History of the development of mathematical ideas

Week 5. Doubling the cube. Squaring the circle.

Лекція 5. Подвоєння куба. Квадратура круга.

1. *Подвоєння Куба*

1.1. Перші спроби вирішення задачі

1.2. Розв'язок Архита Тарентського

1.3. Розв'язок Менехма

1.4. Спроби вирішення задачі після давньогрецьких математиків.

1.5. Подвоєння куба за допомогою додаткових інструментів

2. *Квадратура круга*

1. Подвоєння куба

Про виникнення задачі подвоєння куба існує така легенда: «... під час епідемії чуми послали афіняни в Дельфи запитати оракула, що їм зробити, щоб чума припинилася. Бог відповів їм: подвоїти вівтар і принести на ньому жертви. А оскільки вівтар був кубічної форми, вони понакладали на нього ще один такий же куб, намагаючись таким чином виконати веління оракула. Коли ж чума після цього не припинилася, відправилися вони до Платона і запитали, що ж тепер робити. Той відповідав: «Сердиться на вас бог за незнання геометрії», — і пояснив, що слід було мати на увазі тут не просте подвоєння, але знайти якесь середнє пропорційне і провести подвоєння з його допомогою; і як тільки вони це зробили, чума негайно ж скінчилася».

1.1. Перші спроби вирішення задачі

Ця легенда порівняно пізня; в ній багато що змінено: задачею подвоєння куба займався ще Гіппократ Хіоський, що жив до Платона. Але цю легенд можна знайти в кількох джерелах. У ній багато цікавого: для стародавніх греків зовсім не чужою була думка, що боги можуть гніватися за незнання геометрії.

Для практики точне розв’язання задачі подвоєння куба було не потрібне, але математиків вона зацікавила. Бо насправді задача зводилась до побудови куба зі стороною $\sqrt[3]{2}$.

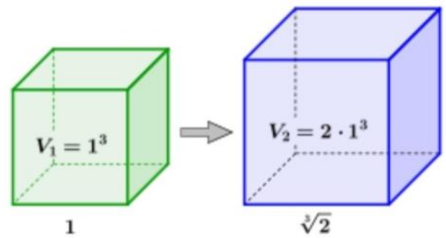

Рис.1 Подвоєння куба ©Wikipedia

Проблема полягала в тому, що $\sqrt[3]{2}$ є ірраціональним числом, а стародавні математики за допомогою циркуля і лінійки уміли будувати не все. Дійсно, покажемо це методом від супротивного.

Нехай $\sqrt[3]{2}$-раціональне число. $\sqrt[3]{2} = \dfrac{m}{n}, m, n \in N$. Найбільший спільний дільник чисел *m* і *n* дорівнює 1. Піднесемо до 3-го степеня $2 = \left(\dfrac{m}{n}\right)^3, \; m, n \in N$. *З* цього запису випливає, що *m* – парне і його можна представити як $m = 2k, \, k \in N.$ Підстановка дає наступне співвідношення:

$$8k^3 = 2n^3, \, n, k \in N.$$

Тоді *n* – парне, оскільки його можна подати, як $n = 2l, \, l \in N.$ А отже, найбільший спільний дільник чисел *m* і *n* дорівнює 2, що протирічить умові.

Гіппократ Хіоський переформулював задачу приблизно так:

«За даними відрізками *a* і *2a* побудувати такі відрізки *x* і *y,* що
a : x = x : y = y : *2a*».

Насправді, тоді:

$$\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{2a} = \frac{1}{2}$$

Тобто $x^3 = 2a^2$. Це переформулювання було суттєвим. Алгебра виникла набагато пізніше, і старогрецькі математики добуток двох відрізків подавали як прямокутник; для додавання двох добутків відрізків доводилося перетворювати прямокутники в рівновеликі їм прямокутники із спільною стороною, щоб їх можна було прикладати один до одного: добуток трьох відрізків доводилося розглядати вже як паралелепіпед. Перетворювати паралелепіпеди б було дуже складно, а зауваження Гіппократа дозволяло працювати з відношеннями відрізків. Надалі всі розв’язували задачу саме у формулюванні Гіппократа, причому, як правило, в загальному вигляді:

відрізок $2a$ замінювали на довільний відрізок b і будували такі відрізки x і y, що $a : x = x : y = y : b$. У цьому випадку

$$\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{b} = \frac{a}{b} = \left(\frac{y}{b}\right)^3$$

тобто

$$x = \sqrt[3]{a^2b} \text{ і } y = \sqrt[3]{ab^2}.$$

Розв’язання цієї задачі дозволяло також для прямокутного паралелепіпеда будувати ребро куба, об'єм якого дорівнює об'єму паралелепіпеда (із цього слідує, що в одному старогрецькому тексті мовиться: «Після цього ми зможемо взагалі будь-який заданий обмежений паралелограмами об'єм перетворювати на куб...»; цей текст Евдема Родоського, друга і учня Арістотеля, дає пряму вказівку на інтерес математиків до задачі перетворення паралелепіпеда в куб). Пояснимо, як за ребрами прямокутного паралелепіпеда p, q і r можна побудувати ребро потрібного куба. За даними сторонами p і q прямокутника будувати сторону a квадрата, площа якого дорівнює площі прямокутника, уміли вже на найранішому етапі розвитку старогрецької математики. Зрозуміло також, що якщо

$$a = \sqrt{pq} \text{ і } b = r, \text{ то } \sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{pqr}.$$

З різних причин давньогрецькі математики при побудовах циркулю і лінійці віддавали перевагу над всіма іншими інструментами. Тут, потрібно зробити уточнення. Ні про циркуль, ні про лінійку в творах давніх математиків мови немає; мовиться лише про «побудови за допомогою прямих і кіл». Більше того, для Евкліда побудова кола означає не зовсім те ж саме, що використання циркуля. Згідно з третім постулатом Евкліда, можна будувати лише коло з заданим центром *A,* що проходить через задану точку *B.* Коло з центром *A* і радіусом ВС цей постулат будувати не дозволяв (така побудова описана Евклідом). Циркуль, звичайно ж, дозволив би виконати такі побудови. Напевне, формулювання постулату Евкліда пов'язано з побудовою кола за допомогою кілочка і прив'язаної до нього мотузки. В цьому випадку для побудови кола з центром *A* і радіусом ВС довелося б спочатку забити кілочок в точці *B,* помітити на мотузці точку С, а потім висмикнути кілочок і забити його в точці *A.* Тільки після цього можна було будувати необхідне коло. Така побудова, при якій потрібно було забивати кілочок не один, а двічі, істотно відрізняється від елементарної побудови.

В Греції циркуль був винайдений в X ст. до н. е., задовго до Евкліда, у зв'язку з потребами керамічного виробництва. В цей час широке розповсюдження отримав геометричний стиль, і циркуль був потрібен для зображення на кераміці концентричних кіл.

Грецька міфологія пов'язує винахід циркуля з ім'ям Талоса (згідно іншим джерелам — Пердикса), племінника Дедала. Про Талоса пише давньогрецький історик Діодор Сицілійський (I ст. до н. е.): «Так само, винайшовши циркуль і деякі інші технічні засоби, він досяг великої слави». Римський письменник Гігін (I ст. до н. е.) повідомляє: «Пердикс, син сестри Дедала, винайшов циркуль і пилку з риб'ячого хвоста». Про цей винахід дванадцятирічного хлопчика згадує навіть знаменитий римський поет Овідій (I ст. до н. е.) в поемі «Метаморфози»:

Перший залізним вузлом два залізні кінці сполучив він.
Щоб, коли один від одного вони на відстані рівній.
Частина стояла одна, інша ж круг обводила.

Дедал відомий в грецькій міфології як наймайстерніший винахідник і архітектор. (Дивним чином набагато більш знаменитий нині його безрозсудний син Ікар, який прославився тим, що, не дивлячись на конкретні повчання батька, так і не навчився правильно користуватися зробленими Дедалом крилами з пір'я, що скріпляють воском.) Обдарованість відданого йому в навчання племінника, котра загрожувала затьмарити його славу, викликала у Дедала заздрість, і він зіштовхнув його з акрополя.

1.2. Розв'язок Архита Тарентського

Швидше за все, старогрецькі математики досить швидко зрозуміли, що задачу подвоєння куба не можна вирішити за допомогою циркуля і лінійки, хоча довести цього вони не могли і, мабуть, навіть не намагалися. З приводу того, чим крім циркуля і лінійки можна користуватися при побудовах, у давньогрецьких математиків були різні думки. Перше нестардантне розв'язання задачі подвоєння куба, отримане великим полководцем і математиком Архитом Тарентським. Метою Архита було доведення існування шуканого відрізка з допомогою поверхонь, існування яких для греків було безсумнівним. Він, що шуканий відрізок можна дістати в результаті перетину трьох просторових фігур: конуса, циліндра і тора.

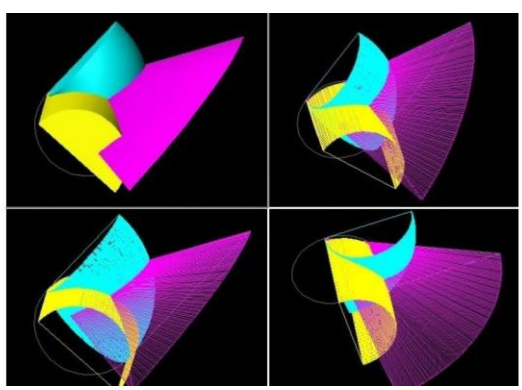

Рис 2. Перетин конуса, циліндра і тора.

1.3. Розв'язок Менехма

Інші два розв'язки значно пізніше запропонував Менехма.

У першому з них розв'язок знаходився як точка перетину двох парабол, а в другому - як точка перетину параболи і гіперболи.

У сучасних позначеннях перше рішення є графічним рішенням системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 = ay; \\ y^2 = bx. \end{cases}$$

Графіками цих рівнянь є дві параболи із взаємно перпендикулярними осями. З першого рівняння

$$y = \frac{x^2}{a},$$

при підставці цього виразу у друге рівняння

$$\frac{x^4}{a^2} = bx$$

звідки

$$x = \sqrt[3]{a^2 b},$$

якщо покласти $b=2a$, то

$$x = a\sqrt[3]{2}.$$

Другий рішення по суті являє собою графічне рішення системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 = ay; \\ xy = ab. \end{cases}$$

Графіком першого є парабола з віссю Oy, графиком другого - гіпербола з симптомами Ox і Oy. З першого рівняння $y = \frac{x^2}{a}$, при підстановці цього виразу в друге рівняння отримуємо

$$\frac{x^3}{a} = ab,$$

звідки знову

$$x = a\sqrt[3]{2}.$$

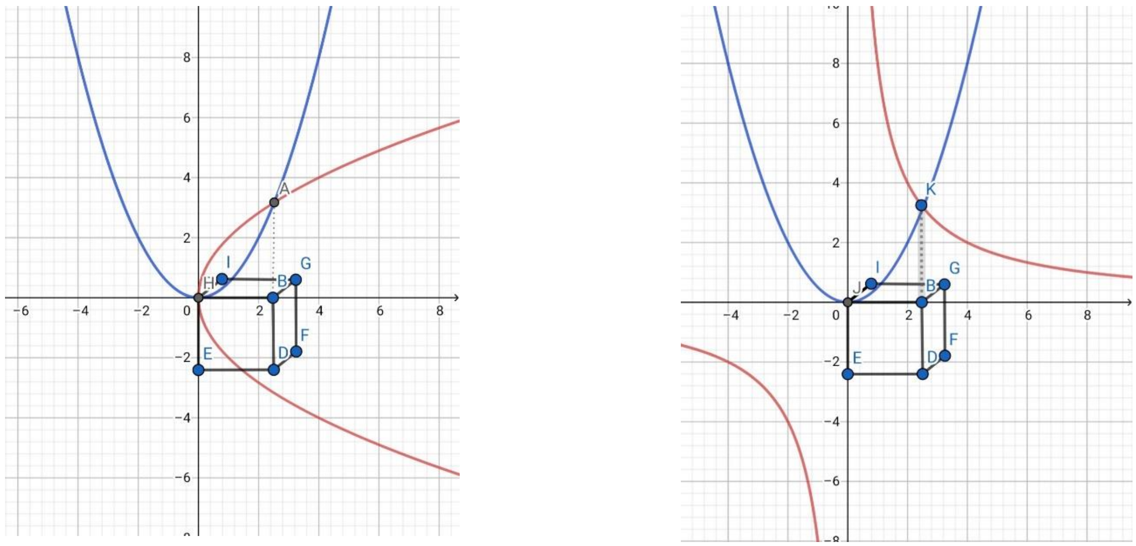

Рис.3 Метод Менехма

Графіків функцій, у сучасному значенні слова, греки не знали. Параболу і гіперболу Менехм знаходив як переріз конуса площинами (конічні перерізи). Можливо, саме він і ввів термін «конічні перерізи», і першим став вивчати їх властивості, тим самим відкривши важливу сторінку в історії математики.

Розв’язок Менехма був вже в деякому розумінні оптимальним: він знаходив розв’язок, як перетин двох конічних перетинів. Оптимальним цей розв'язок був ось в якому значенні. На останньому етапі розвитку давньогрецької математики, через декілька століть після Менехма, сформувалася наступна класифікація задач на побудову, викладена олександрійським математиком Паппом:

1) задачі на площині (розв’язувані за допомогою прямих і кіл, тобто за допомогою циркуля і лінійки);

2) просторові задачі (розв’язувались за допомогою конічних перетинів, тобто параболи, гіперболи і еліпса; назва, напевне, пов'язано з тим, що використовувалися перетини просторової фігури — конуса);

3) задачі, розв’язувані тільки за допомогою інших, складніших кривих ліній).

Папп писав, що якщо задачу можна розв’язати за допомогою прямих і кіл, то було б помилкою використовувати в геометрії для її розв’язання інші інструменти. Він був упевнений, що задачу подвоєння куба не можна розв’язати за допомогою прямих і кіл.

Класифікація Паппа неповна. Вона не включає побудови, які використовують спеціальні інструменти, а такі побудови зустрічалися у давньогрецьких математиків нерідко. Спеціальні інструменти для розв’язання задачі подвоєння куба використовували Ератосфен і Нікомед; спеціальний пристрій використаний також в розв’язанні, яке приписували Платону.

1.4. Спроби вирішення задачі після давньогрецьких математиків.

Після давньогрецьких математиків щодо задачі подвоєння куба були отримані, мабуть, лише два істотні результати. По-перше, було обгрунтовано, що ця задача і задача трисекції кута зводяться до розв'язання кубічних рівнянь, а по-друге, в 1837р. було доведено, що ці задачі нерозв'язні за допомогою циркуля і лінійки (в нерозв'язності цих задач старогрецькі математики, були упевнені, хоча і не могли цього довести). В тому, щоб зрозуміти, що задача подвоєння куба зводиться до розв'язання кубічного рівняння, немає, здавалося б, нічого складного. Але давньогрецькі математики ніколи не вирішували геометричні задачі шляхом зведення їх до рівнянь алгебри. Їх математика була істотно геометричною. Алгебраїзація математики розпочалася набагато пізніше і йшла дуже повільно і важко. Слово «алгебра» зовсім не випадково походить з арабської мови — араби дійсно дуже багато зробили для алгебраїзації математики.

В XII ст. в Європі почали перекладати з арабської мови на латинську трактати старогрецьких і арабських математиків (багато праць давньогрецьких математиків збереглися лише в арабських перекладах). Грецька математика повернулася до Європи в сильно алгебраїзованому вигляді. Великі досягнення в області алгебри (розв'язання в радикалах рівнянь третього і четвертого степеня, теорема Вієта) були вже частково підготовлені.

В своїй книзі «Геометрія» (1637 р.) Декарт показав, як геометричні задачі можна зводити до рівнянь алгебри. У зв'язку з цим у нього виникла задача побудови коренів многочлена. Декарт знайшов дуже простий спосіб будувати корені многочленів третього і четвертого степенів як проекції на вісь координат точок перетину параболи і кола. Як особливо важливі окремі випадки цієї побудови, Декарт виділив розв'язання задач подвоєння куба і трисекції кута і розглянув їх окремо.

Деякий час після появи книги Декарта побудовою коренів займалися майже всі відомі математики (Ферма, Ньютон, ван Схоотен, Лопіталь, Лагір, Я. Бернуллі, Ролль, Крамер, Ейлер), але інтерес до цієї задачі згасав так швидко, що головна теорема, пов'язана з побудовою коренів, залишилася не доведеною, мабуть, і до цього дня. Ця теорема полягає, грубо кажучи, в наступному: корені многочлена n-го степеня можна побудувати як проекції на вісь координат точок перетину двох алгебраїчних кривих, степені яких рівні приблизно $\sqrt{n}$. Останніми з математиків задачею побудови коренів займалися Крамер (1704 — 1752) і Ейлер (1707—1783), але їх інтерес до неї був вже таким слабким, що вони не звернули уваги на майже очевидні речі. Вказану вище теорему хоча і ніхто не доводив, але все таки перевіряли, щоб у кривих було більше вільних коефіцієнтів, які можна змінювати, ніж у многочлена (Лопіталь вважав це цілком достатнім доказом). Щоб уникнути ситуації, коли для многочлена точки перетину кривих виходять уявними, Крамер і Ейлер запропонували спосіб, в якому вільних коефіцієнтів у кривих було менше ніж у многочлена, тобто цей спосіб підходив не для будь-якого многочлена. Напевне, Ейлер не допустив би таку помилку, якби займався цією проблемою всерйоз.

1.5. Подвоєння куба за допомогою додаткових інструментів

Подвоєння куба неможливе за допомогою циркуля та лінійки, проте його можна здійснити, використовуючи деякі додаткові інструменти.

• Подвоєння куба можна здійснити побудовою за допомогою *плоского орігамі*. Побудуємо квадрат, розділений на три рівні частини складками паралельними одній стороні. Складемо лист так, щоб точка P_1 лягла на бік $BC(l_1)$, а P_2 лягла на роздільну складку l_2. При цьому P_1', образ P_1, розділить бік квадрата щодо $1:\sqrt[3]{2}$

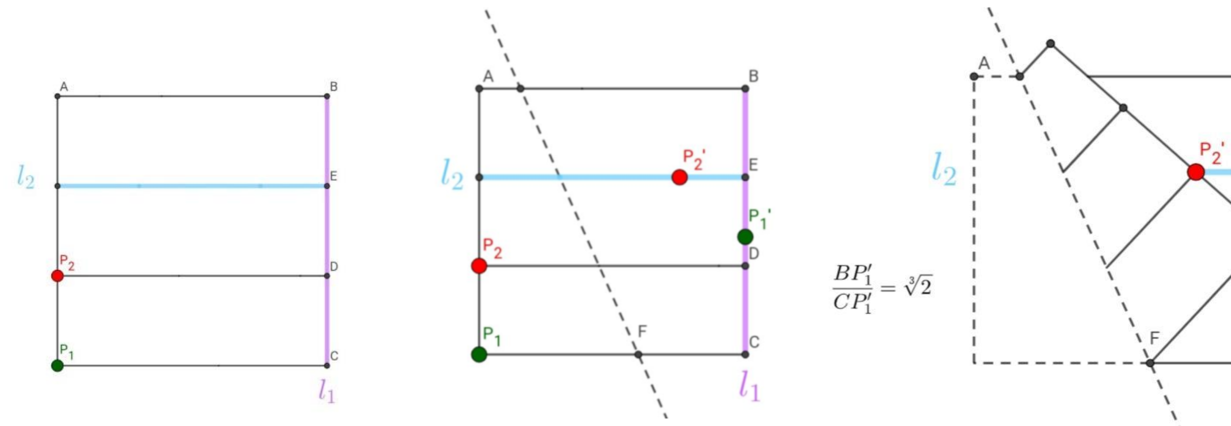

Рис.4. Метод орігамі.

• Подвоїти куб можна за допомогою *невсису*. Візьмемо рівносторонній трикутник MPN зі стороною a, продовжимо бік PN та на відстані a від точки N побудуємо точку R (рис. 5).

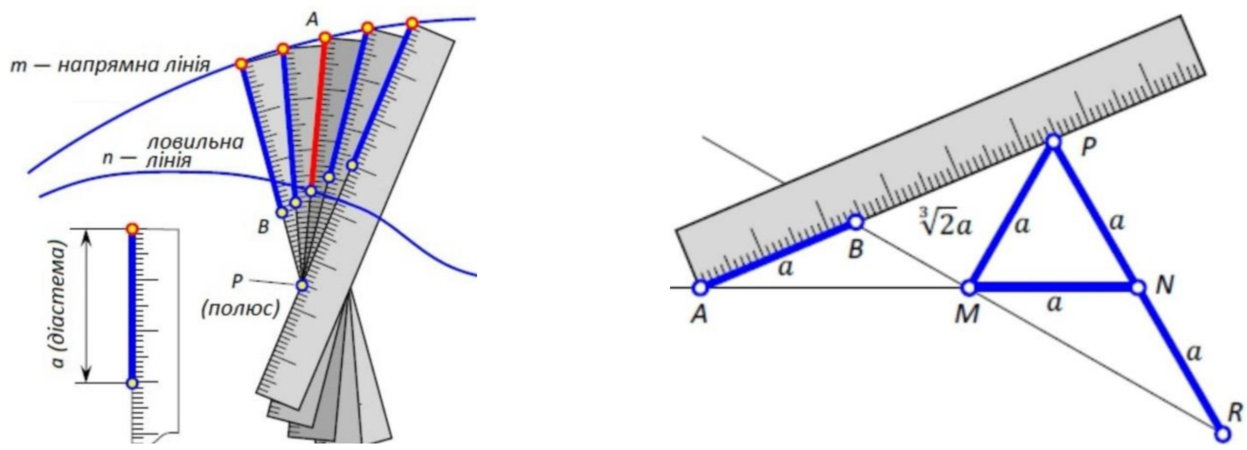

Рис.5. Побудова за допомогою несвису ©Wikipedia

Продовжимо вліво відрізки NM та RM. Візьмемо лінійку невсису з діастемою а і, використовуючи пряму NM як напрямну, точку Р як полюс і пряму RM як цільову лінію, побудуємо відрізок AB. Довжина відрізка BP відповідає стороні куба подвоєного об'єму в порівнянні з кубом зі стороною a.

• 400 років до н.е. Платон знайшов розв’язок задачі за допомогою двох допоміжних прямих кутів.

Нехай *OA=a* ребро даного куба. Проведемо через точку А пряму, що є перпендикулярною *OA* та відкладемо на ній відрізок *2a* (Рис. 5).

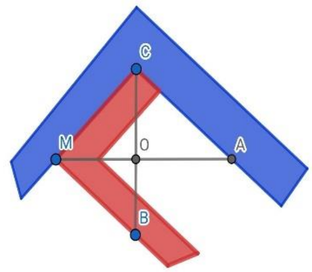

Рис.5. Косинці Платона

Розташуємо два прямі кути так, щоб:

1) вершина *C* першого кута має бути на продовженні променя *OB*, а вершина *M* –другого кута має бути на продовженні променя *OA*;

2) одна з сторін першого кута має проходити через точку *A* і одна сторона другого - через точку *B*;

3) дві інші сторони кутів мають потрапити на одну пряму *CM*.

В силу теореми про перпендикуляр, що виходить з вершини прямого кута до гіпотенузи, маємо

$$OA:OC=OC:OM;$$
$$OC:OM=OM:OB.$$

Тобто

$$a:OC=OC:OM$$
$$a:OC=OD:2a$$
$$a\times OM=OC^2$$
$$2a^2=OC\times OM$$
$$2a^3=OC^3$$

2. Квадратура круга

Задача *квадратури круга,* тобто побудови квадрата, рівновеликого даному кругу, в Стародавній Греції була, напевне, дуже популярною. Плутарх повідомляє, що філософ Анаксагор (біля 500 — 428 рр. до н. е.) у в'язниці займався цією задачею. Про неї мовиться і в комедії Арістофана «Птаха» (414 р. до н. е.): «Приклавши сюди лінійку, круг описую циркулем, і вверх і вниз ... Потім лінійкою відношу пряму. Круг тепер подібний чотирикутнику.» Ця згадка в комедії означає, що задача квадратури круга була загальновідома.

Дивним чином задача квадратури круга і зворотна їй задача «кругатури квадрата», тобто побудови круга, рівновеликого даному квадрату, була відома також і в Стародавній Індії. Індійські вівтарі були самої різної форми: у вигляді квадрата, круга, півкола, рівностороннього трикутника, рівнобедреної трапеції і т.д. Але всі ці вівтарі повинні були мати одну і ту ж площу. У зв'язку з цим виникали задачі перетворення круга в рівновеликий йому квадрат і квадрата в рівновеликий йому круг. Розв'язання цих задач зібрані в староіндійській книзі «Сульвасутра», присвяченій побудові вівтарів. Різні частини цієї книги датуються VII — II ст. до н.е. Розв'язання задач, що нас цікавлять містяться в найстародавнішій частині «Сульвасутри».

Побудова круга, рівновеликого квадратові, в «Сульвасутрі» описується так. Опишемо навкруг квадрата *ABCD* коло. Нехай перпендикуляр до відрізка *AB,* проходить через центр О квадрата і перетинає пряму *AB* і коло в точках *P* і *Q* відповідно; точка К ділить відрізок *PQ* у відношенні *PK* : *KQ* = 1 : 2. (див. Рис. 1) Тоді *OK—радіус* круга, площа якого дорівнює площі квадрата. Це розв'язання, звичайно ж, наближене. Якщо *a* — сторона квадрата, *r*— радіус побудованого круга, то

$$r = \frac{a(2+\sqrt{2})}{6}.$$

Тому із співвідношення $a^2 = \pi r^2$ для числа π отримуємо наближене значення $a\left(\frac{3}{1+\sqrt{2}}\right)^2 \approx 3{,}088.$

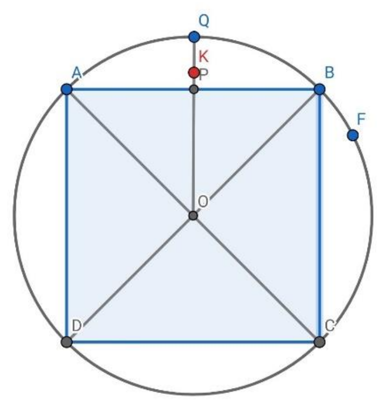

Рис.1.

Для розв'язання оберненої задачі, тобто для перетворення круга в рівновеликий йому квадрат, в Стародавній Індії не змогли знайти такої ж простої геометричної побудови і розв'язували її алгебраїчним способом. Це розв'язання виглядає наступним чином: якщо d — діаметр круга, a — сторона рівновеликого йому квадрата, то

$$a = d\left(1 - \frac{28}{8\cdot 29} - \frac{1}{8\cdot 29\cdot 6} + \frac{1}{8\cdot 29\cdot 6\cdot 8}\right).$$

Для числа π це обчислення дає наближене значення 3,088.

Ці дуже близькі один до одного наближені значення числа π показують, мабуть, що перше (геометричне) розв'язання в Стародавній Індії вважалося точним. Друге (алгебраїчне) розв'язання явно перетворенням саме цієї геометричної побудови, при цьому використовувалось наближене значення, що зустрічається в книзі «Сульвасутра »

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} \approx 1{,}4142157,$$

яке відрізняється від точного значення тільки шостим знаком після коми.

Справді, підставивши у формулу $\frac{d}{a} = \frac{2+\sqrt{2}}{3}$ значення

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34},$$

отримаємо $\frac{d}{a} = \frac{1393}{1224}$, тобто $\frac{a}{d} = \frac{1224}{1393}$.

Легко перевірити, що

$$\frac{1224}{1393} = 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 1393}.$$

Відкинувши останній доданок, отримаємо формулу, що міститься в книзі «Сульвасутра». Цей розклад отримуємо майже природним чином:

$$\frac{1224}{1393} = 1 - \frac{169}{1393};$$

$$\frac{169}{1393} = \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{8} - \frac{169}{1393}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot \frac{41}{1393};$$

$$\frac{41}{1393} = \frac{1}{29} - \left(\frac{1}{29} - \frac{41}{1393}\right) = \frac{1}{29} - \frac{1}{29} \cdot \frac{204}{1393};$$

$$\frac{204}{1393} = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{6} - \frac{204}{1393}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{169}{1393};$$

$$\frac{169}{1393} = \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{8} - \frac{169}{1393}\right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot \frac{41}{1393}$$

Єдиний штучний крок в цьому розкладанні полягає в тому, що

$$\frac{1}{34} < \frac{41}{1393} < \frac{1}{33},$$

а в якості наближення числа $\frac{41}{1393}$ розглядають $\frac{1}{29}$.

В Стародавній Греції задача квадратури круга виникла після того, як була розв'язана задача перетворення многокутника в рівновеликий йому прямокутник. Ця задача розв'язувалася таким чином. Спочатку многокутник розрізали на трикутники. Потім трикутник із стороною a і заввишки h_a

замінювали на рівновеликий йому прямокутник із сторонами $\frac{a}{2}$ і h_a. Після цього вибирали деякий відрізок e і замінювали кожний прямокутник на рівновеликий йому прямокутник, одна сторона якого рівна e. Як це робилося, показано на Рис. 2; блакитні прямокутники рівновеликі, тому що вони отримані з двох рівних трикутників шляхом відрізування від них двох пар рівних трикутників. Потім отримані прямокутники із стороною e прикладали один до одного цією стороною і так складали деякий прямокутник. Залишалося побудувати для прямокутника рівновеликий йому квадрат. Ця задача цікава тим, що в книзі «Сульвасутра» і в «Началах» Евкліда описані дуже схожі розв'язання цієї задачі, причому розв'язання далеко не найпростіші.

$BH=a$

$BI=b$

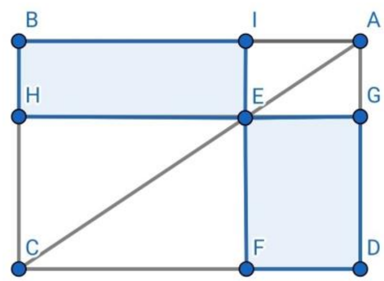

Рис. 2.

В книзі «Сульвасутра» квадрат, рівновеликий даному прямокутнику *ABCD,* будувався таким чином. Нехай для визначеності $BC > AB$. Відріжемо від прямокутника *ABCD* квадрат з стороною *BC* і розріжемо прямокутник, що залишився, на два рівні прямокутники; один з цих прямокутників прикладемо до квадрата. В результаті отримаємо фігуру, що зафарбована темно-синім на Рис. 3.

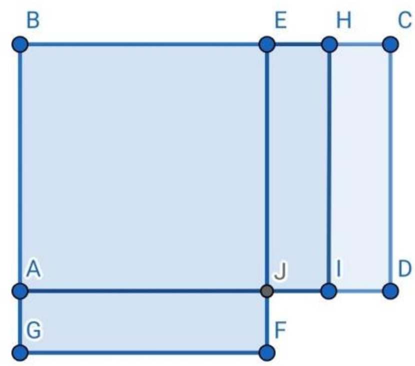

Рис.3.

Ця фігура є квадратом зі стороною $a=BH$, з якого вирізаний квадрат із стороною $b=IJ$. Площа цієї фігури дорівнює площі квадрата із стороною x, де

$$x^2=a^2-b^2.$$

Для побудови відрізка x можна скористатися теоремою Піфагора: цей відрізок є катетом прямокутного трикутника з гіпотенузою a і катетом b. В книзі

«Сульвасутра» теорема Піфагора описана в слідуючому формулюванні: *«Діагональ прямокутника утворює два квадрати, у яких вертикальна і горизонтальна сторонни утворюють окремо»*. Це, напевне, перше формулювання теореми Піфагора (сам Піфагор народився, швидше за все, пізніше, вже після того, як була написана «Сульвасутра»; давньогрецькі формулювання і доведення його теореми, ті, що збереглися, відносяться до більш пізньої епохи).

Побудова, описана в книзі «Сульвасутра», далеко не найпростіша. Більш просте розв'язання видно з Рис 4.: якщо хорда *CD*, перпендикулярна діаметру *AB,* перетинає його в точці *O,* то $CO^2 = CO \cdot OD = AO \cdot OB$

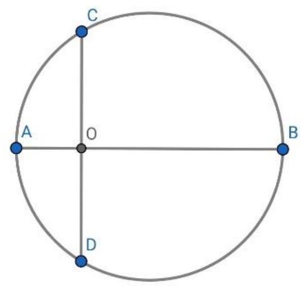

Рис.4.

тобто *CO* — сторона квадрата, площа якого дорівнює площі прямокутника із сторонами *AO і OB*. Евклід описує саме таку побудову, але доведення у нього таке саме, як в книзі «Сульвасутра»; воно теж основане на теоремі Піфагора.

Найдавніші, що дійшли до нас давньогрецькі розв'язання задачі про квадратуру круга на перший погляд здаються просто дурістю. Афінянин Антифонт вписував в круг многокутник (трикутник або квадрат), потім ділив дуги навпіл і будував вписаний багатокутник з подвоєним числом сторін і т.д. Він думав, що врешті-решт вийде багатокутник, який, завдяки дуже малій довжині своїх сторін, співпаде з колом. Брізон узяв квадрат, вписаний в круг, і квадрат, описаний навколо круга, а потім узяв квадрат, що лежить між ними. Він стверджував, що площа останнього квадрата рівна площі круга.

Пізніші давньогрецькі коментатори до розв'язків Антифонта і Брізона відносилися зневажливо і їх взагалі не обговорювали. Але діяльність Антифонта і Брізона не слід недооцінювати. Для розв'язання задачі квадратури круга необхідно було зрозуміти, що ж таке площа круга, а для цього було потрібно мати уявлення про межу. В Стародавній Індії обійшли ці труднощі, ухваливши на віру неточне розв'язання цієї задачі. Антифонт і Брізон навмання шукали поняття межі. В їх міркуваннях невірного багато, але є і дещо дуже важливе; створений згодом метод виключеннч багато що у них перейняв. Архімед при обчисленні числа П як відношення довжини кола до діаметра використовував як ідею Антифонта (перехід від вписаного n-кутника до вписаного 2n-кутника), так і ідею Брізона (застосування не тільки вписаних, але і описаних многокутників).

Література

[1] David M. Burton. *The History of Mathematics: An Introduction, 6th Edition,* McGraw Hill Learning Solutions (2007)
[2] Craig Smory´nski, *History of Mathematics,* Springer (2008)
[3] Uta C.Merzbach and Carl B. Boyer, *A History of Mathematics, 3d Edition,* Printed in the United States of America (2011)
[4] Гуж М. М., *Матеріали для проведення факультативних занять з математики*, електронна версія (2020)

Ілюстрації запозичені з сайтів:
https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%BE%D0%B4%D0%B2%D0%BE%D1%94%D0%BD%D0%BD%D1%8F_%D0%BA%D1%83%D0%B1%D0%B0
https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B2%D0%B0%D0%B4%D1%80%D0%B0%D1%82%D1%83%D1%80%D0%B0_%D0%BA%D1%80%D1%83%D0%B3%D0%B0

ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНИХ ІДЕЙ