ЛЕКЦІЯ 12. ЗАСТОСУВАННЯ РЯДІВ ДО НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

12.1. Оцінка сум рядів

1. Часто, коли не має можливості обчислити точну суму ряду, її знаходять хоча б наближено. Для наближеного обчислення суми S довільного ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ із заданою точністю $\varepsilon > 0$ знаходять його часткову суму S_n з таким номером n, для якого модуль суми n-го залишку ряду не перевищує заданої точності:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \approx S_n,$$

де n таке, що

$$\left| S - S_n \right| = \left| R_n \right| < \delta.$$

Для економії обчислений номер n намагають вибрати мінімально можливим.

2. Знакопочережні ряди. Якщо знакопочережний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, a_n > 0,$$

справджує умовам ознаки Ляйбніца, то абсолютна похибка суми ряди, обчисленої за допомогою деякої n-ї часткової суми цього ряду, не перевищує за модулем першого відкинутого члена ряду:

$$\left| S - S_n \right| = \left| R_n \right| \le a_{n+1}.$$

Тому для забезпечення заданої точності δ оцінки $S \approx S_n$ достатньо знайти такий номер n, щоб $a_{n+1} < \delta$.

3. Приміром, доведімо, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 1}$$

збігається, і обчислімо наближене значення його суми з точністю до $0,01$.

❍Заданий ряд збігається абсолютно, оскільки збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1}$$

з модулів його членів. Це випливає із граничної ознаки порівняння, у якій за ряд порівняння треба взяти збіжний ряд Діріхле

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}.$$

Обчислімо тепер суму початкового ряду із заданою точністю. Для цього треба знайти такий найменший номер $n \in \mathbb{N}$, при якому для досліджуваного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$$

буде виконуватись нерівність

$$\left|S - S_n\right| < 0{,}01,$$

де

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^3+1}, S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^3+1}.$$

Оскільки досліджуваний ряд є знакопочережним і справджує умови ознаки Ляйбніца $\left(\frac{1}{n^3+1} \to 0, n \to \infty, \frac{1}{n^3+1}\downarrow\right)$, то

$$\left|S - S_n\right| = \left|R_n\right| \le \left|a_{n+1}\right| = \frac{1}{(n+1)^3+1}.$$

Отже, достатньо знайти мінімальне число $n \in \mathbb{N}$, для якого виконано нерівність

$$\frac{1}{(n+1)^3+1} < 0{,}01.$$

Знаходимо, що $n = 4$. Отже,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1} \approx S_4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{28} + \frac{1}{65} \approx -0{,}41$$

з точністю до $\varepsilon = 0{,}01$. ●

4. Якщо збіжний ряд не справджує умови ознаки Ляйбніца, то модуль суми R_n його n-го залишку, уже не можна оцінити так просто. Для оцінювання $\left|R_n\right|$ використовують інші прийоми. Якщо ряд знакододатний, то його остачу оцінюють зверху рядом, суму якого можна обчислити.

5. Доведімо збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ й обчислімо його суму з точністю $\beta = 10^{-3}$.

❍Ряд збігається за д'Аламберовою ознакою.

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right)}_{\textit{геометричний ряд}}.$$

$$R_n < \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n\cdot n!}.$$

$$\frac{1}{n\cdot n!} < 0,001 \Rightarrow n \ge 6.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} \approx S_6 = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{6!} \approx 1,718. \quad ●$$

12.2. Застосування рядів у наближених обчисленням

1. Якщо функція f є аналітичною в точці x_0, тобто в деякому околі точки x_0 її можна розвинути в степеневий ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

то за наближене значення функції f у точці x з околу точки x_0 можна взяти часткову суму цього ряду:

$$f(x) \approx S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k.$$

Природньо, що при цьому, чим менше значення n, тим простіше апроксимувальна функція $S_n(x)$, але більше, узагалі кажучи, похибка такого наближення. Оскільки

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

то при кожному фіксованому n точність наближення

$$f(x) \approx S_n(x)$$

оцінюють суму залишку ряду

$$\left|f(x)-S_n(x)\right|=\left|R_n(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k(x-x_0)^k\right|.$$

Тому при заданій похибці $\delta>0$ кількість доданків у частковій сумі $S_n(x)$ треба вибирати так, щоб воно найменшим серед таких n, для яких виконано оцінку

$$\left|R_n(x)\right|\le\delta.$$

Оцінювати суму залишку ряду можна в різний спосіб, а саме: використовувати різні форми формули Тейлора (Лаґранжа, Коші або інтегральну), будувати для ряду числову мажоранту, суму якої нескладно обчислити. В окремих випадках можна застосувати ознаку Ляйбніца, якщо ряд у досліджуваних точках є знакопочережним. Якщо степеневий ряд у деякій точці x справджує ознаку Ляйбніца, то правдива оцінка

$$\left|R_n(x)\right|\le\left|a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}\right|=\left|a_{n+1}\right|\left|x-x_0\right|^{n+1}.$$

2. Обчислімо $\sqrt[4]{e}$ з точністю до $\varepsilon=10^{-5}$.

❍Підставляючи в розвинення функції $f(x)=e^x$ у ряд Тейлора — Маклорена

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$x=\dfrac{1}{4}$, одержимо ряд:

$$\sqrt[4]{e}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n n!}.$$

Оцінюємо похибку наближення суми ряду

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

його частковою сумою S_n:

$$\left|R_n(x)\right| < \frac{\left|x\right|^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{\left|x\right|^{n+1}}{(n+2)!} + \ldots =$$

$$= \frac{\left|x\right|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{\left|x\right|}{n+2} + \frac{\left|x\right|^2}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{\left|x\right|^{n+1}}{(n+1)!}\underbrace{\left(1 + \frac{\left|x\right|}{n+1} + \frac{\left|x\right|^2}{(n+1)^2} + \ldots\right)}_{\text{геометричний ряд}} \overset{[13.2.3]}{=} \frac{\left|x\right|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{|x|}{n+1}} = \frac{\left|x\right|^{n+1}}{n!}\frac{1}{n+1-\left|x\right|}.$$

[*Визначаємо скільки треба взяти членів ряду, щоб забезпечити задану точність наближення.***]**

$$\left|R_n\left(\frac{1}{4}\right)\right| < \frac{1}{n!\,4^n\left(n+1-\frac{1}{4}\right)} < 10^{-5} \Rightarrow n \geq 4.$$

$$\sqrt[4]{e} \approx \sum_{n=0}^{4}\frac{1}{4^n n!} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{384} + \frac{1}{6144} \approx$$

$$\approx 1,000000 + 0,250000 + 0,031250 + 0,002604 + 0,000162 \approx 1,28403.$$

3. У разі наближеного обчислення за допомогою рядів треба мати на увазі, що будь-яке число можна подати як суму деякого степеневого ряду не єдиним чином. Тому з усіх можливих представлень варто вибирати ряд, який збігається найшвидше.

Приміром, для обчислення значення $\ln 2$ можна скористатись рядом Тейлора — Маклорена для функції

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

у точці $x = 1$:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Для обчислення $\ln 2$ з точністю до 10^{-3} доведеться підсумовувати не менше як 10^3 членів ряду, що аніж ніяк не можна визнати вдалим способом обчислення.

4. Число $\ln 2$ можна також подати як суму іншого, швидко збіжного ряду. Розгляньмо спершу ряд Тейлора — Маклорена для функції $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ при $x \in (-1;1)$:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}x^n}{n} =$$
$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Нехай $1+t = \dfrac{1+x}{1-x}$. Тоді $x = \dfrac{t}{t+2}$. Тоді попереднє розвинення можна переписати так:

$$\ln(1+t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{t}{2+t}\right)^{2n-1},$$

при $\left|\dfrac{t}{2+t}\right| < 1$, тобто $t > -1$.

Підставляючи значення $t = 1$ у розвинення, дістаємо нове представлення числа $\ln 2$ як суму ряду:

$$\ln 2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}.$$

Цей ряд уже є швидко збіжним. Справді, суму R_n залишку цього ряду можна оцінити таким чином:

$$0 < R_n = \ln 2 = 2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1} \le$$
$$\le \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \ldots\right) =$$
$$= \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\cdot\frac{9}{8} = \frac{1}{4(2n+1)3^{2n-1}} = r_n,$$

тобто суму залишку швидко спадає зі зростанням номера n.

Якщо S_n — часткова сума ряду, то похибка δ наближення $\ln 2 \approx S_n$, що дорівнює сумі R_n залишку цього ряду, справджує співвідношення

$$0 < \delta = R_n \le r_n, n = 0,1,2,\ldots$$

Оскільки

$$R_2 \le r_2 = \frac{1}{4\cdot 5\cdot 3^3} = \frac{1}{540} > 0,0018 > 0,001;$$

$$R_3 \le r_3 = \frac{1}{4\cdot 7\cdot 3^5} = \frac{1}{6804} < 0{,}00015 < 0{,}001,$$

для обчислення $\ln 2$ з точністю до $0{,}001$ достатньо взяти суму перших трьох ненульових членів ряду:

$$\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5}\right) \approx 0{,}6667 + 0{,}0247 + 0{,}0016 \approx 0{,}693.$$

Нагадаємо, що для обчислення значення $\ln 2$ за допомогою ряду для $\ln(1+x)$ для забезпечення цієї ж точності потребувало підсумовування тисячі членів ряду.

Можна показати, що ряд для $\ln(1+t)$ є швидко збіжним не тільки при $t = 1$, а й при будь-якому $t \in (0;1]$. Це дозволяє використовувати ряд для ефективного обчислення, приміром значення $\ln(n+1)$, якщо вже відоме значення $\ln n$. Справді,

$$\ln(n+1) = \ln n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N},$$

де $0 < \dfrac{1}{n} \le 1$, і тому значення $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ можна ефективно обчислити.

5. Степеневі ряди часто використовують для наближеного обчислення визначених інтегралів.

Приміром, обчислімо значення $\displaystyle\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$ з точністю до $\varepsilon = 10^{-3}$.

❍Первісна для функції $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ не виражається в елементарних функціях. Можливість зінтегрувати степеневе розвинення для функції $f(x)$ дозволяє подолати цю складність. Наближене обчислення такого інтеграла виявляється не складніше, ніж наближене обчислення значень синуса.

[*Розвиваємо підінтегральну функцію у степеневий ряд, який збігається для будь-якого $x \in \mathbb{R}$.***]**

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

[*Інтегруючи розвинення, дістаємо знакопочережний ряд.***]**

$$\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^2 x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

[*Оцінимо похибку наближення суми знакопочережного ряду його частковою сумою.*]

$$\left|R_n\right| < \frac{2^{2n+3}}{(2n+3)\cdot(2n+3)!}.$$

[*Визначаємо скільки членів ряду треба взяти, щоб одержати потрібну точність.*]

$$\frac{2^{2n+3}}{(2n+3)\cdot(2n+3)!} < 0,001 \Rightarrow n \geq 3.$$

$$\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} = 2 - \frac{8}{3\cdot 3!} + \frac{32}{5\cdot 5!} - \frac{128}{7\cdot 7!} \approx 1,605.$$

12.3. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою рядів

У разі, якщо диференціальне рівняння не можна зінтегрувати у квадратурах (виразити їх розв'язки через елементарні функції або інтеграли від них), є можливість розвинути розв'язок цього рівняння у степеневий ряд.

1. Метод послідовних диференціювань. Цей метод проілюструємо на задачі Коші:

$$y' = f(x,y), y(x_0) = y_0,$$

де функція $f(x,y)$ така, що розв'язок $y = y(x)$ цієї задачі в деякому околі точки x_0 існує, єдиний і є аналітичною функцією (функція $f(x,y)$ має всі частинні похідні за змінними x та y).

Тоді розв'язок $y = y(x)$ можна розвинути в цьому околі в ряд Тейлора

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Щоб явно знайти цей розв'язок, достатньо обчислити значення всіх похідних $y^{(n)}(x_0)$ функції $y(x)$ у точці x_0. Відповідно до початкової умови маємо

$$y(x_0) = y_0,$$

а використовуючи диференціальне рівняння $y' = f(x,y)$, знаходимо

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Далі, диференціюючи рівняння $y' = f(x,y)$ за змінною x, дістаємо

$$y'' = f'_x(x,y) + f'_y(x,y)y'.$$

звідки

$$y''(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)y'(x_0).$$

Так само одержують наступні похідні. Підставляючи в ряд Тейлора значення похідних в точці x_0, дістаємо скільки потрібно перших членів степеневого ряду функції $y(x)$.

Цей метод можна застосувати і до розв'язання диференціальних рівнянь будь-якого порядку, розв'язаного щодо старшої похідної:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Недоліком цього методу є те що дуже рідко вдається одержати функціональну чи рекурентну залежність похідної $y^{(n)}(x_0)$ від свого номера. Отже, не є можливим визначити весь ряд, який задає розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння. Однак, в інженерних задач, коли достатньо знайти наближене значення, цього може бути достатньо.

2. Приміром, знайдімо перші чотири члени розвинення в Тейлорів ряд розв'язку задачі Коші: $y' = y^2 + e^x - 2, y(0) = 2$.

❍Оскільки початкову умову задано в точці $x = 0$, то розвинення розв'язку шукатимемо за степенями x:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

[*Значення $y'(0)$ знаходимо підставляючи в диференціальне початкову умову: $x = 0, y = 2$.***]**

$$y'(0) = 3.$$

[*Диференціюємо диференціальне рівняння за змінною x, пам'ятаючи, що $y = y(x)$, і підставляємо початкові умови: $x = 0, y = 2, y' = 3$.***]**

$$y''(x) = 2yy' + e^x; \quad y''(0) = 13.$$

$$y'''(x) = 2(y')^2 + 2yy'' + e^x; \; y'''(0) = 71.$$

Шукане розвинення:

$$y(x) = 2 + 3x + \frac{13}{2}x^2 + \frac{71}{6}x^3 + \ldots . \bullet$$

3. Метод невизначених коефіцієнтів. Метод проілюструємо на прикладі розв'язання задачі Коші:

$$y'' = F(x, y, y'), y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0.$$

Метод полягає, що розв'язок задачі Коші шукають у вигляді

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

з невизначеними коефіцієнтами $a_0, a_1, ..., a_n, ...$.

Далі знаходять степеневі розвинення y' та y'' і підставляють усі три розвинення в диференціальне рівняння.

Таким чином одержують рекурентне співвідношення для коефіцієнтів ряду.

4. Приміром, знайдімо розв'язок задачі Коші:

$$y'' = -xy, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

у вигляді суми ряду і визначмо область збіжності одержаного ряду.

❍Знайдімо розв'язок задачі Коші у вигляді

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

З початкових умов випливає, що

$$a_0 = y(0) = 0, a_1 = y'(0) = 1.$$

Розвиваємо $xy(x)$ та $y''(x)$ у степеневі ряди:

$$xy(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \begin{bmatrix}\text{заміна} \\ k = n+1\end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k,$$

$$y''(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x^n\right)'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} =$$

$$= \begin{bmatrix}\text{заміна} \\ k = n-2\end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k =$$

$$= 2a_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k.$$

Підставляючи ці розвинення в рівняння $y'' + xy = 0$, дістаємо рівність

$$2a_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big((k+2)(k+1)a_{k+2} + a_{k-1}\Big) x^k = 0,$$

яке виконано в деякому околі точки $x_0 = 0$. Ця рівність правильна лише в разі, коли a_2 і всі коефіцієнти при членах x^k дорівнюють нулю:

$$a_2 = 0;\ (k+2)(k+1)a_{k+2} + a_{k-1} = 0, k \in \mathbb{N}.$$

Заміняючи $n = k - 1$, і враховуючи одержані раніше значення для a_0 та a_1, дістаємо систему

$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, \\ a_{n+3} = -\dfrac{a_n}{(n+3)(n+2)}, n = 0,1,2,... \end{cases}$$

Звідси випливає, що

$$a_0 = a_3 = a_6 = ... = a_{3n} = 0;$$
$$a_2 = a_5 = a_8 = ... = a_{3n+2} = 0.$$

Випишімо коефіцієнти a_{3n+1} з номерами $1, 4, 7, ...$:

$$a_1 = 1,$$
$$a_4 = -\frac{a_1}{4 \cdot 3} = -\frac{1}{3 \cdot 4},$$
$$a_7 = -\frac{a_4}{7 \cdot 6} = \frac{1}{(3 \cdot 4)(6 \cdot 7)};$$
$$a_{10} = -\frac{a_7}{10 \cdot 9} = -\frac{1}{(3 \cdot 4)(6 \cdot 7)(9 \cdot 10)}$$

Методом математичної індукції можна довести, що

$$a_{3n+1} = \frac{(-1)^n}{(3 \cdot 4)(6 \cdot 7)...(3n \cdot (3n+1))}.$$

Отже,

$$y(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot ... \cdot 3n \cdot (3n+1)}.$$

За допомогою ознаки д'Аламбера, дістаємо, що ряд збігається на всій числовій прямій. ●