

# History of the development of mathematical ideas

## Lecture 4. The famous problems of antiquity.

O. Tymoshenko

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute



Історія розвитку  
математичних ідей



# Зміст

- 1 Задача Аполлонія
- 2 Задача на знаходження площі довільного трикутника
- 3 Алгоритм Евкліда
- 4 Апорії Зенона
- 5 Теорема Піфагора. Розв'язок рівняння Піфагора

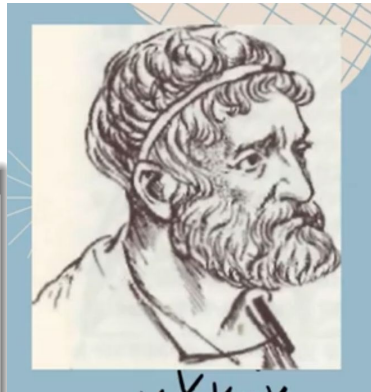
# Задача Аполлонія

# Задача Аполлонія

Задача Аполлонія — побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, що дотикається до трьох даних кіл. Задача розв'язується за допомогою застосування двох операцій: інверсії і переходу до концентричних кіл.

## Історія

За легендою, задача сформульована Аполлонієм Перзьким приблизно в 220 р. до н. е. у книзі «Дотики» під псевдонімом Епафай, яка була втрачена, але була відновлена в 1600 році Франсуа Віетом, «галльським Аполлонієм», як його називали сучасники. Робота була згадана Паппом Александрійським у IV столітті. У 1816 році Ж. Жергонн дав витончене розв'язання задачі Аполлонія.



Аполлоній.

<https://spacegid.com/apoloniyy.htm>

# Задача Аполлонія

У своєму творі «Дотики» Аполлоній мав на увазі три кола контактної геометрії, тобто кола з радіусом від 0 (точка) до нескінченності (пряма).

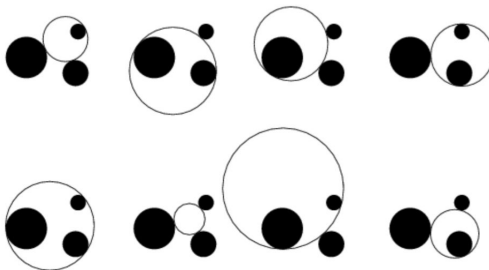


Figure: Кола Аполлонія. ©Wikipedia

Таким чином, для задачі Аполлонія існує 10 глобальних випадків.

# 10 випадків Задачі Аполонія

- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до трьох точок.

# 10 випадків Задачі Аполонія

- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до трьох точок.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до двох точок та прямої.

# 10 випадків Задачі Аполонія

- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до трьох точок.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до двох точок та прямої.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до точки і двох прямих.



# 10 випадків Задачі Аполонія

- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до трьох точок.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до двох точок та прямої.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до точки і двох прямих.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до трьох прямих.

# 10 випадків Задачі Аполонія

- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до трьох точок.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до двох точок та прямої.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до точки і двох прямих.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до трьох прямих.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до двох точок і кола.

# 10 випадків Задачі Аполонія

- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до трьох точок.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до двох точок та прямої.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до точки і двох прямих.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до трьох прямих.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до двох точок і кола.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до точки і двох кіл.

## 10 випадків Задачі Аполонія

- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до трьох точок.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до двох точок та прямої.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до точки і двох прямих.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до трьох прямих.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до двох точок і кола.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до точки і двох кіл.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до двох прямих і кола.

# 10 випадків Задачі Аполонія

- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до прямої і двох кіл.

# 10 випадків Задачі Аполонія

- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до прямої і двох кіл.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до точки, прямої і кола.

# 10 випадків Задачі Аполонія

- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до прямої і двох кіл.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до точки, прямої і кола.
- Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до трьох кіл.

## Задача на знаходження площі довільного трикутника



# Задача на знаходження площі довільного трикутника

Розв'язок даної проблеми виклав у своїй праці «Метрика» Герон Александрійський (Іст. н.е.). Формула, яку вивів Герон була названа на його честь, хоча і була відома ще Архімеду.

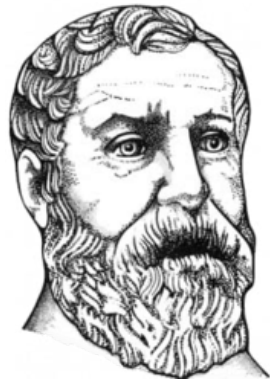
## Формулювання

Обчислення площі довільного трикутника за довжинами його сторін  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де  $p$  - напівпериметр трикутника:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$



Герон  
Александрійський.  
©Wikipedia

# Доведення 1. (тригонометричне)

$$S = \frac{1}{2} \cdot \sin \gamma$$

де  $\gamma$  - кут трикутника, що лежить навпроти сторони  $c$ . Тоді за теоремою косинусів:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Звідки маємо:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

# Доведення 1. (тригонометричне)

Отже,

$$\begin{aligned}\sin^2 \gamma &= 1 - \cos^2 \gamma = (1 - \cos \gamma)(1 + \cos \gamma) = \\ &= \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \\ &= \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} = \\ &= \frac{1}{4a^2b^2} (c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c).\end{aligned}$$

# Доведення 1. (тригонометричне)

Помітивши, що

$$a + b + c = 2p, \quad a + b - c = 2p - c, \quad a + c - b = 2p - 2b, \quad c - a + b = 2p - 2a,$$

отримуємо:

$$\sin \gamma = \frac{2}{ab} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Таким чином,

$$S = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin \gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

що і потрібно було довести.

## Доведення 2 (на основі теореми Піфагора)

За теоремою Піфагора маємо наступну рівність для гіпотенуз:

$$a^2 = h^2 + (c - d)^2$$

і

$$b^2 = h^2 + d^2$$

Якщо відняти від першої рівності другу, отримуємо  $a^2 - b^2 = c^2 - 2cd$ . Це рівняння дозволяє нам виразити  $d$  через сторони трикутника:

$$d = \frac{-a^2 + b^2 + C^2}{2c}$$

## Доведення 2 (на основі теореми Піфагора)

Для висоти  $h$  ми мали рівняння  $h^2 = b^2 - d^2$ , в яке можна підставити отриманий вираз для  $d$  та застосувати формули для квадратів:

$$h^2 = b^2 - \left( \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} \right)^2 = \frac{(2bc - a^2 + b^2 + c^2)(2bc + a^2 - b^2 - c^2)}{4c^2} =$$

$$\frac{((b+c)^2 - a^2) \cdot (a^2 - (b-c)^2)}{2c \cdot 2c} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2}$$

Помітивши, що

$$a + b + c = 2p, \quad a + b - c = 2p - c, \quad a + c - b = 2p - 2b, \quad c - a + b = 2p - 2a,$$

отримуємо:

$$h^2 = \frac{2(p-a) \cdot 2p \cdot 2(p-c) \cdot 2(p-b)}{4c^2} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}$$

## Доведення 2 (на основі теореми Піфагора)

Використовуючи основну рівність для площі трикутника

$$S = \frac{1}{2}ch$$

та підставляючи в неї отриманий вираз, загалом маємо:

$$S = \sqrt{\frac{c^2}{4} \cdot \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

що і потрібно було довести.

# Алгоритм Евкліда

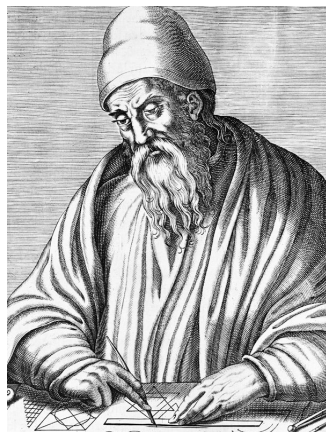


# Алгоритм Евкліда

Алгоритм Евкліда (також називається евклідов алгоритм) — ефективний метод обчислення найбільшого спільного дільника (НСД). Названий на честь грецького математика Евкліда, котрий описав його в книгах VII та X «Початки».

## Історія

Найбільший спільний дільник двох чисел це найбільше число, що ділить обидва дані числа без остачі. Алгоритм Евкліда заснований на тому, що найбільший спільний дільник (НСД) не змінюється, якщо від більшого числа відняти менше.



Евклід

[vhttps://interesnyefakty.org/evklid](https://interesnyefakty.org/evklid)

# Алгоритм Евкліда

## Алгоритм

$$(0): a = q_0 b + r_0,$$

$$(1): b = q_1 r_0 + r_1,$$

$$(2): r_0 = q_2 r_1 + r_2,$$

$$(3): r_1 = q_3 r_2 + r_3,$$

.....

$$(n-1): r_{n-3} = q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1},$$

$$(n): r_{n-2} = q_n r_{n-1} + 0.$$

# Алгоритм Евкліда

## Доведення алгоритму Евкліда:

Правильність алгоритму Евкліда можна довести за два кроки. Спочатку необхідно довести, що  $r_{n-1}$  дійсно є дільником  $a$  та  $b$ , а потім необхідно довести, що це є найбільший спільний дільник. Доведення, що  $r_{n-1}$  є дільником  $a$  та  $b$ . З  $n$ -го кроку випливає, що  $r_{n-2}$  ділиться на  $r_{n-1}$ .

Підставимо  $r_{n-2}$  в  $(n-1)$ -й крок. Маємо:

$$r_{n-3} = q_{n-1}r_{n-2} + r_{n-1},$$

$$r_{n-3} = r_{n-1}(q_{n-1}q_n + 1).$$

Таким чином  $r_{n-3}$  ділиться на  $r_{n-2}$ . Повторимо цю операцію  $n$  разів і отримаємо, що  $a$  ділиться на  $r_{n-1}$  та  $b$  на  $r_{n-1}$ . Отже, є дільником  $a$  та  $b$ .

# Алгоритм Евкліда

**Доведення, що  $r_{n-1}$  є найбільшим дільником  $a$  та  $b$ .**

За означенням число  $d$  називається найбільшим спільним дільником  $a$  та  $b$ , тоді і тільки тоді, коли для будь-якого довільного числа  $k$ , для якого виконується:  $a$  кратне  $k$  та  $b$  кратне  $k$  має виконуватись, що  $d$  кратне  $k$ . Нехай  $k$  є дільником  $a$  та  $b$ , тоді  $a$  кратне  $k$  та  $b$  кратне  $k$ , або можна сказати, що існують такі числа  $a_1$  та  $b_1$ , що

$$a = a_1k,$$

$$b = b_1k.$$

Підставимо в 1-й крок алгоритму:

$$a_1k = q_0b_1k + r_0,$$

$$r_0 = a_1k - q_0b_1k,$$

$$r_0 = k(a_1 - q_0b_1).$$

Отже,  $r_0$  кратне  $k$ . Підставимо в 2-й крок і аналогічно продовжимо до тих пір поки з останнього кроку не отримаємо, що  $r_{n-1}$  кратне  $k$  що доводить те, що  $r_{n-1}$  є найбільшим спільним дільником.

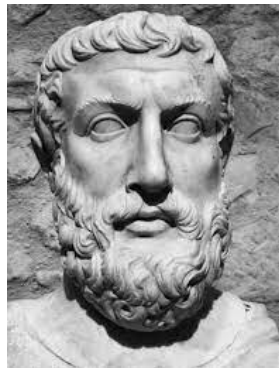
## Апорії Зенона

# Апорії Зенона

Апорії Зенона — зовні парадоксальні міркування на тему про рух і множинність, автором яких є учень Парменіда, давньогрецький філософ Зенон Елейський (VI століття до н. е.).

## Метод

Метод Зенона — це метода не прямого доказу, а метод від супротивного. Мислитель спростовував або зводив до абсурду тезу, протилежну первісній, дотримуючись одного з основних законів — закону вилучення третього, введенного Парменідом.



Зенон

<https://interesnyefakty.org/ze>

# Апорії Зенона

Апорії про рух

- **Дихотомія**

Суть першої з них у тому, що рух не може початися, адже для того, щоб пройти хоч би малу відстань, той, що рухається, повинен здолати її половину. Але ще перед тим він повинен здолати половину цієї половини. Проте раніше він повинен просунутися на половину відстані попередньої половини — і так до нескінченності. Отже, він взагалі не може рушити з місця.

# Апорії Зенона

Апорії про рух

- **Ахілл і черепаха**

У другій Апорії Ахілл, відомий серед героїв швидкістю свого бігу, змагається з черепахою. Вони стартують одночасно, але при цьому точка, звідки починає рух черепаха, знаходиться трохи попереду місця старту Ахілла. Бігун швидко долає відстань до точки, звідки починала шлях черепаха, але за цей час неспішна тварина все-таки встигла проповзти ще трішки вперед. Ахілл нестримно долає і цю малу відстань, але черепаха знову устигає відповзти трохи вперед. Ахілл знову переноситься в місце, де знаходилася черепаха, але та знову здолала деяку частину шляху. І так триває до нескінченності: Ахілл усе ближче до черепахи, але ніколи не може її не лише перегнати, але навіть наздогнати. Сенс перших двох апорій полягає в тому, що якщо простір ділимо до нескінченності, то рух нездійснений.



# Апорії Зенона

Апорії про рух

- **Стріла**

Третя Апорія — «Стріла», показує, що рух неможливий і при запереченні нескінченної подільності простору, тобто при його представленні у вигляді суми неділимих місць. Подивіться на стрілу, що летить, — пропонує Зенон. Вона завжди займає рівне собі місце, тобто покоїться в ньому. І так в кожен момент польоту стріли вона знаходиться в місці, в якому покоїться. Отже, скільки вона летить — стільки нерухома. Адже рух не може утворитися з суми станів спокою.

## Теорема Піфагора. Розв'язок рівняння Піфагора

# Теорема Піфагора. Розв'язок рівняння Піфагора

## Теорема Піфагора

Одна з найвідоміших геометричних теорем — теорема Піфагора, знаменитого давньогрецького філософа і математика. В історії математики знаходимо твердження, що цю теорему знали за багато років до Піфагора, наприклад, стародавні єгиптяни знали про те, що трикутник зі сторонами 3, 4 і 5 є прямокутним. У наш час теорема звучить так (маючи на увазі не тільки площі, але і довжини сторін прямокутного трикутника): у прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Піфагор(<https://school48tmn-avtorov/kratkaya-biografiya-pifagora-samoe-glavnoe.html>)

# Теорема Піфагора. Розв'язок рівняння Піфагора

Доведення.

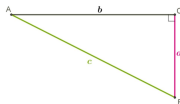


Figure: Прямокутний трикутник. ©Wikipedia

1. Побудуємо квадрат сторона якого дорівнює сумі катетів даного трикутника Площа квадрата дорівнює .

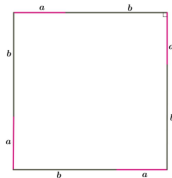


Figure: ©Wikipedia

# Теорема Піфагора. Розв'язок рівняння Піфагора

2. Якщо провести гіпотенузи  $c$  очевидно, що вони утворили квадрат всередині побудованого квадрата. Сторони чотирикутника дорівнюють  $c$ , а кути —прямі, оскільки гострі кути прямокутного трикутника в сумі дають  $90^\circ$ , тоді кут чотирикутника також дорівнює  $90^\circ$ , тому що разом всі три кута дають  $180^\circ$ . Отже, площа квадрата складається з чотирьох площ рівних прямокутних трикутників і площі квадрата, утвореного гіпотенузами.

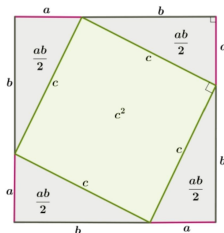


Figure: ©<https://miyklas.com.ua/>

# Теорема Піфагора. Розв'язок рівняння Піфагора

2. Якщо провести гіпотенузи  $c$  очевидно, що вони утворили квадрат всередині побудованого квадрата. Сторони чотирикутника дорівнюють  $c$ , а кути —прямі, оскільки гострі кути прямокутного трикутника в сумі дають  $90^\circ$ , тоді кут чотирикутника також дорівнює  $90^\circ$ , тому що разом всі три кута дають  $180^\circ$ . Отже, площа квадрата складається з чотирьох площ рівних прямокутних трикутників і площі квадрата, утвореного гіпотенузами.

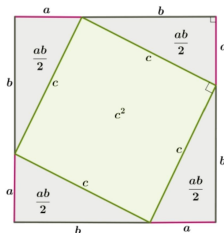


Figure: ©<https://miyklas.com.ua/>

На двох сторонах квадрата змінимо місцями відрізки  $a$  і  $b$ , при цьому довжина сторони квадрата не змінюється. Тепер площу квадрата можемо скласти з двох площ квадратів, утворених катетами  $a$  і  $b$  та двох площ прямокутників.

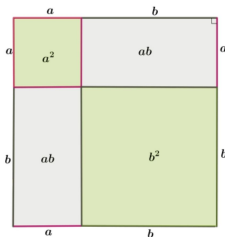


Figure: ©<https://miyklas.com.ua/>

4. З цього випливають висновки:

$$4 \cdot \frac{ab}{2} = 2abc^2 = a^2 + b^2,$$

що і є доведенням теореми Піфагора.

# Теорема Піфагора. Розв'язок рівняння Піфагора

Найпростіші розв'язки рівняння Піфагора називають піфагорові трійки: Піфагорові трійки —це три натуральні числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  такі, що виконується рівність

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Іншими словами, Піфагорові трійки —це сторони прямокутного трикутника, якщо всі вони є цілими. На мегалітичних спорудах в північній Європі є свідчення, що відомості про такі трійки були відомі до винайдення писемності. Такі трійки зазвичай записують у вигляді  $(a, b, c)$ . Деякі найвідоміші приклади:  $(3, 4, 5)$  та  $(5, 12, 13)$ .



# Література

- [1] David M. Burton. The History of Mathematics: An Introduction, 6th Edition, McGraw Hill Learning Solutions (2007)
- [2] Craig Smoryński, History of Mathematics, Springer (2008)
- [3] Uta C. Merzbach and Carl B. Boyer, A History of Mathematics, 3d Edition, Printed in the United States of America (2011)

Посилання.

-Heron's formula: Wikipedia. The Free Encyclopedia. —URL:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Heron-Euclidean\\_algorithm](https://en.wikipedia.org/wiki/Heron-Euclidean_algorithm) : Wikipedia. The Free Encyclopedia.—URL:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean\\_algorithm](https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_algorithm). — *Problem of Apollonius* : Wikipedia. The Free Encyclopedia. URL : [https://en.wikipedia.org/wiki/Problem\\_of\\_Apollonius](https://en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_Apollonius) — *Zeno's paradoxes* : Wikipedia. The Free Encyclopedia. URL : [https://en.wikipedia.org/wiki/Zeno's\\_paradoxes](https://en.wikipedia.org/wiki/Zeno's_paradoxes) : <https://miyklas.com.priamokutnikh-trikutnikiv-33079/teorema-pifagororg/wiki/>

Дякую за увагу!