ЛЕКЦІЯ 9. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

9.1. Відокремлення коренів

1. Часто виникає потреба знайти корінь рівняння $f(x) = 0$ із заданою точністю. Це означає, що якщо ξ — точне значення кореня, а $\hat{x}$ — його наближене значення з точністю ε, то

$$\left|\hat{x} - \xi\right| < \varepsilon.$$

2. Знаходження наближених коренів рівняння включає два етапи:

1) відокремлення коренів; 2) уточнення коренів до заданої точності.

Відокремити корінь ξ рівняння $f(x) = 0$ — означає вказати окіл точки ξ, який не містить інших коренів цього рівняння.

Під час відокремлення коренів рівняння $f(x) = 0$ корисним є таке

Твердження 9.1. Якщо неперервна функція f на кінцях відрізка $[a;b]$ набуває значення різних знаків, тобто $f(a)f(b) < 0$, то всередині цього відрізка існує принаймні один корінь ξ рівняння $f(x) = 0$ (рис. 9.1). При цьому корінь ξ є єдиним, якщо f' зберігає знак усередині інтервалу $(a;b)$ (рис. 9.2 та 9.3).

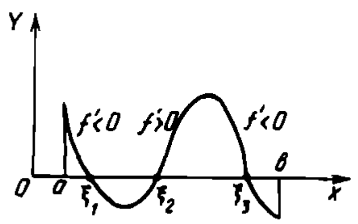

Рис. 9.1

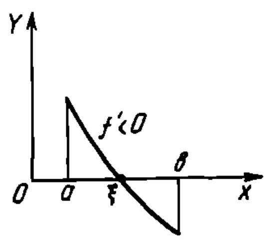

Рис. 9.2

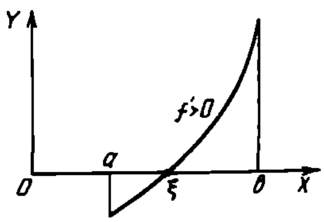

Рис. 9.3

На практиці відокремлення коренів рівняння $f(x) = 0$ на $[a;b]$ починають з перевірки умови $f(a)f(b) < 0$. Якщо цю умову виконано, то в інтервалі $(a;b)$ є корінь рівняння, і подальша задача полягає в з'ясуванні його єдиності чи неєдиності.

3. Метод половинного поділу. Для відокремлення коренів практично достатньо провести процес половинного поділу, відповідно до якого відрізок $[a;b]$ поділяють на $2, 4, 8, \ldots$ рівні частини і визначають знаки функції в точках поділу. При цьому якщо в точках x_k, x_{k+1} поділу виконано умову $f(x_k)f(x_{k+1}) < 0$, то в інтервалі $(x_k; x_{k+1})$ є корінь рівняння.

Відомо, що многочлен n-го степеня $P_n(x)$ з дійсними коефіцієнтами має не більше, ніж n дійсних коренів. Тому, якщо для многочлена $P_n(x)$ знайдено $n+1$ зміна знаку, то цим самим усі корені рівняння $P_n(x)$ відокремлено.

4. Алгоритм відокремлення коренів. Нехай маємо рівняння $f(x)=0$.

А. Знаходять ділянки зростання та спадання функції f (за допомогою похідної f');

Б. Складаємо таблицю знаків функції f у стаціонарних точках (або найближчих до них), а також на межі області означення.

В. Визначаємо інтервали, на кінцях яких функція f має протилежні знаки. Усередині таких інтервалів може бути тільки по одному кореню.

Нехай ξ — точне, а $\hat{x}$ — наближене значення кореня рівняння $f(x)=0$, $\xi, \hat{x} \in [a;b]$. Крім того, нехай $\left|f'(x)\right| \geq m > 0$. До функції f застосуємо теорему Лаґранжа на відрізку $[\xi;\hat{x}]$:

$$f(\hat{x}) - f(\xi) = f'(c)(\hat{x} - \xi), c \in (\hat{x};\xi).$$

Звідси, оскільки $f(\xi)=0$ та $\left|f'(c)\right| \geq m$, дістаємо

$$\left|f'(\hat{x})\right| \geq m\left|x - \xi\right|,$$

тобто

$$\left|\hat{x} - \xi\right| < \frac{\left|f'(\hat{x})\right|}{m}.$$

Ця формула дає оцінку похибки наближеного кореня на відрізку $[a;b]$.

5. Методом половинного поділу уточнімо до $\varepsilon = 10^{-3}$ найменший корінь рівняння $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$.

❍ Спершу відокремлюємо корені. Знаходимо

$$f'(x) = (x^3 + 3x^2 - 3)' = 3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2.$$

Складаємо таблицю:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
знак $f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Оскільки $f(-\infty) < 0, f(-2) > 0$, то перший корінь належить інтервалу $(-\infty;-2)$. Оскільки $f(-3) < 0$, то наближене значення одного з коренів належить інтервалу $(-3;-2)$. Другий корінь належить інтервалу $(-2;0)$, і більш того, інтервалу $(-2;-1)$, оскільки $f(-2) > 0, f(-1) = -1 < 0$.

Оскільки $f(1) = 1 > 0$, то ясно, що третій корінь належить інтервалу $(0;1)$.

Отже, найменший корінь ξ належить інтервалу $(-3;-2) = (a_0;b_0)$. Уточнімо цей корінь за допомогою методу половинного поділу.

Серединою інтервала $(-3;-2)$ є точка $x_0 = -2,5$. Маємо

$$f(-3) < 0, f(-2,5) = 0,125 > 0 \Rightarrow \xi \in (-3;-2,5) = (a_1;b_1).$$

Серединою інтервала $(-3;-2,5)$ є точка $x_1 = -2,75$. Маємо

$$f(-2,75) = -1,111 < 0, f(-2,5) > 0 \Rightarrow \xi \in (-2,75;-2,5) = (a_2;b_2).$$

Серединою інтервала $(-2,75;-2,5)$ є точка $x_2 = -2,625$. Маємо

$$f(-2,625) = -0,320 < 0, f(-2,5) > 0 \Rightarrow \xi \in (-2,625;-2,5) = (a_3;b_3).$$

Решту обчислень зведімо до таблиці. Знаки «$-$» та «$+$» у верхніх індексах a_n та b_n означають, що $f(a_n) < 0$ та $f(b_n)$ відповідно.

n	a_n^-	b_n^+	$\frac{a_n+b_n}{2} = x_n$	$f(x_n)$
0	−3	−2	−2,500	0,125
1	−3	−2,500	−2,750	−1,111
2	−2,750	−2,500	−2,625	−0,320
3	−2,625	−2,500	−2,563	−0,139
4	−2,563	−2,500	−2,532	−0,003
5	−2,563	−2,532	−2,548	−0,071
6	−2,548	−2,532	−2,540	−0,034
7	−2,540	−2,532	−2,536	−0,014
8	−2,536	−2,532	−2,534	−0,007
9	−2,534	−2,532	−2,533	−0,002
10	−2,533	−2,532		

Згідно з таблицею, з точністю до 10^{-3} наближене значення кореня

$$\hat{x} = -2,532,$$

оскільки $|b_n - a_n| = |-2,532 + 2,533| = 0,001$. ●

9.2. Метод хорд

1. Цей метод широко використовують для розв'язання алгебричних і трансцендентних рівнянь.

Нехай задано рівняння $f(x) = 0, f \in C^2$, причому корінь ξ відокремлено на відрізку $[a;b]$. Сутність методу хорд полягає в тому, що на достатньо малому відрізку $[a;b]$ дугу кривої $y = f(x)$ заміняють хордою, що її стягує, і за наближене значення кореня беруть точку перетину хорди з віссю Ox (рис. 9.4).

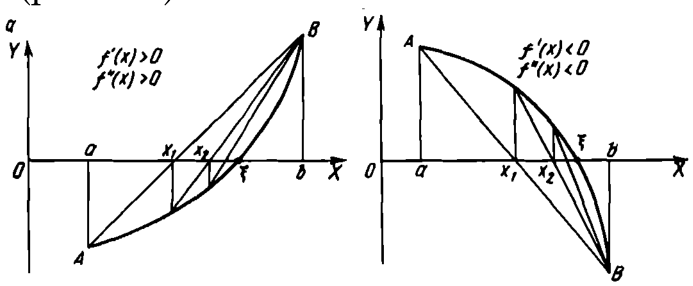

Рис. 9.4

2. Розгляньмо випадок, коли зростаюча функція f $(f'(x) > 0)$ — опукла донизу $(f''(x) > 0)$, тобто $f'(x)f''(x) > 0$ (рис. 9.4). Складімо рівняння хорди, що проходить через точки $A = (a; f(a))$ та $B = (b; f(b))$:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \Rightarrow y = f(a) + \frac{x - a}{b - a}(f(b) - f(a)).$$

Прирівнюючи y до нуля, знаходимо точку $x = x_1$ перетину хорди AB з віссю Ox:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

Це і є першим наближенням кореня, одержана за методом хорд. Тепер корінь ξ належить відрізку $[x_1; b]$. Повторюючи міркування щодо цього відрізка, дістаємо наступне наближення:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}(b - x_1).$$

Продовжуючи цей процес, знаходимо

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(b) - f(x_2)}(b - x_2).$$

У загальному випадку

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n), n = 0,1,2,.... \quad (*)$$

Уточнення кореня за методом хорд продовжують до тих пір, поки не буде досягнуто необхідну точність ε кореня, тобто поки не буде виконано умову

$$\left|\xi - x_n\right| < \left|x_{n+1} - x_n\right| \le \varepsilon. \quad (**)$$

Зауважмо, що під час виведення формули (*) правий кінець $x = b$ відрізка $[a;b]$ нерухомий. При цьому знак $f(b)$ збігається зі знаком $f''(b)$. Формула (*) правдива й тоді, коли

$$f(a) > 0, f'(x) < 0, f''(x) < 0 \ (f'(x)f''(x) > 0).$$

І в цьому випадку нерухомою є точка $x = b$, причому знаки $f(b)$ та $f''(b)$ збігаються.

3. Для випадку $f'(x)f''(x) < 0, x \in (a;b)$ (рис. 9.5), міркуючи так само, дістаємо наближене значення кореня

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a), n = 0,1,2,..., x_0 = b. \text{ (***)}$$

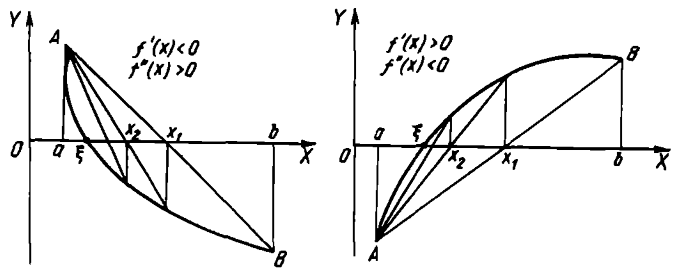

Рис. 9.5

Тепер нерухомою точкою є $x = a$, причому знаки $f(a)$ та $f''(a)$ збігаються.

Отже, вибір формули (*) або (**) для уточнення кореня рівняння $f(x) = 0$ за методом хорд відбувається згідно з правилом: *нерухомим є той кінець відрізка* $[a;b]$, *для якого знак функції збігається зі знаком другої похідної.*

4. Методом хорд уточнити до $\varepsilon = 0,0001$ корінь рівняння $x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$, що лежить на відрізку $[2,1;2,2]$.

❍ У нашому випадку

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3, f''(x) = 6x - 4.$$

Оскільки

$$f(2,1) = -0,459 < 0, f(2,2) = 0,168 > 0 \text{ та } f''(2,2) = 9,2 > 0,$$

то уточнення кореня проведімо за формулою (*).

Маємо

$$x_1 = 2,1 - \frac{(2,2 - 2,1)(-0,459)}{0,168 + 0,459} = 2,173.$$

Знаходимо

$$f(2,173) = -0,01011 < 0.$$

Тоді

$$x_2 = 2{,}173 - \frac{(2{,}2 - 2{,}173)(-0{,}01011)}{0{,}168 + 0{,}01011} = 2{,}1745.$$

Для оцінки похибки наближеного значення кореня $x_2 = 2{,}1745$ скористаємось формулою (***).

Оскільки

$f(2{,}1745) = -0{,}00038543, m = \min\limits_{x\in[2{,}1;2{,}2]}\left|f'(x)\right| = \min\limits_{x\in[2{,}1;2{,}2]}\left|3x^2 - 4x + 1\right| = 5{,}83,$

то

$$\left|x_2 - \xi\right| \le \frac{0{,}00038543}{5{,}83} = 6{,}61\cdot 10^{-5} < 0{,}0001,$$

тобто необхідною точності досягнуто.●

9.3. Метод Ньютона (дотичних)

1. Нехай задано рівняння $f(x) = 0, f \in C^2$, причому корінь $\xi \in [a;b]$ відокремлено. Сутність методу Ньютона полягає в тому, що дугу кривої $y = f(x)$ замінюють дотичною до неї і за наближення кореня беруть абсцису точки перетину дотичної з віссю Ox.

Розгляньмо випадок, коли зростаюча функція $f(x)$ $(f'(x) > 0)$ — опукла донизу $(f''(x) > 0)$, тобто $f'(x)f''(x) > 0, f(a) < 0, f(b) > 0$ (рис. 9.6)

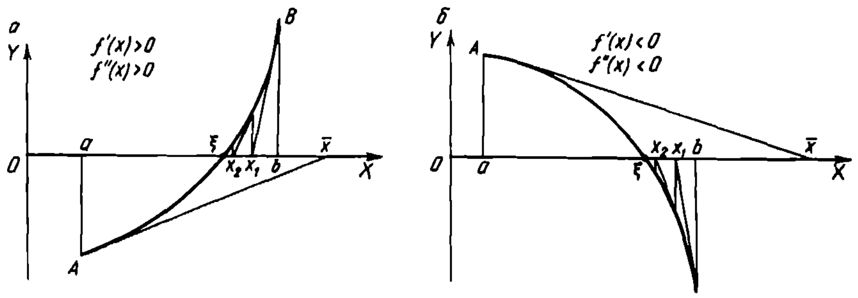

Рис. 9.6

Рівняння дотичної до графіка функції f у точці $B = (b; f(b))$ має вигляд

$$y - f(b) = f'(b)(x - b).$$

Звідси при $y = 0$ дістаємо точку перетину дотичної з віссю Ox, тобто перше наближення кореня за методом Ньютона:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Тепер шуканий корінь $\xi \in [a; x_1]$. Повторюючи попередні міркування для цього відрізка, дістаємо наступне наближення кореня:

$$x_n = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Продовжуючи цей процес, знаходимо

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0,1,2,... \qquad (*)$$

Це і є формулою $(n+1)$-го наближення кореня за методом Ньютона, де за початкову точку вибирають $x_0 = b$. Зауважмо, що під час виведення формули (*) функція f справджує умови

$$f(b) > 0, f''(b) > 0.$$

2. Якщо ж у розглядуваному випадку за початкову точку взяти не $x_0 = b$, а точку $x_0 = a$, то взагалі кажучи, уточнення кореня може не відбутися, оскільки точка $\overline{x}$ перетину дотичної з віссю Ox може опинитись за межами відрізка $[a;b]$.

Формула (*) правдива і тоді, коли

$$f(a) > 0, f(b) < 0, f'(x) < 0, f''(x) < 0 \ \ (f'(x)f''(x) > 0).$$

У цьому випадку початковою є точка $x_0 = b$, причому знаки $f(b)$ та $f''(b)$ збігаються.

Для випадку $f'(x)f''(x) < 0, x \in (a;b)$, міркуючи так само, дістаємо наближене значення кореня за формулою (*), але в ній початковою точкою є $x_0 = a$. Знаки $f(a)$ та $f''(a)$ збігаються (рис. 9.7).

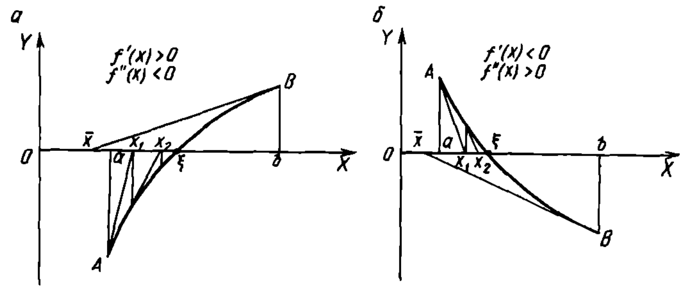

Рис. 9.7

Отже, вибір початкової точки для уточнення кореня рівняння $f(x) = 0$ за методом Ньютона здійснюють за правилом: *початковою точкою a або b відрізка $[a;b]$ є та, для якої знак функції збігається зі знаком другої похідної.*

Оцінювати похибку наближення за методом Ньютона можна за формулою

$$\left|\hat{x}-\xi\right| < \frac{\left|f'(\hat{x})\right|}{m}. \qquad (**)$$

3. Обчислімо $\sqrt{13}$ за методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$.

❍Значення $\xi = \sqrt{13}$ є коренем рівняння $f(x) = x^2 - 13 = 0$, причому $3 < \xi < 4$, тобто $a = 3, b = 4$. Оскільки $f(4) = 3 > 0$ та $f''(x) = 2 > 0$, використаємо формулу (*), вибираючи за початкову точку $x_0 = b = 4$. Послідовно дістаємо:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4 - \frac{3}{2\cdot 4} = 3{,}625;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3{,}625 - \frac{0{,}140625}{2\cdot 3{,}625} = 3{,}605603;$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 3{,}605603 - \frac{3{,}77\cdot 10^{-4}}{2\cdot 3{,}605603} = 3{,}605551.$$

Оскільки

$$\left|f(3{,}605551)\right| = 2\cdot 10^{-6},\ m = \min_{x\in[3;4]}\left|f'(x)\right| = 6,$$

то за формулою (**) маємо

$$\left|x_3 - \sqrt{13}\right| \le 3{,}3333\cdot 10^{-6} < 10^{-5},$$

тобто заданої точності досянуто.

Отже, з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$ значення $\xi = \sqrt{13} = 3{,}60555.$ ●

9.3. Метод ітерацій

1. Теорема про нерухому точку. Нехай $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — неперервне відображення. Кажуть, що воно справджує умову Ліпшица, якщо існує стала $q > 0$, така, що виконана нерівність

$$\left\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\right\| \le q\left\|\vec{x} - \vec{y}\right\| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Відображення $\vec{f}$ називають стискаючим, якщо воно справджує умову Ліпшица зі сталою $0 < q < 1$. Число q називають коефіцієнтом стискання.

Приміром, нехай f — скалярна функція дійсної змінної x. Тоді при $\left|f'(x)\right| \le q < 1$ відображення f буде стискаючим, оскільки за теоремою Лаґранжа

$$\left|f(x_2) - f(x_1)\right| = \left|f'(\xi)\right|\left|x_2 - x_1\right| \le q\left|x_2 - x_1\right|, \xi \in [x_1; x_2].$$

Точку $\vec{x}^*$ для відображення $\vec{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ називають нерухомою, якщо

$$\vec{f}(\vec{x}^*) = \vec{x}^*.$$

Теорема Банаха про нерухому точку. Нехай $\vec{f}$ неперервно відображує замкнену множину $D \subset \mathbb{R}^n$ в D і є стискаючим з коефіцієнтом стискання q. Тоді f має в D єдину нерухому точку $\vec{x}^*$. При будь-якому початковому значенні $\vec{x}^{(0)} \in D$ послідовні наближення

$$\vec{x}^{(n+1)} = \vec{f}(\vec{x}^{(n)}), n \geq 0,$$

збігаються до $\vec{x}^*$ і правдива така оцінка швидкості збіжності:

$$\left\|\vec{x}^* - \vec{x}^{(n)}\right\| \leq \frac{q^n}{1-q}\left\|\vec{f}(\vec{x}^{(0)}) - \vec{x}^{(0)}\right\| = \frac{q^n}{1-q}\left\|\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)}\right\|.$$

2. Теорему про нерухому точку використовують до розв’язання рівнянь і систем рівнянь за методом ітерацій.

Розгляньмо рівняння

$$\varphi(x) = 0, x \in [a;b],$$

де φ — неперервна функція, причому $\varphi(x) \in [a;b]$. Нехай треба знайти корінь $\xi \in [a;b]$ цього рівняння. Розгляньмо допоміжну функцію

$$f(x) = x - \lambda\varphi(x),$$

де $\lambda \neq 0$ — деякий, невідомий поки що, параметр.

Нерухомі точки функції f збігаються з коренями рівняння $\varphi(x) = 0$. Таким чином відшукання коренів функції f, тобто послідовні наближення кореня рівняння $\varphi(x) = 0$ зводиться до знаходження нерухомих точок функції f, тобто послідовні наближення кореня рівняння $\varphi(x) = 0$ визначаються співвідношеннями

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n - \lambda\varphi(x_n), n = 0,1,2,\ldots$$

Але f — стискаюче відображення, якщо

$$\left|f'(x)\right| = \left|1 - \lambda\varphi'(x)\right| \leq q < 1 \quad \forall x \in [a;b].$$

Звідси дістаємо, що число $\lambda > 0$ повинно справджувати умову

$$0 < \lambda\varphi'(x) < 2.$$

3. Припустімо, що

$$0 < m \leq \varphi'(x) \leq M \quad \forall x \in [a;b]$$

(якщо функція $\varphi(x)$ від'ємна, то замість рівняння $\varphi(x)=0$ розглядаємо рівняння $-\varphi(x)=0$). З останньої нерівності випливає

$$0<\lambda<\frac{2}{f'(x)} \Leftrightarrow 0<\lambda<\frac{2}{M}.$$

Зазвичай за λ беруть $\frac{1}{M}$. Тоді дістаємо рівняння

$$f(x)=x-\frac{\varphi(x)}{M}.$$

Отже, у цьому випадку ітераційний процес набуває вигляду

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\varphi(x_n)}{M},\ n=0,1,2...$$

Якщо ж $\varphi'(x)<0\ \forall x\in[a;b]$ та $0<m\le\left|\varphi'(x)\right|\le M$, дістаємо рівняння

$$f(x)=x+\frac{\varphi(x)}{M}$$

і відповідний ітераційний процес:

$$x_{n+1}=x_n+\frac{\varphi(x_n)}{M},\ n=0,1,2,...$$

4. Метод ітерацій розв'язання рівнянян $\varphi(x)=0$ має просту геометричну ілюстрацію на площині Oxy. Справді, відшукання кореня рівняння $\varphi(x)=0$ рівносильно знаходження нерухомих точок функції $f(x)=x$ $(f(x)=x-\lambda\varphi(x))$, тобто відшуканню абсцис точок перетину графіків функцій $y=x$ та $y=f(x)$. Тоді збіжність ітераційного процесу означає наступне: графік функції f, такий, що послідовність $\{x_n\}=\{f(x_n)\}$ збігається до нерухомої точки x^* для будь-якого начального наближення x_0, інакше послідовність розбігається (якщо тільки сама точка x_0 не є нерухомою) (рис. 9.8).

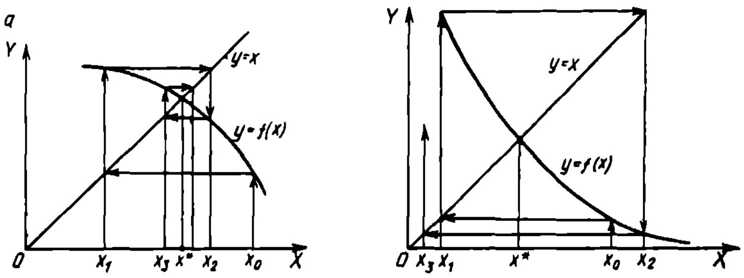

Рис. 9.8

5. Знайдімо найбільший корінь рівняння $2x - \ln x - 4 = 0$ з точністю до $\varepsilon = 10^{-4}$.

❍Попередньо відокремимо корені рівняння

$$\varphi(x) = 2x - \ln x - 4 = 0.$$

Оскільки,

$$\varphi'(x) = 2 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2},$$

то з урахуванням області означення функції $\ln x$ $(x > 0)$ складімо наступну таблицю:

x	0	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2 - 3 < 0$	$\nearrow$	$+\infty$

З таблиці випливає, що один корінь рівняння $\varphi(x) = 0$ належить інтервалу $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, а другий, більший, в інтервалі $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. Уточнімо його. Помітим, що при

$$x = 2 \Rightarrow \varphi(2) = -\ln 2 < 0,$$

а при

$$x = 3 \Rightarrow \varphi(3) = 2 - \ln 3 > 0,$$

тобто більший корінь рівняння $\varphi(x) = 0$ належить відрізку $[2;3]$.

Оскільки

$$M = \max_{x\in[2;3]} \varphi'(x) = \frac{5}{3} = \frac{1}{q},$$

то дістаємо ітераційну послідовність

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3}{5}(2x_n - \ln x_n - 4), n \geq 0,...,$$

де початкове наближення x_0 — будь-яка точка відрізку $[2;3]$. Для прикладу візьмімо $x_0 = 2,5$. Тоді

$$x_1 = 2,5 - 0,6 \cdot (5 - \ln 2,5 - 4) = 2,4497;$$
$$x_2 = 2,4497 - 0,6 \cdot (4,8995 - \ln 2,4497 - 4) = 2,4476;$$
$$x_3 = 2,4476 - 0,6 \cdot (4,8952 - \ln 2,4476 - 4) = 2,4475;$$
$$x_4 = 2,4475 - 0,6 \cdot (4,8950 - \ln 2,4475 - 4) = 2,4475.$$

Зазначмо, що точність $\varepsilon = 10^{-4}$ уже досягнута. Це підтверджується формулою

$$\left\|\vec{x}^{*}-\vec{x}^{(n)}\right\| \leq \frac{q^{n}}{1-q}\left\|\vec{x}^{(1)}-\vec{x}^{(0)}\right\|,$$

у якій треба покласти

$$n=4, x_0=2,5; f(x_0)=x_1=2,4497,$$
$$f(x)=x-0,6\cdot(2x-\ln x-4),$$

і,

$$q=\max_{x\in[2;3]}\left|f'(x)\right|=\max_{x\in[2;3]}\left|-\frac{1}{5}+\frac{3}{5x}\right|=\frac{1}{10}.$$

Справді, маємо

$$\left|x^{*}-x_4\right|=\left|x^{*}-2,4475\right|<\frac{(0,1)^4}{0,9}(2,5-2,4497)=5,5888\cdot 10^{-5}.$$