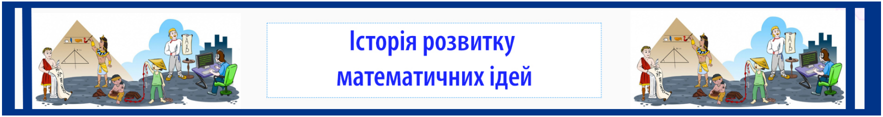
History of the development of mathematical ideas

Lecture 3. Ancient Greece Mathematics.

O. Tymoshenko

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute



Зміст

Особливості давньогрецької математики та давньогрецька система числення

Вступ

Теоретична частина математики має витоки у наукових та філософських школах Стародавньої Греції. Внесок цих шкіл є настільки значним, що навіть в наші часи теоретичні концепції загальних тверджень мають коріння в математиці греків.

Витоки давньогрецької математики

- У VI- IV ст. до н.е. Греція існувала як сукупність рабовласницьких держав-полісів. Потреби ремісничого виробництва і будівництва, прогрес сільського господарства і мореплавання наполегливо вимагали розвитку наукових знань. Починаючи з VII ст. до н.е., тут, і насамперед в Іонії, на стику єгипетської і вавилонської культур, починає зароджуватися нова збірна наука, у якій астрономічні, метеорологічні, математичні, механічні і медичні знання об'єднані в одне ціле з філософськими, політичними, географічними і економічними знаннями.

Витоки давньогрецької математики

- У VI- IV ст. до н.е. Греція існувала як сукупність рабовласницьких держав-полісів. Потреби ремісничого виробництва і будівництва, прогрес сільського господарства і мореплавання наполегливо вимагали розвитку наукових знань. Починаючи з VII ст. до н.е., тут, і насамперед в Іонії, на стику єгипетської і вавилонської культур, починає зароджуватися нова збірна наука, у якій астрономічні, метеорологічні, математичні, механічні і медичні знання об'єднані в одне ціле з філософськими, політичними, географічними і економічними знаннями.
- У цю епоху греки черпали свої знання з єгипетських, вавилонських і фінікійських джерел. Характер цих знань був переважно практичний.

Витоки давньогрецької математики

Ісократ (близько 390 р. до н.е.) указує, що математичні знання були перейняті греками в єгиптян, оскільки єгиптяни мали жреців, які виконували найважливіші доручення, навчали молодь, займалися астрономією, рахунком і геометрією.

Figure: Рис.1. Ісократ- давньогрецький оратор.(http://ebooks.edu.gr)

Витоки давньогрецької математики

Визначний давньогрецький науковець-енциклопедист, філософ і логік давнього світу Аристотель (384-322 р. до н.е.) в роботі «Метафізика» також вказує на єгипетське походження грецької математики. Аналогічні міркування висловлює і Прокл (410-485 р. н.е.), античний філософ-неоплатонік, керівник Платонівскої Академії, у зведенні історії грецької геометрії у своїх коментарях до «Початків» Евкліда.

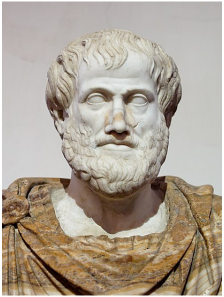


Figure: Рис.2. Бюст Аристотеля- давньогрецького філософа ©Wikipedia

Головні етапи давньогрецької математики

Остаточне виділення математики в самостійну теоретичну науку відбулося в Греції в середині V ст. до н.е., знайшовши своє завершення вже в елліністичну епоху в «Початках» Евкліда, приблизно 300 р. до н.е. Протягом трьох попередніх століть, у класичний період розвитку, формування математики як окремої науки супроводжувалось накопиченням елементарних знань, а головне, зростаючим посиленням теоретичних, логічних моментів у грецькій математиці. Спочатку розрізнені доведення лише окремих теорем стали загальним правилом. Чітко почали виділяти вихідні поняття й положення, всі отримані знання приводили в струнку систему.

Витоки давньогрецької математики

Єгипетська і вавилонська математика носила конкретно практичний характер, але містила перші зачатки теорії. Очевидно, що ці паростки абстрактно-математичного мислення спочатку були перенесені в Грецію, країну древньої культури.

Figure: Рис.3. Рафаель Санті. Афінська школа ©Wikipedia

Витоки давньогрецької математики

Спочатку давньогрецька математика не відрізнялася від єгипетської і вавилонської. Але з розвитком рабовласницької демократії, починаючи з VI ст. до н.е., у математичному мисленні греків усе більше підсилюється теоретична сторона. Рабам стали доручати «чорну» розумову роботу – переписування книг, виробництво обчислень, що зрештою привело і до відділення теоретичної математики від практичної. Від практичної арифметики, що називалася «логістикою», і прикладної геометрії, що одержала в Архімеда назва «геодезії», починають відділятися теоретична арифметика і теоретична геометрія, хоча вони, подібно іншим наукам, не були тоді ще самостійними дисциплінами, а входили як складові частини філософії. На відміну від практичної математики, теоретична арифметика і геометрія містили не тільки писання, як вирішення завдань, але і давали обґрунтування. Введення в математику доведень давало можливість узагальнювати отриманні результати, одержувати нові висновки.

Витоки давньогрецької математики

У математиці, так само як і в політичних і судових суперечках, ставало потрібним давати точні визначення понять, розвивати строгі доведення. Не випадково піфагорійці минулого були не тільки філософською школою, але і політичною партією реакційної рабовласницької аристократії.

Витоки давньогрецької математики

У математиці, так само як і в політичних і судових суперечках, ставало потрібним давати точні визначення понять, розвивати строгі доведення. Не випадково піфагорійці минулого були не тільки філософською школою, але і політичною партією реакційної рабовласницької аристократії.
Демокрит, який зробив значний внесок у розвиток грецької математики, був разом з тим і автором першої праці по логіці. «Початки» Евкліда і «Аналітики» Аристотеля за своїм духом взаємозалежні і мають загальний історичний корінь.

Головні етапи давньогрецької математики

Уже у школі Піфагора помітний процес накопичення абстрактних математичних фактів та з'єднання їх у теоретичні системи. Приміром, з арифметики виділено окрему область теорія чисел, тобто сукупність математичних знань, що відносяться до загальних властивостей операцій з натуральними числами.

Figure: Рис.4. Рафаель Санті. Піфагор (деталь Афінської школи)©Wikipedia

Головні етапи давньогрецької математики

На той час вже стали відомими й способи сумування найпростіших арифметичних прогресій. Розглядалися питання подільності чисел, введені арифметична, геометрична та гармонійна пропорції та різні середні.

Головні етапи давньогрецької математики

На той час вже стали відомими й способи сумування найпростіших арифметичних прогресій. Розглядалися питання подільності чисел, введені арифметична, геометрична та гармонійна пропорції та різні середні.

Поряд із геометричним доведенням теореми Піфагора було знайдено метод знаходження необмеженого набору трійок «піфагорових чисел».

Було відкрито багато математичних закономірностей теорії музики.

Головні етапи давньогрецької математики

На той час вже стали відомими й способи сумування найпростіших арифметичних прогресій. Розглядалися питання подільності чисел, введені арифметична, геометрична та гармонійна пропорції та різні середні.

Поряд із геометричним доведенням теореми Піфагора було знайдено метод знаходження необмеженого набору трійок «піфагорових чисел».

Було відкрито багато математичних закономірностей теорії музики.

Відбувалися абстрагування та систематизація геометричних відомостей.

У геометричних роботах вводилися та вдосконалювалися прийоми геометричного доведення. Розглядалися, зокрема, теорема Піфагора, завдання про квадратуру кола, трисекцію кута, подвоєння куба, квадрування низки площ, зокрема обмежених кривими лініями.

Головні етапи давньогрецької математики

- Чи не першою відкритою ірраціональністю став $\sqrt{2}$. Можна припускати, що вихідною точкою цього відкриття були спроби знайти загальну міру за допомогою алгоритму послідовного віднімання, відомого зараз як алгоритм Евкліда. Можливо, певну роль зіграла завдання математичної теорії музики: розподіл октави.
- Не останню роль, мабуть, зіграв характерний для піфагорської школи загальний інтерес до проблем теорії чисел. Стародавнім грекам було відомо дуже рано логічно стороге доведення ірраціональності $\sqrt{2}$ шляхом зведення до супротивного.
- Нехай $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, де m і n взаємно-прості числа. Тоді $m^2 = 2n^2$. звідки випливає, що m^2 – парне, отже, m – парне. Тоді і є непарним.
- Але, якщо m – парне, то m^2 ділиться на 4 і, отже, n^2 —парне. Парним є відповідно і число n. Формальне протиріччя, що вийшло, вказує на невірність припущення про раціональність.

Головні етапи давньогрецької математики

З появою ірраціональностей у незміцнілій грецькій математиці виникли серйозні труднощі як і у теоретично-числовому, так і геометричному плані. Була фактично поставлена під удар уся теорія математичної геометрії та теорія подоби. Необхідність наукового осмислення сутності відкритого явища та його поєднання зі сформованими уявленнями наштовхувала на подальший розвиток математичної теорії.

Головні етапи давньогрецької математики

З появою ірраціональностей у незміцнілій грецькій математиці виникли серйозні труднощі як і у теоретично-числовому, так і геометричному плані. Була фактично поставлена під удар уся теорія математичної геометрії та теорія подоби. Необхідність наукового осмислення сутності відкритого явища та його поєднання зі сформованими уявленнями наштовхувала на подальший розвиток математичної теорії.
Цей наступний етап ознаменований спробою створити потребу наукового дослідження загальної математичної теорії, яка була б придатною як для раціональних чисел, так і для ірраціональних величин. Якщо після відкриття ірраціональності виявилося, що сукупність геометричних величин (наприклад, відрізків) повніша, ніж нескінченність раціональних чисел, то здалося доцільним це більш загальне обчислення будувати в геометричній формі. Це літочислення було створено. Воно отримало назву геометричної алгебри.
Первинними елементами геометричної алгебри стали відрізки прямої. З ними було визначено всі операції обчислення.

Головні етапи давньогрецької математики

Абстрактність предмета математики і усталені прийоми математичних доведень були основними причинами того, що математика стала викладатися як дедуктивна наука, що представляє логічну послідовність теорем і завдань на побудову та використовує мінімум вихідних положень. Твори, у яких у час викладалися перші системи математики, називалися «початками».

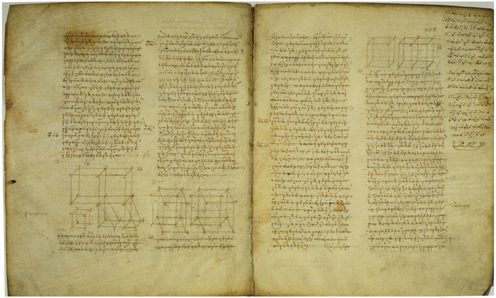


Figure: Рис. 5. «Початки» Евкліда. Ватиканскій манускрипт. ©Wikipedia

Головні етапи давньогрецької математики

Про автора «Початків» Евкліда збеpіглося дуже мало відомостей. Відомо, що він жив близько 300 р. до нашої ери в Олександрії, що входила на той час до складу єгипетського царства. Під час написання «Початки» Евклід, очевидно, не керувався метою скласти енциклопедію математичних знань свого часу. Він, мабуть, прагнув викласти лише основи математики як логічно досконалої математичної теорії, з мінімуму вихідних положень. У цьому сенсі «Початки» є раннім попередником сучасного способу аксіоматичного побудови математичних наук.

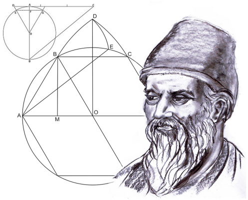


Figure: Евклід. https://ethnomir.ru/articles/evklid/

Давньогрецька система числення

Давньогрецька система числення

Розглянемо більш детально систему числення стародавньої Греції. Грецький рахунок був десятковим, зі збереженими слідами значно більш древнього четвертинного рахунку: числівник «окто» - 8 - має граматичну форму двійкового числа. При невеликих числах греки рахували на пальцях, для більш громіздких обчислень використовували камінчики («псефос»), що викладались на землі, а пізніше на дошці. Пізніше для розрізнення розрядів було створено спеціальні таблиці, які перетворилися в абак.

Давньогрецька система числення

Розглянемо більш детально систему числення стародавньої Греції. Грецький рахунок був десятковим, зі збереженими слідами значно більш древнього четвертинного рахунку: числівник «окто» - 8 - має граматичну форму двійкового числа. При невеликих числах греки рахували на пальцях, для більш громіздких обчислень використовували камінчики («псефос»), що викладались на землі, а пізніше на дошці. Пізніше для розрізнення розрядів було створено спеціальні таблиці, які перетворилися в абак.

Греки мали числівники до 1000, але не вище; слово «мирної» (миріада) позначало тоді ще «дуже багато» (як, втім, і в нас) і лише пізніше стало вживатися як 10 000. Втім, і числівник «гекатон»- 100 - вживався часто в сенсі невиразно великої кількості. Подання про більші числа і уміння працювати з ними давалося нелегко. Лише в III ст. до н.е.. Архімедом було написано знамените «Вирахування піщин» («Псаміт»), яке розвіяло оману про існування «найбільшого останнього» числа. Ним було отримано метод, яким можна виразити як завгодно велике число.

Давньогрецька система числення

При обчисленнях греки користувалися абаком, що перейшов до них, очевидно, від єгиптян, за посередництвом фінікійців. Єгиптяни, як повідомляє Геродот, на відміну від греків, пересували камінчики не ліворуч праворуч, а зверху вниз.

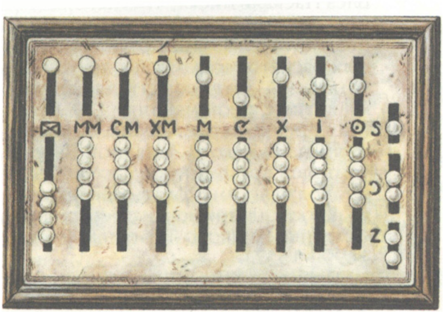


Figure: Абак. Лічильна дошка давніх греків (https://www.jnsm.com.ua/cgi-bin/u/book/sis.pl?Article=24action=show)

Грецька нумерація

Грецька нумерація

З появою в греків в X ст. до н.е. писемності, що виникла на основі фінікійського алфавіту, став застосовуватися і письмовий рахунок. Спочатку це була геродіановська нумерація, названа так по імені описавшого її граматику Геродіана (II ст. н.е.). Вона була у двох різновидах: атичною і беотійською, названих так по областях Греції.

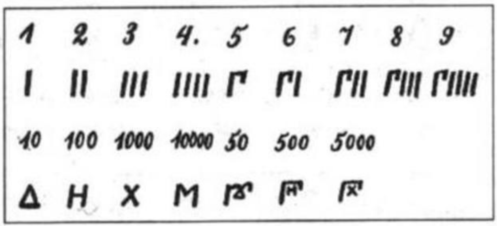


Figure: Нумерація Стародавньої Греції ©Wikipedia

Грецька нумерація

Так, наприклад 9 821 писалося (атичні) як

Figure: Число 9821 ©Wikipedia

Грецька нумерація

Десь близько 450 р. до н. е. греки прийняли алфавітний запис для представлення чисел; перші дев'ять літер грецького алфавіту були пов'язані з першими дев'ятьма цілими числами, наступні дев'ять літер представляли перші дев'ять цілих кратних 10, а останні дев'ять літер використовувалися для перших дев'яти цілих кратних 100.

Figure: Зв'язок літер з числами у Стародавній Греції. ©Wikipedia

Грецька нумерація

Малоймовірно, що ранні піфагорійці мали будь-які цифрові символи, тому вони, мабуть, думали про числа суто візуальним способом, у вигляді камінців, покладених у пісок, або у вигляді точок у певних геометричних візерунках. Таким чином, числа були класифіковані як трикутні, квадратні, п'ятикутні і так далі, відповідно до форм, утворених розташуванням крапок. Цифри, які можуть бути представлені в геометричній формі, нині називають фігурними, або багатокутними, числами. Сам Піфагор був знайомий принаймні з трикутними числами і, ймовірно, з квадратними числами, багатокутні числа розглядалися пізнішими членами його школи.

Грецька нумерація

Числа 1, 3, 6 і 10 є прикладами трикутних чисел, оскільки кожне з них підраховує кількість точок, які можна рівномірно розташувати в рівносторонньому трикутнику.

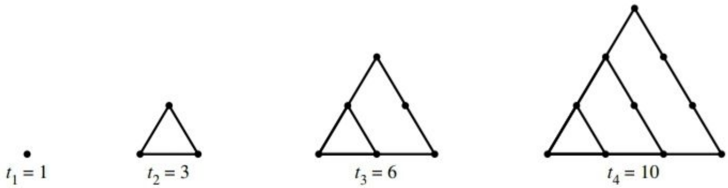


Figure: Приклади трикутних чисел © David M. Burton. The History of Mathematics

Грецька нумерація

Аналогічно, числа 1, 4, 9 і 16 називаються квадратними, тому що як крапки їх можна зобразити квадратами.

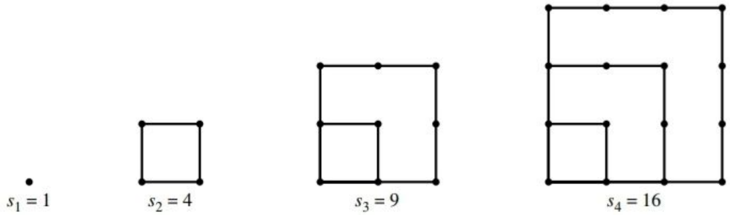


Figure: Приклади квадратних чисел © David M. Burton. The History of Mathematics

Грецька нумерація

З таких конфігурацій можна прочитати деякі чудові теоретико-числові закони. Наприклад, сума двох послідовних трикутних чисел завжди дорівнює квадратному числу, «сторона» якого така сама, як «сторона» більшого з двох трикутників. Це можна підтвердити геометрично, розділивши крапки похилою рискою, а потім підрахувавши їх, як на наступному малюнку. Так само легко довести результат алгебраїчним способом.

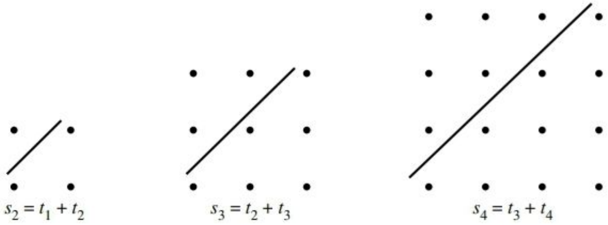


Figure: Правила додавання чисел © David M. Burton. The History of Mathematics

Грецька нумерація

Однак спочатку зверніть увагу на те, як утворюються трикутні числа; кожне нове одержується з попереднього трикутного числа шляхом додавання ще одного рядка, що містить на одну крапку більше, ніж у попередньому доданому рядку. Таким чином, якщо t_n позначає n -е трикутне число, то

$$t_n = t_{n-1} + n = t_{n-2} + (n-1) + n = t_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n =$$

$$= t_1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n-1) + n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n-1) + n$$

Ідея полягає в тому, щоб скласти разом два трикутники, кожен з яких представляє t_n (отже, кожен складається з рядків точок), щоб отримати прямокутний масив зі сторонами n і $n+1$.

Грецька нумерація

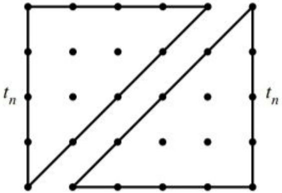


Figure: Приклад додавання при $n = 5$.

Зрозуміло, що такий масив містить $n(n+1)$ точок і т. д

$$2t_n = n(n+1)$$

що еквівалентно,

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Грецька нумерація

За наявності цієї формули легко побачити, що -е квадратне число є сумою двох послідовних трикутних чисел

$$s_n = n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = t_n + t_{n-1}.$$

Як узагальнення, отримуємо бонусом вираз для суми перших n чисел:

$$1 + 2 + 3 + 4 ... + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Грецька нумерація

Для полегшення додавання, а також і віднімання служили особливі таблиці:

α	ι	θ	1	10	9
α	θ	η	1	9	8
α	η	ζ	1	8	7

Figure: Таблиця додавання

За допомогою заучених або заготовлених таблиць, абака або просто пальців здійснювалось і віднімання. Від' ємних чисел і нуля грецька математика не знала. Множення здійснювалось або по «єгипетському» способу, або по грецькому способу, причому користувалися таблицею множення, яку потрібно було пам'ятати або ж мати під рукою. Такі таблиці були до 10000. У неопіфагорійця Нікомаха (близько 100 р. н.е.), чиє «Піфагорійське введення в арифметику» дійшло до нас, була квадратна таблиця, побудована точно так само, як наша шкільна таблиця множення.

Мілетська школа

Мілетська школа

Зародження грецької математики пов' язується з легендарною фігурою Фалеса (близько 600 р. до н.е.), засновника в Греції самої ранньої філософської стихійно-матеріалістичної школи. Філософія мілетської, так само як і заснованої Гераклітом (близько 530-470 р. до н.е.) ефеської школи, була спрямована проти ідеалістичної і метафізичної ідеології родової аристократії.

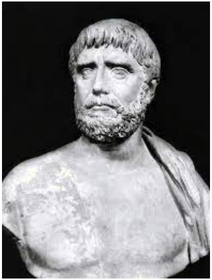


Figure: Фалес Мілетський (https://www.peoples.ru/science/philosophy)

Мілетська школа

По твердженнях Геродота, Демокрита і Платона, Фалес був фінікійського походження. Він був купцем в Мілете, центру морської торгівлі на іонійському узбережжі. Звідси в першій половині VI ст. до н.е. Фалес відправився в подорож, відвідав Єгипет, де і познайомився з математикою. Сполучення витоків природознавства і філософії з сукупністю практичних завдань привело до спроб моністичного пояснення світу. Фалес намагався пояснити різноманіття природи з єдиного початку, відшукати в хаосі явищ закономірність. Намагаючись дати розумні, логічні пояснення явищ, Фалес почав підходити і до математичних положень із вимогою: не тільки висловити, але й довести їх.

Мілетська школа

Узагальнюючи знання єгиптян і вавилонян, мілетська школа прагнула знайти відповідь на питання про основу буття, і відповідно до зростання логічного елемента в суспільному мисленні шукала і обґрунтування окремих положень геометрії. І якщо єгипетська геометрія залишалася в основному геометрією площ, зберігаючи в цьому прямий зв'язок зі своїм походженням із геодезією, тепер вона стала більше абстрактною. Ще в більшій мірі, чим у єгиптян, користувалися кресленням; прямі лінії розглядалися не тільки як границі земельних ділянок, на кресленні вивчалися властивості трикутників, кутів, кіл, важливу роль стало відігравати поняття подібності.

Піфагорійська школа

Піфагорійська школа

Наприкінці VI ст. до н.е. внаслідок греко-перських війн культурні центри Греції перемістилися зі сходу на захід, у її південно-італійські колонії. У цієї землеробської, відсталої в порівнянні з Іонією країні виникли ідеалістичні школи піфагорійців і елеатів. Їх боротьба проти матеріалізму і діалектики мілетської і ефеської школи була відбиттям гострої політичної боротьби між реакційною землеробською аристократією і демосом, що бушувала тоді у всіх полісах південної Італії.

Піфагорійська школа

Піфагорійська філософія виходила із критики наївного матеріалістичного монізму мілетської школи. Для піфагорійців будь-яке число виявляло собою щось більше, ніж кількісну величину. Наприклад, число 2, відповідно до їх погляду, означало розходження і тому ототожнювалося з думкою. Четвірка представляла справедливість, тому що це перше число, рівне добутку двох однакових множників. Піфагорійці також відкрили, що сума деяких пар квадратних чисел є знову квадратне число. Наприклад, сума 9 і 16 дорівнює 25, а сума 25 і 144 дорівнює 169. Такі трійки чисел, як 3, 4 і 5 або 5, 12 і 13, називаються піфагоровими числами. Вони мають геометричну інтерпретацію: якщо два числа із трійки дорівняти довжинам катетів прямокутного трикутника, то третє число буде дорівнює довжині його гіпотенузи. Така інтерпретація, мабуть, привела піфагорійців до усвідомлення більш загального факту, відомого нині за назвою теореми Піфагора, відповідно до якої в будь-якому прямокутному трикутнику квадрат довжини гіпотенузи дорівнює сумі квадратів довжин катетів.

Піфагорійська школа

Піфагорійська філософія виходила із критики наївного матеріалістичного монізму мілетської школи. Для піфагорійців будь-яке число виявляло собою щось більше, ніж кількісну величину. Наприклад, число 2, відповідно до їх погляду, означало розходження і тому ототожнювалося з думкою. Четвірка представляла справедливість, тому що це перше число, рівне добутку двох однакових множників. Піфагорійці також відкрили, що сума деяких пар квадратних чисел є знову квадратне число. Наприклад, сума 9 і 16 дорівнює 25, а сума 25 і 144 дорівнює 169. Такі трійки чисел, як 3, 4 і 5 або 5, 12 і 13, називаються піфагоровими числами. Вони мають геометричну інтерпретацію: якщо два числа із трійки дорівняти довжинам катетів прямокутного трикутника, то третє число буде дорівнює довжині його гіпотенузи. Така інтерпретація, мабуть, привела піфагорійців до усвідомлення більш загального факту, відомого нині за назвою теореми Піфагора, відповідно до якої в будь-якому прямокутному трикутнику квадрат довжини гіпотенузи дорівнює сумі квадратів довжин катетів.

Піфагорійська школа

Найбільшим із грецьких математиків класичного періоду, що уступали по значимості отриманих результатів тільки Архімедові, був Евдокс (ок. 408 - 355 до н.е.). Саме він ввів поняття величини для таких об'єктів, як відрізки прямих і кутів. Маючи у своєму розпорядженні поняття величини, Евдокс логічно строго обґрунтував піфагорейський метод роботи з ірраціональними числами.

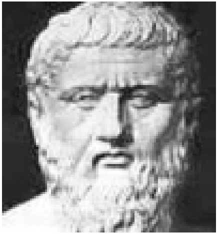


Figure: Евдокс Книдский (408 —355 рр. до н. е.) —древньогрецький математик, механік і астроном.(http://100v.com.ua/ru/Evdoks-Knidskiy-person)

Піфагорійська школа

Роботи Евдокса дозволили встановити дедуктивну структуру математики на основі явно формувалися аксіоми. Йому ж належить і перший крок у створенні математичного аналізу, оскільки саме він винайшов метод обчислення площ і обсягів, що одержавши назву «методу вичерпування». Цей метод складається в побудові вписаних і описаних плоских фігур або просторових тіл, які заповнюють («вичерпують») площу або обсяг тієї фігури або того тіла, що є предметом дослідження. Евдоксу ж належить і перша астрономічна теорія, що пояснює спостережуваний Рух планет. Запропонована Евдоксом теорія із чисто математичною; вона показувала, яким чином комбінації обертових сфер з різними радіусами і осями обертання можуть пояснити рухи Сонця, Місяця і планет, які вважалося мають нерегулярний характер.

Піфагорійська школа

Близько 300 до н.е. результати багатьох грецьких математиків були зведені в єдине ціле Евклідом, який написав математичний шедевр «Початки». З деяких проникливо відібраних аксіом Евклід вивів близько 500 теорем, що охопила вусі найбільш важливі результати класичного періоду. Свій твір Евклід почав з визначення таких термінів, як прямий, кут і коло. Потім він сформулював десять самоочевидних істин, таких, як «ціле більше кожної із частин». І із цих десяти аксіом Евклід зміг вивести всі теореми. Для математиків текст «Почав» Евкліда довгий час служив зразком строгості, поки в ІХХ ст. не виявилося, що в ньому є серйозні недоліки, такі як неусвідомлене використання не сформульованих у явному виді припущень.

Література

[1] David M. Burton. The History of Mathematics: An Introduction, 6th Edition, McGraw Hill Learning Solutions (2007)
[2] Craig Smory´nski, History of Mathematics, Springer (2008)
[3] Uta C.Merzbach and Carl B. Boyer, A History of Mathematics, 3d Edition, Printed in the United States of America (2011)
[4] Гуж М. М., Матеріали для проведення факультативних занять з математики, електронна версія (2020)

Дякую за увагу!