**History of the development of mathematical ideas**

## Week 4. The famouse problems of antiquity.


# Лекція 4. Відомі задачі античних часів.

***1.*** *Задача Аполпонія*
***2***. *Задача на знаходження площі довільного трикутника*
***3***. *Алгоритм Евкліда*
***4.*** *Апорії Зенона*
***5***. *Теорема Піфагора. Розв'язок рівняння Піфагора*

## 1. Задача Аполлонія

*Задача Аполлонія* — побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, що дотикається до трьох даних кіл. Задача розв'язується за допомогою застосування двох операцій: інверсії і переходу до концентричних кіл.

За легендою, задача сформульована Аполлонієм Перзьким приблизно в 220 р. до н. е. у книзі «Дотики» під псевдонімом Епафай, яка була втрачена, але була відновлена в 1600 році Франсуа Вієтом, «галльським Аполлонієм», як його називали сучасники. Робота була згадана Паппом Александрійським у IV столітті. У 1816 році Ж. Жергонн дав витончене розв'язання задачі Аполлонія.

У своєму творі «Дотики» Аполлоній мав на увазі три кола контактної геометрії, тобто кола з радіусом від 0 (точка) до нескінченності (пряма).

**Таким чином, для задачі Аполлонія існує 10 глобальних випадків:**

1. Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до трьох точок. Рішення: З'єднаємо ці точки. Проведемо до цим відрізкам серединні перпендикуляри. Вони перетнуться в одній точці. Ця точка — центр шуканого кола.

2. Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до двох точок (далі A і B) та прямої (далі a). Спочатку проведемо пряму *AB*.
*Розв'язання:*

1) Якщо AB не паралельна a, то знайдемо їх перетин $C$. Побудуємо середнє геометричне відрізків $AC$ і $BC$. Відкладемо рівний йому відрізок $CK$ на прямій a. Коло, описане навколо $\Delta ABK$ — шукане.

2) Якщо $AB||a$, то проведемо серединний перпендикуляр до відрізка $AB$ і позначимо точку $K$ його перетину з прямою a. Коло, описане навколо $\Delta ABK$ — шукане.

3. Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до точки і двох прямих.
*Розв'язання:*

1) Якщо прямі не паралельні, то візьмемо точку їх перетину. Назвемо кут між цими прямими $\alpha$. З'єднаємо точку перетину прямих з заданою точкою $M$. Назвемо отриманий відрізок a. Впишемо в кут $\alpha$ довільне коло, яке перетне $a$, і позначимо його центр $O$ і точку перетину з a (кожна дасть свій розв'язок) $A$. Проведемо пряму $AO$. Проведемо паралельну їй пряму через $M$ і бісектрису кута $\alpha$. Їх перетин буде центром шуканого кола.

2) Якщо прямі паралельні, побудуємо пряму $AB$ ($A$ і $B$ — точки перетину з заданими прямими), перпендикулярну їм. Проведемо до відрізка $AB$ серединний перпендикуляр $b$. Проведемо коло з центром у заданій точці і радіусом, рівним половині $AB$. Її перетин з $b$ буде центром шуканого кола.

4. Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до трьох прямих.
*Розв'язання:*

1) Якщо серед них немає паралельних, то позначимо точки їх перетину $A$, $B$ і $C$. Коло, вписане в $\Delta ABC$ — шукане.

2) Якщо тільки 2 прямі паралельні, то єдина точка перетину бісектрис кутів, утворених паралельними прямими й третьої прямої, буде центром шуканого кола.

3)Якщо всі три прямі паралельні між собою, то кола не існує.

5. Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до двох точок (далі $A$ і $B$) і кола (далі ω).

1) Якщо $A$ і $B$ лежать на ω, то проведемо коло Ω, яке містить точки $A$ і $B$ та має з ω спільні точки. Проведемо радикальну вісь Ω і ω і перетнемо її з $AB$. Проведемо з точки перетину дотичну до ω і позначимо точку дотику K. Опишемо коло навколо $\Delta ABK$. Воно — шукане. Кожна дотична дасть свій розв'язок.

2) Якщо тільки *A* лежить на ω, то проведемо дотичну до ω в точці *A* і побудуємо точку $B'$, симетричну відносно А. Далі проведемо коло через *A, B* і точку, симетричну $B'$ відносно проведеної дотичної. Воно буде шуканим. Якщо В лежить на дотичній, то такого кола не існує. Якщо *BA* перпендикулярний до дотичної, то шукане коло — коло з діаметром *AB*.

3) Якщо *A* і *B* лежать на ω, ω — шукане.

6. Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до точки і двох кіл.

7. Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до двох прямих і кола.

8. Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до прямої і двох кіл.

9. Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до точки, прямої і кола.

10. Побудувати за допомогою циркуля і лінійки коло, дотичне до трьох кіл.

Вісім різних розв’язків задачі Аполлонія:

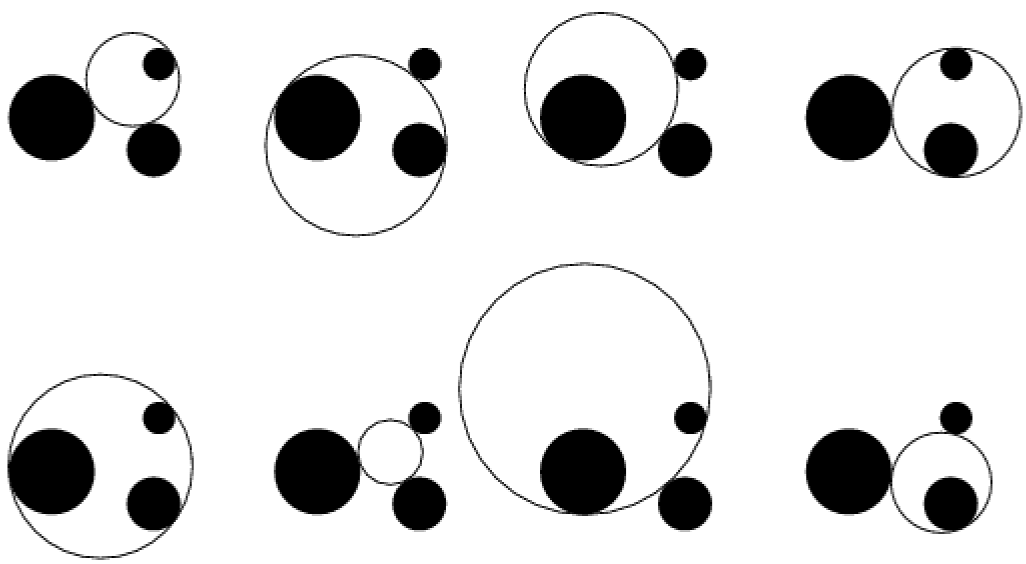

Рис.1. Задача Аполонія ©Wikipedia

## 2. Задача на знаходження площі довільного трикутника

Розв’язок даної проблеми виклав у своїй праці «Метрика» Герон Александрійський (I ст. н.е.). Формула, яку вивів Герон була названа на його честь, хоча і була відома ще Архімеду.

Формулювання: Обчислення площі довільного трикутника *S* за довжинами його сторін *a,b,c*

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

де $p$ - напівпериметр трикутника:

$$p=\frac{1}{2}\left(a+b+c\right)$$

Дана формула має два доведення:

***Доведення 1. (тригонометричне)***

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

де $\gamma$ - кут трикутника, що лежить навпроти сторони $c$. Тоді за теоремою косинусів:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,$$

Звідки маємо:

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Отже,

$$\sin^2\gamma=1-\cos^2\gamma=(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)=$$

$$\frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}\cdot\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab}=$$

$$\frac{c^2-(\mathrm{a}-\mathrm{b})^2}{2ab}\cdot\frac{(\mathrm{a}+\mathrm{b})^2-c^2}{2ab}=$$

$$\frac{1}{4a^2b^2}(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c).$$

Помітивши, що

$$a+b+c=2p,\ a+b-c=2p-c, a+c-b=2p-2b, a+b=2p-2a,$$

отримуємо:

$$\sin\gamma=\frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Таким чином,

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

що і потрібно було довести.

***Доведення 2 (на основі теореми Піфагора)***

За теоремою Піфагора маємо наступну рівність для гіпотенуз:

$$a^2 = h^2 + (c-d)^2 \ i \ b^2 = h^2 + d^2$$

Якщо відняти від першої рівності другу, отримуємо $a^2 - b^2 = c^2 - 2cd$ . Це рівняння дозволяє нам виразити *d* через сторони трикутника:

$$d = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}$$

Для висоти *h* ми мали рівняння $h^2 = b^2 - d^2$, $h^2 = b^2 - d^2$, в яке можна підставити отриманий вираз для *d* та застосувати формули для квадратів:

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}\right)^2 = \frac{(2bc - a^2 + b^2 + c^2)(2bc + a^2 - b^2 - c^2)}{4c^2} =$$

$$\frac{((b+c)^2 - a^2)}{2c} \cdot \frac{(a^2 - (b-c)^2)}{2c} = \frac{(b+c-a)(b+c+a)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2}$$

Помітивши, що

$$a+b+c = 2p,\ a+b-c = 2p-c, a+c-b = 2p-2b, a+b = 2p-2a,$$

отримуємо:

$$h^2 = \frac{2(p-a)\cdot 2p \cdot 2(p-c)\cdot 2(p-b)}{4c^2} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}.$$

Використовуючи основну рівність для площі трикутника $S = \frac{1}{2}ch$ та підставляючи в неї отриманий вираз, загалом маємо:

$$S = \sqrt{\frac{c^2}{4} \cdot \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

що і потрібно було довести.

## 3. Алгоритм Евкліда

Алгоритм Евкліда (також називається евклідів алгоритм) — ефективний метод обчислення найбільшого спільного дільника (НСД). Названий на честь грецького математика Евкліда, котрий описав його в книгах VII та X «Початки».

Найбільший спільний дільник двох чисел це найбільше число, що ділить обидва дані числа без остачі. Алгоритм Евкліда заснований на тому, що найбільший спільний дільник (НСД) не змінюється, якщо від більшого числа відняти менше.

*Алгоритм*

$$\text{(0): } a = q_0 b + r_0,$$
$$\text{(1): } b = q_1 r_0 + r_1,$$
$$\text{(2): } r_0 = q_2 r_1 + r_2,$$
$$\text{(3): } r_1 = q_3 r_2 + r_3,$$
$$\ldots\ldots$$
$$\text{(n-1): } r_{n-3} = q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1},$$
$$\text{(n): } r_{n-2} = q_n r_{n-1} + 0.$$

Алгоритм Евкліда ітеративний, тобто, пошук розв'язку відбувається за декілька кроків. Для того щоб знайти НСД($a$, $b$) на 0-му кроці знаходять остачу $r_0$ від ділення $a$ на $b$. На 1-му кроці знаходять остачу від ділення $b$ на $r_0$. Оскільки остачі зменшуються на кожному кроці але не можуть бути від'ємними, то цю операцію виконують $n$ кроків до тих пір поки не отримують остачу 0. Найбільшим спільним дільником є остання не нульова остача $r_{n-1}$. Кількість кроків в алгоритмі має бути скінченною, оскільки існує лише скінченна кількість цілих чисел між початковою остачею $r_0$ та нулем.

*Доведення алгоритму Евкліда:*

Правильність алгоритму Евкліда можна довести за два кроки. Спочатку необхідно довести, що $r_n - 1$ дійсно є дільником a та b, а потім необхідно довести, що це є найбільший спільний дільник. Доведення, що $r_{n-1}$ є дільником $a$ та $b$. З $n$-го кроку випливає, що $r_{n-2}$ ділиться на $r_{n-1}$. Підставимо $r_{n-2}$ в ($n$-$1$)-й крок.

Маємо:

$$r_{n-3} = q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1},$$

$$r_{n-3} = r_{n-1}(q_{n-1} q_n + 1).$$

Таким чином $r_{n-3}$ ділиться на $r_{n-2}$ . Повторимо цю операцію *n* разів і отримаємо, що *a* ділиться на $r_{n-1}$ та b на $r_{n-1}$. Отже, $r_{n-1}$ є дільником *a* та *b*.

*Доведення, що $r_{n-1}$ є найбільшим дільником a та* b .

За означенням число ***d*** називається найбільшим спільним дільником *a* та *b*, тоді і тільки тоді, коли для будь-якого довільного числа *k*, для якого виконується: *a* кратне *k* та *b* кратне *k* має виконуватись, що *d* кратне *k.*
Нехай *k* є дільником *a* та *b*, тоді а кратне *k* та *b* кратне *k*, або можна сказати, що існують такі числа $a_1$ та $b_1$, що

$$a = a_1 k,$$

$$b = b_1 k.$$

Підставимо в 1-й крок алгоритму:

$$a_1 k = q_0 b_1 k + r_0,$$

$$r_0 = a_1 k - q_0 b_1 k,$$

$$r_0 = k(a_1 - q_0 b_1).$$

Отже, $r_0$ кратне *k*. Підставимо $r_0$ в 2-й крок і аналогічно продовжимо до тих пір поки з останнього кроку не отримаємо, що $r_{n-1}$ кратне k що доводить те, що $r_{n-1}$ є найбільшим спільним дільником.

## 4. Апорії Зенона

Апорії Зенона — зовні парадоксальні міркування на тему про рух і множинність, автором яких є учень Парменіда, давньогрецький філософ Зенон Елейський (VI століття до н. е.). Свідчень про його життя й характер майже не залишилось. Левову частку свого філософування він відводив полеміці, відстоюванню істин, які вважав незаперечними. Захищаючи й обґрунтовуючи погляди свого вчителя й наставника Парменіда, Зенон заперечував .мислимість. чуттєвого буття множинності речей та їхнього руху. Уперше застосувавши доказ, як спосіб мислення, як пізнавальний прийом, Зенон прагнув показати, що множинність і рух не можуть мислитися без суперечності (і це йому цілком вдалося), тому множинність та рух не суть буття, а — єдине й непорушне.

Метод Зенона — це метода не прямого доказу, а метод .від супротивного. Мислитель спростовував або зводив до абсурду тезу, протилежну первісній, дотримуючись одного з основних законів — закону вилучення третього, введеного Парменідом. Така ж суперечка, де за допомогою заперечень ставлять супротивника

у скрутне становище і спростовують його кут зору, — прообраз діалогу, прообраз суб'єктивної діалектики.
Такий же метод широко застосовували софісти.
Назву славнозвісного винаходу Зенона — апорія — перекладають із давньогрецької як нерозв'язне (буквально: те, що не має виходу, безвихідне). Зенон — творець понад сорока апорій, певних фундаментальних трудів, що, за його задумом, мають підтвердити правильність учення Парменіда про буття світу як єдиного і як єдиної здатності розуму знаходити .єдине. буквально на кожному кроці, критикуючи звичайні, суто множинні уявлення про світ. Досить влучна апорія, що нагадує парадокс Парменіда, є положення, в якому піддано критиці суто множинні уявлення про буття: "якщо сутнє множинне, то одночасно має бути великим і малим, причому великим до безмежності та малим до зникнення".

**Апорії про рух**

- Дихотомія

Суть першої з них у тому, що рух не може початися, адже для того, щоб пройти хоч би малу відстань, той, що рухається, повинен здолати її половину. Але ще перед тим він повинен здолати половину цієї половини. Проте раніше він повинен просунутися на половину відстані попередньої половини — і так до нескінченності. Отже, він взагалі не може рушити з місця.

- Ахілл і черепаха

У другій Апорії Ахілл, відомий серед героїв швидкістю свого бігу, змагається з черепахою. Вони стартують одночасно, але при цьому точка, звідки починає рух черепаха, знаходиться трохи попереду місця старту Ахілла. Бігун швидко долає відстань до точки, звідки починала шлях черепаха, але за цей час неспішна тварина все-таки встигла проповзти ще трішки вперед. Ахілл нестримно долає і цю малу відстань, але черепаха знову устигає відповзти трохи вперед. Ахілл знову переноситься в місце, де знаходилася черепаха, але та знову здолала деяку частину шляху. І так триває до нескінченності: Ахілл усе ближче до черепахи, але ніколи не може її не лише перегнати, але навіть наздогнати. Сенс перших двох апорій полягає в тому, що якщо простір ділимо до нескінченності, то рух нездійсненний.

- Стріла

Третя Апорія — «Стріла», показує, що рух неможливий і при запереченні нескінченної подільності простору, тобто при його представленні у вигляді суми неділимих місць. Подивіться на стрілу, що летить, — пропонує Зенон. Вона завжди займає рівне собі місце, тобто покоїться в ньому. І так в кожен момент польоту стріли вона знаходиться в місці, в якому покоїться. Отже, скільки вона летить — стільки нерухома. Адже рух не може утворитися з суми станів спокою.

Вищенаведені апорії Зенона стосувалися застосування поняття нескінченності до руху, простору і часу. В інших апоріях Зенон демонструє інші, загальніші аспекти нескінченності. Однак, на відміну від трьох знаменитих апорій про фізичний рух, інші апорії викладені менш зрозуміло і стосуються в основному чисто математичних або загально філософських аспектів. З появою математичної теорії нескінченних множин інтерес до них суттєво впав.

*Історичне значення апорій Зенона*

Апорії Зенона викликали стільки суперечок в античній науці, як, напевно, жодне інше твердження. Пройшли тисячі років. Протягом багатьох століть студенти всього світу успішно спростовують Зенона на іспитах на вимогу своїх професорів. І все-таки навіть сьогодні, на думку видатних математиків і філософів, апорії Зенона спростовуються не повністю, не на всі сто відсотків. На дев'яносто дев'ять спростувати їх неважко. Але, покопирсавшись, ви виявляєте, що саме в цьому нещасному одному відсотку і міститься вся сіль. І нові труднощі постають перед математиками, нові суперечності народжують нові знання вже на новому, вищому рівні. Справді, в основі розвитку європейської науки лежить ідея логічного обґрунтування й доказу, сама можливість і необхідність якого вперше повністю усвідомлена і оспівана Парменідом у славетній поемі "Про природу". Тут вперше — і це якісно новий та істотний крок вперед у порівнянні з давньосхідною філософією — відокремлено чуттєве пізнання від логічного. Чуттєве знання розцінюється як думка (гадка), поверхнева й хибна, істинним же визнавалося логічне знання. Без Парменіда й Зенона неможливо формування Евкліда та Архімеда. Ось чому істинним творцем учення про логос вважається Парменід, який майже ніколи не користувався таким поняттям. Парменіду належать також і найважливіші принципи логічного пізнання:

- Ніщо не виникає із нічого
- Метод доказу від супротивного
- Доказ шляхом зведення до абсурду
- Відкриття закону вилучення третього, а також відкриття закону тотожності, закону суперечності

«Зенон розкрив протиріччя, в які впадає мислення при спробі осягнути нескінченне в поняттях. Його апорії — це перші парадокси, що виникли у зв'язку з поняттям нескінченного». Чітке розрізнення потенційної та актуальної нескінченності у Аристотеля — багато в чому результат осмислення зеноновських апорій.

## 5. Теорема Піфагора. Розв'язок рівняння Піфагора

Одна з найвідоміших геометричних теорем — теорема Піфагора, знаменитого давньогрецького філософа і математика. В історії математики знаходимо твердження, що цю теорему знали за багато років до Піфагора, наприклад, стародавні єгиптяни знали про те, що трикутник зі сторонами 3, 4 і 5 є прямокутним. У наш час теорема звучить так (маючи на увазі не тільки площі, але і довжини сторін прямокутного трикутника): у прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

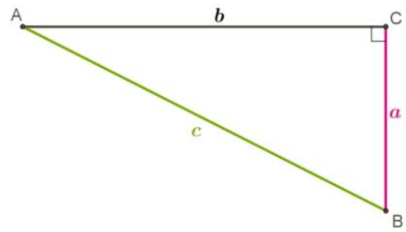


Рис.1. Прямокутний трикутник ©https://miyklas.com.ua/

Відомо дуже багато доведень теореми з різними математичними методами, але одні з найбільш наочних пов’язані з площами.

*Доведення.*

1. Побудуємо квадрат (Рис.2), сторона якого дорівнює сумі катетів даного трикутника $(a+b)$. Площа квадрата дорівнює $(a+b)^2$.

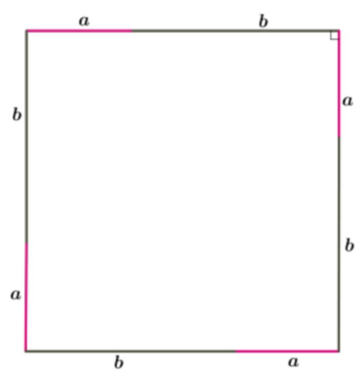


Рис.2. Квадрат, сторона якого дорівнює сумі катетів трикутника ©https://miyklas.com.ua/

2. Якщо провести гіпотенузи $c$, очевидно, що вони утворили квадрат всередині побудованого квадрата. Сторони чотирикутника дорівнюють $c$, а кути — прямі, оскільки гострі кути прямокутного трикутника в сумі дають 90°, тоді кут чотирикутника також дорівнює 90°, тому що разом всі три кута дають 180°. Отже, площа квадрата складається з чотирьох площ рівних прямокутних трикутників І площі квадрата, утвореного гіпотенузами.

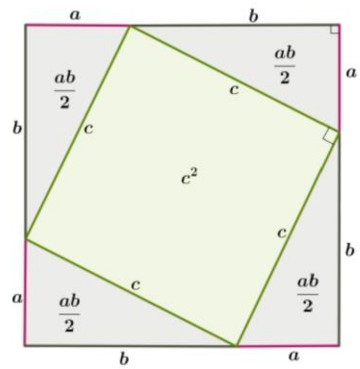


Рис.2. ©https://miyklas.com.ua/

3. На двох сторонах квадрата змінимо місцями відрізки$a$ і $b$, при цьому довжина сторони квадрата не змінюється. Тепер площу квадрата можемо скласти з двох площ квадратів, утворених катетами $a$ і $b$ та  двох площ прямокутників.

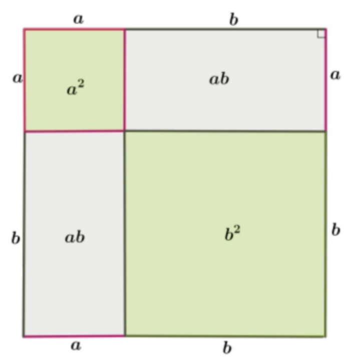


Рис.4. ©https://miyklas.com.ua/

4. З цього випливають висновки:

$$4 \cdot \frac{ab}{2} = 2ab \text{ і } c^2 = a^2 + b^2,$$

що і є доведенням теореми Піфагора.

*Розв'язок рівняння Піфагора*

Найпростіші розв'язки рівняння Піфагора називають піфагорові трійки. Піфагорові трійки — це три натуральні числа $a$, $b$, $c$ такі, що виконується рівність $c^2 = a^2 + b^2$. Іншими словами, Піфагорові трійки — це сторони прямокутного трикутника, якщо всі вони є цілими. На мегалітичних спорудах в північній Європі є свідчення, що відомості про такі трійки були відомі до винайдення писемності. Такі трійки зазвичай записують у вигляді ($a$, $b$, $c$). Деякі найвідоміші приклади: (3, 4, 5) та (5, 12, 13). Примітивними Піфагоровими числами називають такі $a$, $b$, $c$, які є взаємно простими (найбільший спільний дільник $a$, $b$ та $c$ дорівнює 1)

## Література

[1] David M. Burton. *The History of Mathematics: An Introduction, 6th Edition*, McGraw Hill Learning Solutions (2007)
[2] Craig Smory´nski, *History of Mathematics*, Springer (2008)
[3] Uta C.Merzbach and Carl B. Boyer, *A History of Mathematics, 3d Edition*, Printed in the United States of America (2011)

*Посилання.*
-Heron's formula [Електронний ресурс]: Wikipedia. The Free Encyclopedia. — URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Heron%27s_formula (дата звернення: 25.09.2022).
- Euclidean algorithm [Електронний ресурс]: Wikipedia. The Free Encyclopedia.— URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_algorithm (дата звернення: 25.09.2022).
- Problem of Apollonius [Електронний ресурс]: Wikipedia. The Free Encyclopedia. — URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Problem_of_Apollonius (дата звернення: 4.10.2022).
- Zeno's paradoxes [Електронний ресурс]: Wikipedia. The Free Encyclopedia. — URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Zeno%27s_paradoxes (дата звернення: 4.10.2022).
- Теорема Піфагора [Електронний ресурс]: МійКлас. — URL: https://miyklas.com.priamokutnikh-trikutnikiv-33079/teorema-pifagora

**ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНИХ ІДЕЙ**