

[A-3] COURSE SYLLABUS

1. COURSE DESCRIPTION (Approximately 100 words)

2. COURSE GOALS AND OBJECTIVES (Approximately 100 words)

3. TEXTBOOK (Title, Author, Publisher, Year of Publication, etc.)

4. REFERENCE

5. COURSE REQUIREMENTS AND GRADES

--

6. COURSE CALENDAR

Week	Main Content
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	

ЛЕКЦІЯ 1. ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

- 1.1. Інтеграл Фур'є
- 1.2. Інтегральне перетворення Фур'є
- 1.3. Властивості перетворення Фур'є
- 1.4. Дельта-функція Дірака

Періодичні функції або функції задані на скінченному проміжку можна за певних умов розвинути в ряд Фур'є. Інтеграл Фур'є можна вважати аналогом такого розвинення для неперіодичних функцій, які задано на нескінченному проміжку.

1.1. Інтеграл Фур'є

1. Інтеграл Фур'є в дійсній формі. Будь-яку функцію f , яка на відрізку $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ справджує умови розвинності в ряд Фур'є, можна розвинути на цьому відрізку у тригонометричний ряд Фур'є:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n x) + b_n \sin(\omega_n x)), \omega_n = \frac{2\pi}{T} n,$$

з коефіцієнтами

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\omega_n t) dt, n = 0, 1, 2, \dots;$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(\omega_n t) dt, n = 1, 2, \dots$$

Якщо функцію f означено в інтервалі ширшому ніж відрізок $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ (приміром, на всій осі), то розвинення її в ряд Фур'є відтворить значення цієї функції лише на відрізку $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ і продовжить її на всю числову вісь як періодичну функцію з періодом T . Тому, якщо функцію $f(x)$ (узагалі кажучи, неперіодичну) означено на всій числовій осі, то у формулах розвинення можна спробувати спрямувати $T \rightarrow +\infty$. При цьому природно вимагати, щоб виконувались умови:

1) f справджує умови розвивності в ряд Фур'є на будь-якому скінченному відрізку осі Ox ;

2) функція f *абсолютно інтегровна* на всій числовій осі, тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = K < +\infty.$$

Теорема 1 (Фур'є).

Якщо функція f справджує умови Діріхле на кожному скінченному відрізку (кусково-неперервна, кусково-монотонна, обмежена) і є абсолютно інтегровою, то її можна зобразити *інтегралом Фур'є*

$$I(x) = \int_0^{+\infty} (A(\omega) \cos(\omega x) + B(\omega) \sin(\omega x)) d\omega,$$

де

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\omega x) dt,$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega x) dt.$$

Причому:

1) $f(x) = I(x)$, якщо x — точка неперервності функції f ;

2) $I(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$, якщо x — точка розриву функції f .

Інтеграли для $A(\omega), B(\omega)$ розуміють у сенсі головного значення:

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx.$$

Формулу

$$f(x) = \int_0^{+\infty} (A(\omega) \cos(\omega x) + B(\omega) \sin(\omega x)) d\omega,$$

називають *інтегральною формулою Фур'є*, а інтеграл, який стоїть праворуч — *інтегралом Фур'є у дійсній формі*.

Функції $A(\omega), B(\omega)$ є аналогами відповідних коефіцієнтів Фур'є a_n та b_n 2π -періодичної функції, але коефіцієнти ряду Фур'є означені для дис-

кретних значень n , тоді як $A(\omega), B(\omega)$ означені для неперервних значень $\omega \in (-\infty; +\infty)$.

2. Комплексна форма інтеграла Фур'є. За аналогією з комплексною формою ряду Фур'є T -періодичної функції:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\omega_n x}, \omega_n = \frac{2\pi}{T} n,$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\omega_n x} dx, n \in \mathbb{Z},$$

за умови виконання умов теореми Фур'є для функції f можна записати *інтегральну формулу Фур'є в комплексній формі*:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

3. Амплітудний та фазовий спектри інтеграла Фур'є. Функцію $F(\omega)$ називають ще *спектральною функцією* (*спектральною щільністю*) інтеграла Фур'є.

Функцію

$$S(\omega) = |F(\omega)|$$

називають *амплітудним спектром*, а функцію

$$\varphi(\omega) = -\arg F(\omega), \arg z \in (-\pi; \pi],$$

— *фазовим спектром* функції $f(x)$.

Амплітудний та фазовий спектри неперіодичної функції, що зображуються інтегралом Фур'є, є суцільними на відміну від дискретних спектрів періодичної функції, яка розвивається в ряд Фур'є.

1.2. Інтегральне перетворення Фур'є

1. Інтегральне перетворення функції. Нехай функція f задана в інтервалі $(a; b)$, скінченному або нескінченному.

Означення 1 (інтегрального перетворення).

Інтегральним перетвором функції $f(x)$ називають функцію

$$F(\omega) = \int_a^b K(x, \omega) f(x) dx.$$

Перехід від функції до її інтегрального перетвору називають *інтегральним перетворенням (прямим)*. Перехід від інтегрального перетвору до функції називають *оберненим інтегральним перетворенням*.

Функцію $K(t, \omega)$, що є означувальною для певного перетворення, називають *ядром* перетворення.

Припускають, що інтеграл існує у властивому чи невластивому сенсі.

2. Розгляньмо функцію f для якої виконано умови теореми Фур'є (п. 15.1.1.1).

Означення 2 (перетворення Фур'є).

Перехід від функції $f(x)$ до її *перетвору Фур'є*

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

називають *прямим перетворенням Фур'є* і позначають

$$\mathcal{F}\{f(x)\}(\omega) = F(\omega).$$

Перехід від інтегрального перетвору $F(\omega)$ до функції

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

називають *оберненим перетворенням Фур'є* і позначають

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}(x) = f(x).$$

Ядром інтегрального перетворення Фур'є є функція

$$\boxed{K(x, \omega) = e^{-i\omega x}}.$$

Оператор \mathcal{F} називають *оператором Фур'є*.

3. Якщо $F(\omega)$ є перетвором Фур'є абсолютно інтегровної функції $f(x)$, то $F(\omega)$ обмежена для всіх $\omega \in \mathbb{R}$.

Нехай f — неперервно диференційовна функція, така, що f та f' абсолютно інтегровні на всій числовій осі. Тоді $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

4. Знайдімо перетвір Фур'є функції $f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (\alpha > 0)$.

Оскільки,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha} \Big|_0^A = \lim_{A \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha A}}{\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha},$$

то функція є абсолютно інтегрованою і справджує всі вимоги теореми Фур'є. Отже для неї існує перетвір Фур'є

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x - i\omega x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + i\omega)x} dx = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{e^{-(\alpha + i\omega)x}}{-(\alpha + i\omega)} \Big|_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\alpha + i\omega} - \frac{e^{-(\alpha + i\omega)A}}{\alpha + i\omega} \right) = \frac{1}{\alpha + i\omega} = \frac{\alpha - i\omega}{\alpha^2 + \omega^2}, \end{aligned}$$

оскільки $|e^{-(\alpha + i\omega)A}| = e^{-\alpha A} |e^{-i\omega A}| = e^{-\alpha A} \rightarrow 0$, коли $A \rightarrow +\infty$.

1.3. Властивості перетворення Фур'є

1. Лінійність. Якщо функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ мають перетвори Фур'є $F(\omega)$ та $\Phi(\omega)$, то для будь-яких $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta \varphi(x)\}(\omega) = \alpha F(\omega) + \beta \Phi(\omega);$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\alpha F(\omega) + \beta \Phi(\omega)\}(x) = \alpha f(x) + \beta \varphi(x).$$

2. Перетвір Фур'є похідної. Якщо функція $f(x)$ та її похідні $f^{(k)}(x)$ до порядку m включно мають перетвори Фур'є і $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\omega)$, то

$$\mathcal{F}\{f^{(k)}(x)\} = (i\omega)^k F(\omega), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

3. Перетвір Фур'є інтеграла. Якщо функція $f(x)$ має перетвір Фур'є $F(\omega)$ і $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$, то

$$\mathcal{F}\left\{ \int_{-\infty}^x f(t) dt \right\} = \frac{F(\omega)}{i\omega}.$$

4. Перетвір Фур'є зміщеної функції. Якщо функція $f(x)$ має перетвір Фур'є $F(\omega)$, то

$$\mathcal{F}\{f(x - a)\} = e^{-i\omega a}F(\omega).$$

5. Зсув аргументу перетвору Фур'є. Якщо функція $f(x)$ має перетвір Фур'є $F(\omega)$, то

$$\mathcal{F}\{e^{-i\omega a x}f(x)\} = F(\omega + a).$$

6. Подібність. Якщо функція $f(x)$ має перетвір Фур'є $F(\omega)$, то

$$\mathcal{F}\left\{f\left(\frac{x}{a}\right)\right\} = aF(a\omega), a > 0.$$

7. Згортка двох функцій. Згорткою двох функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$, означених для всіх $x \in \mathbb{R}$, називають нову функцію

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x - \tau)f_2(\tau)d\tau.$$

Згортка функцій має такі властивості:

- 1) $(\alpha f_1 + \beta f_2) * f_3 = \alpha(f_1 * f_3) + \beta(f_2 * f_3)$ (лінійність);
- 2) $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ (комутативність);
- 3) $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$ (асоціативність).

Якщо $f_1(x) \equiv 0, f_2(x) \equiv 0$, для $x < 0$, то

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_0^x f_1(x - \tau)f_2(\tau)d\tau.$$

8. Перетвір Фур'є згортки функцій. Якщо функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ має перетвори Фур'є $F_1(\omega)$ та $F_2(\omega)$, то

$$\mathcal{F}\{f_1(x) * f_2(x)\} = F_1(\omega)F_2(\omega).$$

9. Перетвір Фур'є добутку функцій. Якщо функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ має перетвори Фур'є $F_1(\omega)$ та $F_2(\omega)$, то

$$\mathcal{F}\{f_1(x)f_2(x)\} = \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega).$$

1.4. Дельта-функція Дірака

1. Дельта-функцією Дірака $\delta(t)$ або дельта-функцією називають узагальнену функцію, яку означають умовою

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1.$$

За допомогою такої функції описують удари, густину маси в точці, густину джерела теплоти в точці, точковий електричний заряд тощо.

2. За допомогою аналітичних функцій δ -функцію можна уявити, приміром, так.

Розгляньмо функцію з параметром λ :

$$\gamma(t, \lambda) = \frac{\lambda}{\pi(1 + \lambda^2 t^2)}.$$

Знайдімо

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma(t, \lambda) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0. \end{cases}$$

Однак

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{\pi(1 + \lambda^2 t^2)} dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \lambda t \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

Отже,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma(t, \lambda) = \delta(t).$$

Можливі й інші підходи до дельта-функції.

3. Голкуваті функції. Неперервну або кусково-неперервну функція $\gamma(t, \lambda)$ називають *голкуватою*, якщо:

$$1) \quad \gamma(t, \lambda) = \begin{cases} 0, & |t| > \lambda, \\ \geq 0 & |t| < \lambda; \end{cases}$$

$$2) \quad \int_{-\lambda}^{\lambda} \gamma(t, \lambda) dt = 1.$$

Можна показати, що наступні функції можуть бути прикладами голкуватих функцій:

1) неперервна голкувата функція (рис. 1.1).

$$\gamma(t, \lambda) = \begin{cases} 0, & |t| > \lambda, \\ \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{\lambda} \right) & |t| \leq \lambda; \end{cases}$$

2) кусково-неперервна голкувата функція (рис. 1.2)

$$\gamma(t, \lambda) = \begin{cases} 0, & |t| > \lambda, \\ \frac{1}{2\lambda} & |t| \leq \lambda; \end{cases}$$

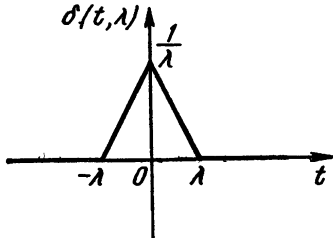


Рис. 1

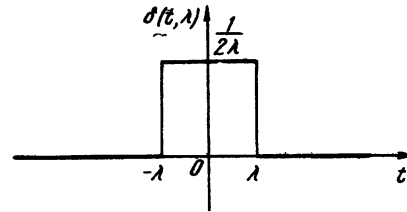


Рис. 2

З означення голкуватої функції випливає, що $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \gamma(t, \lambda) = 0$. З іншого боку, коли $\lambda \rightarrow 0$ середня висота піку необмежено зростає. Справді,

$$\frac{1}{2\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} \gamma(t, \lambda) dt = \frac{1}{2\lambda}.$$

4. Зміщену функцію Дірака $\delta(t - \lambda)$ визначають рівністю

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t \neq \tau, \\ \infty, & t = \tau, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) dt = 1.$$

5. Функцією Гевісайда називають функцію

$$\eta(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Знайдімо похідну від δ -функції:

$$\delta'(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \gamma'_t(t, \lambda) = \alpha'(t, \lambda),$$

$$\text{де } \alpha(t, \lambda) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \lambda t, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \alpha(t, \lambda) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} = \eta(t).$$

$$\alpha'_t(t, \lambda) = \gamma(t, \lambda) \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \alpha'_t(t, \lambda) = \eta'(t) \Rightarrow$$

$$\boxed{\eta'(t) = \delta(t)}.$$

6. Фільтрувальну властивість δ -функцію виражає співвідношення

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega \tau} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1.$$