{8}(-11.5 - 2x_2^{(2)} - x_3^{(2)}) = \frac{1}{8}[-11.5 - 2\times(2.4896) - 3.65] = -2.5162$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{6}(18.5 - x_1^{(2)} - 2x_3^{(2)}) = \frac{1}{6}[18.5 + 2.5208 - 2\times(3.65)] = 2.2868$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1}{5}(12.5 - 4x_1^{(2)}) = \frac{1}{5}[12.5 + 4\times(2.5208)] = 4.5167$$

У цьому випадку

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(3)} - \boldsymbol{x}^{(2)}\right\|_\infty = \mathrm{Max}\{0.0046,\ 0.2028,\ 0.8667\} = 0.8667 > \varepsilon$$

Четверта ітерація

$$x_1^{(4)} = \frac{1}{8}(-11.5 - 2x_2^{(3)} - x_3^{(3)}) = \frac{1}{8}[-11.5 - 2\times(2.2868) - 4.5167] = -2.5738$$

$$x_2^{(4)} = \frac{1}{6}(18.5 - x_1^{(3)} - 2x_3^{(3)}) = \frac{1}{6}[18.5 + 2.5162 - 2\times(4.5167)] = 1.9971$$

$$x_3^{(4)} = \frac{1}{5}(12.5 - 4x_1^{(3)}) = \frac{1}{5}[12.5 - 4\times(-2.5162)] = 4.5129$$

Також

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(4)} - \boldsymbol{x}^{(3)}\right\|_\infty = \mathrm{Max}\{0.0576,\ 0.2897,\ 0.0038\} = 0.2897 > \varepsilon$$

П'ята ітерація.

$$x_1^{(5)}=\frac{1}{8}(-11.5-2x_2^{(4)}-x_3^{(4)})=\frac{1}{8}[-11.5-2\times(1.9918)-4.5129]=-2.5009$$

$$x_2^{(5)}=\frac{1}{6}(18.5-x_1^{(4)}-2x_3^{(4)})=\frac{1}{6}[18.5+2.5738-2\times(4.5129)]=2.0080$$

$$x_3^{(5)}=\frac{1}{5}(12.5-4x_1^{(4)})=\frac{1}{5}[12.5-4\times(-2.5738)]=4.5590$$

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(5)}-\boldsymbol{x}^{(4)}\right\|_\infty=\mathrm{Max}\{0.0729,\ 0.0109,\ 0.0461\}=0.0729>\varepsilon$$

Шоста ітерація

$$x_1^{(6)}=\frac{1}{8}(-11.5-2x_2^{(5)}-x_3^{(5)})=\frac{1}{8}[-11.5-2\times(2.0080)-4.5590]=-2.5094$$

$$x_2^{(6)}=\frac{1}{6}(18.5-x_1^{(5)}-2x_3^{(5)})=\frac{1}{6}[18.5+2.5009-2\times(4.5590)]=1.9805$$

$$x_3^{(6)}=\frac{1}{5}(12.5-4x_1^{(5)})=\frac{1}{5}[12.5-4\times(-2.5009)]=4.5007$$

Але,

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(6)}-\boldsymbol{x}^{(5)}\right\|_\infty=\mathrm{Max}\{0.0085,\ 0.0275,\ 0.0583\}=0.0583>\varepsilon$$

Сьома ітерація

$$x_1^{(7)}=\frac{1}{8}(-11.5-2x_2^{(6)}-x_3^{(6)})=\frac{1}{8}[-11.5-2\times(1.9805)-4.5007]=-2.4952$$

$$x_2^{(7)}=\frac{1}{6}(18.5-x_1^{(6)}-2x_3^{(6)})=\frac{1}{6}[18.5+2.5094-2\times(4.5007)]=2.0013$$

$$x_3^{(7)}=\frac{1}{5}(12.5-4x_1^{(6)})=\frac{1}{5}[12.5-4\times(-2.5094)]=4.5075$$

Маємо

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(7)}-\boldsymbol{x}^{(6)}\right\|_\infty=\mathrm{Max}\{0.0142,\ 0.0208,\ 0.0068\}=0.0208>\varepsilon$$

Восьма ітерація

$$x_1^{(8)}=\frac{1}{8}(-11.5-2x_2^{(7)}-x_3^{(7)})=\frac{1}{8}[-11.5-2\times(2.0013)-4.5075]=-2.5013$$

$$x_2^{(8)}=\frac{1}{6}(18.5-x_1^{(7)}-2x_3^{(7)})=\frac{1}{6}[18.5+2.4952-2\times(4.5075)]=1.9967$$

$$x_3^{(8)}=\frac{1}{5}(12.5-4x_1^{(7)})=\frac{1}{5}[12.5-4\times(-2.4952)]=4.4962$$

$$\left\|\boldsymbol{x}^{(8)}-\boldsymbol{x}^{(7)}\right\|_\infty=\mathrm{Max}\{0.0061,\ 0.0046,\ 0.0113\}=0.0113>\varepsilon$$

Дев’ята ітерація

$$x_1^{(9)} = \frac{1}{8}(-11.5 - 2x_2^{(8)} - x_3^{(8)}) = \frac{1}{8}[-11.5 - 2\times(1.9967) - 4.4962] = -2.4987$$

$$x_2^{(9)} = \frac{1}{6}(18.5 - x_1^{(8)} - 2x_3^{(8)}) = \frac{1}{6}[18.5 + 2.5013 - 2\times(4.4962)] = 2.0015$$

$$x_3^{(9)} = \frac{1}{5}(12.5 - 4x_1^{(8)}) = \frac{1}{5}[12.5 - 4\times(-2.5013)] = 4.5010$$

Нарешті,

$$\left\| \boldsymbol{x}^{(9)} - \boldsymbol{x}^{(8)} \right\|_\infty = \mathrm{Max}\{0.0026,\ 0.0048,\ 0.0048\} = 0.0048 < \varepsilon$$

Отже, зупиняючись, дістаємо

$$x_1 = -2.5, x_2 = 2 \text{ and } x_3 = 4.5$$

8.2. Метод Ґауса — Зайделя

1. Цей метод широко використовують для практичних розрахунків. Розрахункові формули методу ітерацій Ґауса — Зайделя:

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{\substack{j=1 \\ j<i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{\substack{j=1, \\ j>i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i\right], \quad i = \overline{1,n}, k = 0,1,2,\ldots \text{ (*)}$$

У матричній формі ці формули можна записати так:

$$\begin{aligned} &(L + D)\vec{x}^{(k+1)} = -U\vec{x}^{(k)} + \vec{b}, \\ &\vec{x}^{(k+1)} = -(L + D)^{-1}U\vec{x}^{(k)} + (L + D)^{-1}\vec{b}, \quad k = 0,1,2,\ldots \end{aligned} \quad \text{(**)}$$

Тобто

$$\vec{x}^{(k+1)} = Q_{GS}\vec{x}^{(k)} + \vec{c}_{GS},$$

де

$$Q_{GS} = -(L + D)^{-1}U, \vec{c}_{GS} = (L + D)^{-1}\vec{b}.$$

Рівність (**) можна переписати як

$$\begin{aligned} \vec{x}^{(k+1)} &= \vec{x}^{(k)} - \left[E_n + (L + D)^{-1}U\right]\vec{x}^{(k)} + (L + D)^{-1}\vec{b} = \\ &= \vec{x}^{(k)} - (L + D)^{-1}[L + D + U]\vec{x}^{(k)} + (L + D)^{-1}\vec{b} = \\ &= \vec{x}^{(k)} - (L + D)^{-1}A\vec{x}^{(k)} + (L + D)^{-1}\vec{b} = \\ &= \vec{x}^{(k)} + (L + D)^{-1}(\vec{b} - A\vec{x}^{(k)}). \end{aligned}$$

Тому,

$$\vec{h}^{(k)} = (L + D)^{-1}(\vec{b} - A\vec{x}^{(k)}) = (L + D)^{-1}\vec{r}^{(k)},$$

де $\vec{h}^{(k)} = \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}$ є похибкою апроксимації, а $\vec{r}^{(k)} = \vec{b} - A\vec{x}^{(k)}$ — нев'язкою.

Розв'язуючи рівняння

$$(L+D)\vec{h}^{(k)}=\vec{r}^{(k)}$$

щодо стовпця $\vec{h}^{(k)}$, дістаємо

$$\vec{x}^{(k+1)}=\vec{x}^{(k)}+\vec{h}^{(k)}.$$

Ці рівняння визначають метод Ґауса — Зайделя у формі похибки.

2. Збіжність методу ітерацій Ґауса — Зайделя. Щоб проаналізувати збіжність методу ітерацій Ґауса — Зайделя, позначмо похибку k-ї апроксимація як

$$\vec{\varepsilon}^{(k)}=\vec{x}-\vec{x}^{(k)}, k\geq 0.$$

Віднімаючи визначальне співвідношення методу Ґауса — Зайделя (*) від відповідного співвідношення методу Ґауса — Якобі, дістаємо:

$$\vec{\varepsilon}_i^{(k+1)}=-\frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{\substack{j=1,\\ j<i}}^{n}a_{ij}\varepsilon_j^{(k+1)}+\sum_{\substack{j=1,\\ j>i}}^{n}a_{ij}\varepsilon_j^{(k)}\right]=$$

$$=-\frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}\varepsilon_j^{(k+1)}+\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}\varepsilon_j^{(k)}\right],\ i=\overline{1,n}, k=0,1,2,\ldots.$$

$$\left|\vec{\varepsilon}_i^{(k+1)}\right|\leq\left[\sum_{j=1}^{i-1}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|\left|\varepsilon_j^{(k+1)}\right|+\sum_{j=i+1}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|\left|\varepsilon_j^{(k)}\right|\right]\leq K_1\left\|\vec{\varepsilon}^{(k+1)}\right\|_\infty+(K-K_1)\left\|\vec{\varepsilon}^{(k)}\right\|_\infty,$$

де

$$K=\max_{1\leq i\leq n}\sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|,$$

$$K_1=\max_{1\leq i\leq n}\mu_i,\ \mu_i=\sum_{j=1}^{i-1}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|, i=\overline{1,n},\ \mu_1=0.$$

Ураховуючи запроваджені позначення, маємо

$$\left\|\vec{\varepsilon}_i^{(k+1)}\right\|_\infty\leq K_1\left\|\vec{\varepsilon}^{(k+1)}\right\|_\infty+(K-K_1)\left\|\vec{\varepsilon}^{(k)}\right\|_\infty.$$

Тому,

$$\left\|\vec{\varepsilon}_i^{(k+1)}\right\|_\infty\leq\frac{K-K_1}{1-K_1}\left\|\vec{\varepsilon}^{(k)}\right\|_\infty.$$

Оскільки

$$\frac{K-K_1}{1-K_1}\leq K$$

як $K<1$.

Отже,

$$\left\|\vec{\varepsilon}_i^{(k+1)}\right\|_\infty \le K\left\|\vec{\varepsilon}^{(k)}\right\|_\infty.$$

З цієї нерівності випливає, що збіжність лінійна і

$$\left\|\vec{\varepsilon}_i^{(k)}\right\|_\infty \le K^k\left\|\vec{\varepsilon}^{(0)}\right\|_\infty.$$

Якщо $K < 1$, то $\vec{\varepsilon}^{(k)} \to \vec{0}$, коли $k \to \infty$, і метод ітерацій Ґауса — Зейделя збігається.

Якщо $K < 1$, то матриця системи A повинна бути діагонально панівною, тобто

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{\substack{j=1,\\ j\ne i}}^{n}\left|a_{ij}\right|,\ j = \overline{1,n}.$$

Тому, метод ітерацій Ґауса — Зайделя збігається, якщо задана система має матрицю системи строго діагонально панівну. Однак, ця умова не є необхідною.

Якщо $K < 1$, то можна одержати таку оцінку похибки методу:

$$\left\|\vec{\varepsilon}^{(k+1)}\right\|_\infty \le \frac{K}{1-K}\left\|\vec{h}^{(k)}\right\|_\infty.$$

Отже, метод Ґауса — Зайделя збігається швидше, ніж метод Ґауса — Якобі.

3. Розв'яжімо СЛАР

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 19, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 39 \end{cases}$$

методом Ґауса — Зайделя.

❍Задана система має матрицю із строгим діагональними пануванням. Отже, метод Ґауса — Зайделя збігатиметься.

Перепишімо систему:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{5}(19 - x_2 - 2x_3), \\ x_2 = \dfrac{1}{4}(-2 - x_1 + 2x_3), \\ x_3 = \dfrac{1}{8}(39 - 2x_1 - 3x_2). \end{cases}$$

Послідовні ітерація методу Ґауса — Зайделя зупиняються, якщо

$$\left\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\right\|_\infty < \varepsilon,$$

де $k \ge 0$ і $\varepsilon = 0{,}01$ — задана наперед точність.

Початковий крок.

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1$$

Перша ітерація.

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{5}(19 - x_2^{(0)} - 2x_3^{(0)}) = \frac{1}{5}(19 - 1 - 2) = 3.2$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{4}(-2 - x_1^{(1)} + 2x_3^{(0)}) = \frac{1}{4}(-2 - 3.2 + 2\times 1) = -0.8$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{8}(39 - 2x_1^{(1)} - 3x_2^{(1)}) = \frac{1}{8}(39 - 6.4 + 2.4) = 4.375$$

Тут

$$\left\| \boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)} \right\|_\infty = \text{Max}\{2.2,\ 1.8,\ 3.375\} = 3.375 > \varepsilon$$

Друга ітерація

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{5}(19 - x_2^{(1)} - 2x_3^{(1)}) = \frac{1}{5}(19 + 0.8 - 2\times 4.375) = 2.21$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{4}(-2 - x_1^{(2)} + 2x_3^{(1)}) = \frac{1}{4}(-2 - 2.21 + 2\times 4.375) = 1.135$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{8}(39 - 2x_1^{(2)} - 3x_2^{(2)}) = \frac{1}{8}(39 - 2\times 2.21 - 3\times 1.135) = 3.89687$$

$$\left\| \boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{x}^{(1)} \right\|_\infty = \text{Max}\{0.99,\ 1.935,\ 0.478125\} = 1.935 > \varepsilon$$

Третя ітерація

$$x_1^{(3)} = \frac{1}{5}(19 - x_2^{(2)} - 2x_3^{(2)}) = \frac{1}{5}[19 - 1.135 - 2\times(3.89687)] = 2.01425$$

$$x_2^{(3)} = \frac{1}{4}(-2 - x_1^{(3)} + 2x_3^{(2)}) = \frac{1}{4}[-2 - 2.01425 + 2\times(3.89687)] = 0.94487$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1}{8}(39 - 2x_1^{(3)} - 3x_2^{(3)}) = \frac{1}{8}[39 - 2\times(2.01425) - 3\times(0.94487)] = 4.01711$$

$$\left\| \boldsymbol{x}^{(3)} - \boldsymbol{x}^{(2)} \right\|_\infty = \text{Max}\{0.19575, 0.190125, 0.120234\} = 0.19575 > \varepsilon$$

Четверта ітерація

$$x_1^{(4)} = \frac{1}{5}(19 - x_2^{(3)} - 2x_3^{(3)}) = \frac{1}{5}(19 - 0.944875 - 2\times(4.01711)) = 2.00418$$

$$x_2^{(4)} = \frac{1}{4}(-2 - x_1^{(4)} + 2x_3^{(3)}) = \frac{1}{4}(-2 - 2.00418 + 2\times(4.01711)) = 1.00751$$

$$x_3^{(4)} = \frac{1}{8}(39 - 2x_1^{(4)} - 3x_2^{(4)}) = \frac{1}{8}(39 - 2(2.00418) - 3\times(1.00751)) = 3.99614$$

$$\left\| \boldsymbol{x}^{(4)} - \boldsymbol{x}^{(3)} \right\|_\infty = \text{Max}\{0.0100688,\ 0.0626344,\ 0.0209707\} = 0.0626344 > \varepsilon$$

П’ята ітерація

$$x_1^{(5)} = \frac{1}{5}(19 - x_2^{(4)} - 2x_3^{(4)}) = \frac{1}{5}[19 - 1.00751 - 2\times(3.99614)] = 2.00004$$

$$x_2^{(5)} = \frac{1}{4}(-2 - x_1^{(5)} + 2x_3^{(4)}) = \frac{1}{4}[-2 - 2.00004 + 2\times(3.99614)] = 0.998059$$

$$x_3^{(5)} = \frac{1}{8}(39 - 2x_1^{(5)} - 3x_2^{(5)}) = \frac{1}{8}[39 - 2\times(2.00004) - 3\times(0.998059)] = 4.00072$$

Нарешті

$$\left\| \boldsymbol{x}^{(5)} - \boldsymbol{x}^{(4)} \right\|_\infty = \mathrm{Max}\{0.00413859, 0.0094507, 0.00457866\} = 0.0094507 < \varepsilon$$

Процес можна зупиняти. Послідовність апроксимацій припинено на 5-й ітерації. Точний розв'язок системи:

$$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 4. \bullet$$

8.3. Метод релаксації

1. На практичні для великих систем лінійних рівнянь, обчислення потребують пришвидшення збіжності ітераційних методів. Метод релаксації є узагальненням методу Ґауса — Зайделя. Цей метод ґрунтується на параметрі ω, який пришвидшує збіжність порівняно з методом Ґауса — Зайделя.

Обчислення методу релаксації виконують за формулами:

$$z_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i\right],$$
$$x_i^{(k+1)} = \omega z_i^{(k+1)} + (1-\omega) x_i^{(k)}, \quad i = \overline{1,n}, k = 0,1,2,.... \tag{*}$$

Якщо $\omega = 1$, то дістаємо метод Ґауса — Зайделя. Параметр релаксації ω зазвичай справджує нерівність:

$$0 < \omega < 2.$$

Якщо $1 < \omega < 2$, то схема відома як метод верхньої релаксації, якщо $0 < \omega < 1$, то схему називають метод нижньої релаксації.

2. Збіжність методу релаксації. Перепишімо співвідношення (*) в матричному вигляді:

$$\vec{z}^{(k+1)} = D^{-1}\left[\vec{b} - L\vec{x}^{(k+1)} - U\vec{x}^{(k)}\right],$$
$$\vec{x}^{(k+1)} = \omega \vec{z}^{(k+1)} + (1-\omega)\vec{x}^{(k)}, k = 0,1,2,...$$

Із цих співвідношень дістаємо:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \omega D^{-1}\left[\vec{b} - L\vec{x}^{(k+1)} - U\vec{x}^{(k)}\right] + (1-\omega)\vec{x}^{(k)}, k = 0,1,2,...$$

Звідки випливає, що

$$\vec{x}^{(k+1)} = (I + \omega D^{-1}L)^{-1}\Big[(1-\omega)E_n - \omega D^{-1}U\Big]\vec{x}^{(k)} +$$
$$+\omega(E_n + \omega D^{-1}L)^{-1}D^{-1}\vec{b} = \qquad (**)$$
$$= (D+\omega L)^{-1}\Big[(1-\omega)D - \omega U\Big]x^{(k)} + \omega(D+\omega L)^{-1}\vec{b}, k = 0,1,2,...$$

А, отже,

$$\vec{x}^{(k+1)} = Q_{SOR}\vec{x}^{(k)} + \vec{c}_{SOR},$$

де $Q_{SOR} = (D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U], \vec{c}_{SOR} = \omega(D+\omega L)^{-1}\vec{b}$.

Установлено, що якщо A симетрична додатно визначена матриця, то $\rho(Q_{SOR}) < 1$ для $0 < \omega < 2$. Це означає збіжність процесу, але тут зазвичай цікавить найшвидша збіжність, а не просто збіжність.

Параметр ω треба вибирати оптимально так, щоб мінімізувати $\rho(Q_{SOR})$, тобто спектральний радіус матриці Q_{SOR}. Це забезпечить найшвидшу збіжність $\vec{x}^{(k)}$ до $\vec{x}$.

Оптимальне значення ω^* релаксаційного множника для якого збіжність є найшвидшою визначається за формулою

$$\omega^* = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(Q_{GS})}},$$

де $Q_{GS} = -(L+D)^{-1}U$ є ітераційною матрицею методу Ґауса — Зайделя.

Тепер перепишімо співвідношення (**) ще так:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - (D+\omega L)^{-1}[(D+\omega L) - (1-\omega)D + \omega U]\vec{x}^{(k)} + \omega(D+\omega L)^{-1}\vec{b} =$$
$$= \vec{x}^{(k)} - \omega(D+\omega L)^{-1}[L + D + U]\vec{x}^{(k)} + \omega(D+\omega L)^{-1}\vec{b} =$$
$$= \vec{x}^{(k)} - \omega(D+\omega L)^{-1}A\vec{x}^{(k)} + \omega(D+\omega L)^{-1}\vec{b} =$$
$$= \vec{x}^{(k)} + \omega(D+\omega L)^{-1}\vec{r}^{(k)}, k = 0,1,2,...$$

де $\vec{r}^{(k)} = \vec{b} - A\vec{x}^{(k)}$ — нев'язка.

З цих рівнянь дістаємо формулу для похибки апроксимації

$$\vec{h}^{(k)} = \omega(D+\omega L)^{-1}\vec{r}^{(k)}.$$

Ми можемо розв'язати рівняння

$$(D+\omega L)\vec{h}^{(k)} = \omega\vec{r}^{(k)}$$

щодо стовпця $\vec{h}^{(k)}$ і визначити, що

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \vec{h}^{(k)}.$$

Ці рівняння описують метод релаксації у формі похибки.