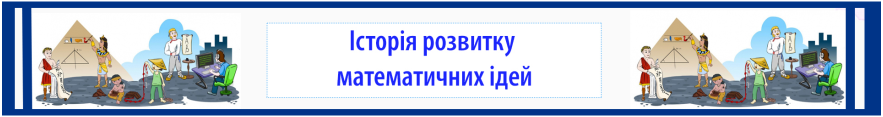
History of the development of mathematical ideas

Lecture 5. Doubling the cube. Squaring the circle.

O. Tymoshenko

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute



Зміст

Подвоєння куба

Подвоєння куба

Про виникнення задачі подвоєння куба існує така легенда: «... під час епідемії чуми послали афіняни в Дельфи запитати оракула, що їм зробити, щоб чума припинилася. Бог відповів їм: подвоїти вівтар і принести на ньому жертви. А оскільки вівтар був кубічної форми, вони понакладали на нього ще один такий же куб, намагаючись таким чином виконати веління оракула. Коли ж чума після цього не припинилася, відправилися вони до Платона і запитали, що ж тепер робити. Той відповідав: «Сердиться на вас бог за незнання геометрії», —і пояснив, що слід було мати на увазі тут не просте подвоєння, але знайти якесь среднє пропорційне і провести подвоєння з його допомогою; і як тільки вони це зробили, чума негайно ж скінчилася».

Перші спроби вирішення задачі

Ця легенда порівняно пізня; в ній багато що змінено: задачею подвоєння куба займався ще Гіппократ Хіоський, що жив до Платона. Але цю легенд можна знайти в кількох джерелах. У ній багато цікавого: для стародавніх греків зовсім не чужою була думка, що боги можуть гніватися за незнання геометрії. Для практики точне розв' язання задачі подвоєння куба було не потрібне, але математиків вона зацікавила. Бо насправді задача зводилась до побудови куба зі стороною $\sqrt[3]{2}$.

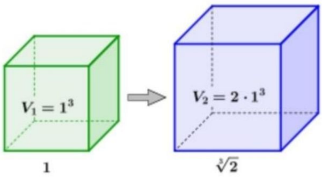


Рис.1 Подвоєння куба ©Wikipedia

Перші спроби вирішення задачі

Проблема полягала в тому, що $\sqrt[3]{2}$ є ірраціональним числом, а стародавні математики за допомогою циркуля і лінійки уміли будувати не все. Дійсно, покажемо це методом від супротивного.

Нехай $\sqrt[3]{2}$-раціональне число. $\sqrt[3]{2}=\frac{m}{n}, m,n\in N$. Найбільший спільний дільник чисел m і n дорівнює 1. Піднесемо до 3-го степеня $2=\left(\frac{m}{n}\right)^3, \quad m,n\in N$. З цього запису випливає, що m – парне і його можна представити як $m=2k, k\in N$. Підстановка дає наступне співвідношення:

$$8k^3=2n^3, n,k\in N.$$

Тоді n – парне, оскільки його можна подати, як $n=2l, l\in N$. А отже, найбільший спільний дільник чисел m і n дорівнює 2, що протирічить умові.

Перші спроби вирішення задачі

Гіппократ Хіоський переформулював задачу приблизно так:
За даними відрізками a і $2a$ побудувати такі відрізки x і y, що

$$a : x = x : y = y : 2a.$$

Насправді, тоді:

$$\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{2b} = \frac{1}{2}$$

Тобто $x^3 = 2a^2$. Це переформулювання було суттєвим. Алгебра виникла набагато пізніше, і старогрецькі математики добуток двох відрізків подавали як прямокутник; для додавання двох добутків відрізків доводилося перетворювати прямокутники в рівновеликі їм прямокутники із спільною стороною, щоб їх можна було прикладати один до одного: добуток трьох відрізків доводилося розглядати вже як паралелепіпед.

Перші спроби вирішення задачі

Надалі всі розв' язували задачу саме у формулюванні Гіппократа, причому, як правило, в загальному вигляді: відрізок 2a замінювали на довільний відрізок b і будували такі відрізки x і y, що

$$a : x = x : y = y : b.$$

У цьому випадку

$$\left(\frac{a}{x}\right)^3 = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{b} = \frac{a}{b} = \left(\frac{y}{b}\right)^3$$

тобто

$$x = \sqrt[3]{a^2 b}$$

і

$$y = \sqrt[3]{ab^2}.$$

Перші спроби вирішення задачі

Розв' язання цієї задачі дозволяло також для прямокутного паралелепіпеда будувати ребро куба, об'єм якого дорівнює об'єму паралелепіпеда (із цього слідує, що в одному старогрецькому тексті мовиться:

Після цього ми зможемо взагалі будь-який заданий обмежений паралелограмами об'єм перетворювати на куб...;

цей текст Евдема Родоського, друга і учня Арістотеля, дає пряму вказівку на інтерес математиків до задачі перетворення паралелепіпеда в куб). Пояснимо, як за ребрами прямокутного паралелепіпеда , q і r можна побудувати ребро потрібного куба. За даними сторонами p і q прямокутника будувати сторону квадрата, площа якого дорівнює площі прямокутника, уміли вже на найранішому етапі розвитку старогрецької математики. Зрозуміло також, що якщо

$$a = \sqrt{pq} \text{ і } b = r,$$

то

$$\sqrt[3]{a^2 b} = \sqrt[3]{pqr}.$$

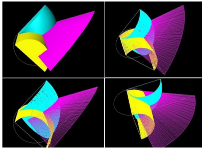
.

Перші спроби вирішення задачі

- З різних причин давньогрецькі математики при побудовах циркулю і лінійці віддавали перевагу над всіма іншими інструментами.
- В Греції циркуль був винайдений в X ст. до н. е., задовго до Евкліда, у зв'язку з потребами керамічного виробництва. В цей час широке розповсюдження отримав геометричний стиль, і циркуль був потрібен для зображення на кераміці концентричних кіл.

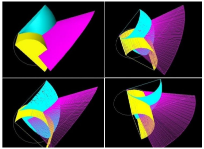
Розв'язок Архита Тарентського

Швидше за все, старогрецькі математики досить швидко зрозуміли, що задачу подвоєння куба не можна вирішити за допомогою циркуля і лінійки, хоча довести цього вони не могли і, мабуть, навіть не намагалися. З приводу того, чим крім циркуля і лінійки можна користуватися при побудовах, у давньогрецьких математиків були різні думки. Перше нестардантне розв'язання задачі подвоєння куба, отримане великим полководцем і математиком Архитом Тарентським. Метою Архита було доведення існування шуканого відрізка з допомогою поверхонь, існування яких для греків було безсумнівним. Він, що шуканий відрізок можна дістати в результаті перетину трьох просторових фігур: конуса, циліндра і тора.



Розв'язок Менехма

Швидше за все, старогрецькі математики досить швидко зрозуміли, що задачу подвоєння куба не можна вирішити за допомогою циркуля і лінійки, хоча довести цього вони не могли і, мабуть, навіть не намагалися. З приводу того, чим крім циркуля і лінійки можна користуватися при побудовах, у давньогрецьких математиків були різні думки. Перше нестардантне розв'язання задачі подвоєння куба, отримане великим полководцем і математиком Архитом Тарентським. Метою Архита було доведення існування шуканого відрізка з допомогою поверхонь, існування яких для греків було безсумнівним. Він, що шуканий відрізок можна дістати в результаті перетину трьох просторових фігур: конуса, циліндра і тора.



Розв' язок Менехма

Інші два розв'язки значно пізніше запропонував Менехма.

У першому з них розв'язок знаходився як точка перетину двох парабол, а в другому - як точка перетину параболи і гіперболи.

У сучасних позначеннях перше рішення є графічним рішенням системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 = ay; \\ y^2 = bx. \end{cases}$$

Графіками цих рівнянь є дві параболи із взаємно перпендикулярними осями. З першого рівняння

$$y = \frac{x^2}{a},$$

при підставці цього виразу у друге рівняння

$$\frac{x^4}{a^2} = bx$$

звідки

$$x = \sqrt[3]{a^2 b},$$

якщо покласти $b=2a$, то

$$x = a\sqrt[3]{2}.$$

Розв'язок Менехма

Другий рішення по суті являє собою графічне рішення системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 = ay; \\ xy = ab. \end{cases}$$

Графіком першого є парабола з віссю Oy, графиком другого - гіпербола з симптомами Ox і Oy. З першого рівняння $y = \frac{x^2}{a}$, при підстановці цього виразу в друге рівняння отримуємо

$$\frac{x^3}{a} = ab,$$

звідки знову

$$x = a\sqrt[3]{2}.$$

Розв' язок Менехма

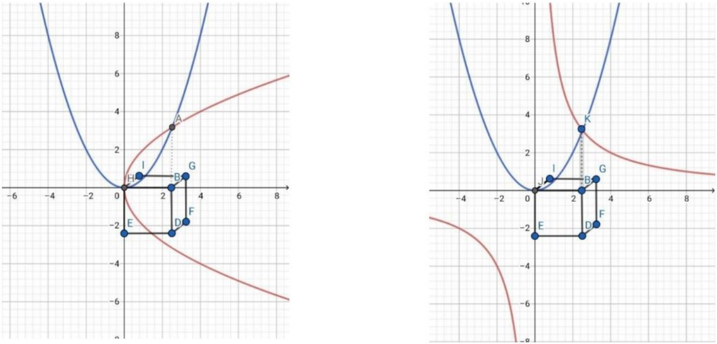


Рис.3 Метод Менехма

Розв’язок Менехма

Розв’язок Менехма був вже в деякому розумінні оптимальним: він знаходив розв’язок, як перетин двох конічних перетинів. Оптимальним цей розв’язок був ось в якому значенні. На останньому етапі розвитку давньогрецької математики, через декілька століть після Менехма, сформувалася наступна класифікація задач на побудову, викладена олександрійським математиком Паппом:

- задачі на площині (розв’язувані за допомогою прямих і кіл, тобто за допомогою циркуля і лінійки);
- просторові задачі (розв’язувались за допомогою конічних перетинів, тобто параболи, гіперболи і еліпса; назва, напевне, пов’язано з тим, що використовувалися перетини просторової фігури —конуса);
- задачі, розв’язувані тільки за допомогою інших, складніших кривих ліній).

Спроби вирішення задачі після давньогрецьких математиків.

Після давньогрецьких математиків щодо задачі подвоєння куба були отримані, мабуть, лише два істотні результати. По-перше, було обгрунтовано, що ця задача і задача трисекції кута зводяться до розв' язання кубічних рівнянь, а по-друге, в 1837р. було доведено, що ці задачі нерозв'язні за допомогою циркуля і лінійки (в нерозв'язності цих задач старогрецькі математики, були упевнені, хоча і не могли цього довести). В тому, щоб зрозуміти, що задача подвоєння куба зводиться до розв' язання кубічного рівняння, немає, здавалося б, нічого складного. Але давньогрецькі математики ніколи не вирішували геометричні задачі шляхом зведення їх до рівнянь алгебри. Їх математика була істотно геометричною. Алгебраїзація математики розпочалася набагато пізніше і йшла дуже повільно і важко. Слово «алгебра» зовсім не випадково походить з арабської мови —араби дійсно дуже багато зробили для алгебраїзації математики.

Подвоєння куба за допомогою додаткових інструментів

Подвоєння куба неможливе за допомогою циркуля та лінійки, проте його можна здійснити, використовуючи деякі додаткові інструменти.

• Подвоєння куба можна здійснити побудовою за допомогою *плоского орігамі*. Побудуємо квадрат, розділений на три рівні частини складками паралельними одній стороні. Складемо лист так, щоб точка P_1 лягла на бік $BC(l_1)$, а P_2 лягла на роздільну складку l_2. При цьому P_1', образ P_1, розділить бік квадрата щодо $1:\sqrt[3]{2}$

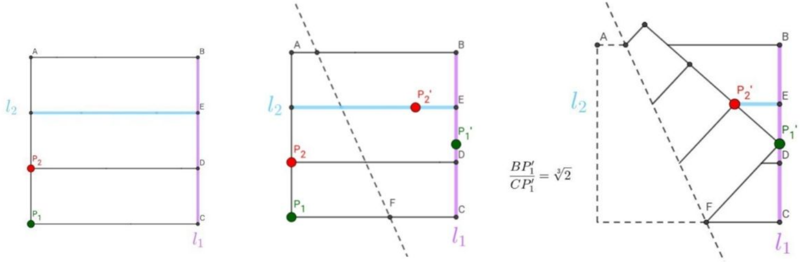


Рис.4. Метод орігамі.

Подвоєння куба за допомогою додаткових інструментів

• Подвоїти куб можна за допомогою *невсису*. Візьмемо рівносторонній трикутник MPN зі стороною a, продовжимо бік PN та на відстані a від точки N побудуємо точку R (рис. 5).

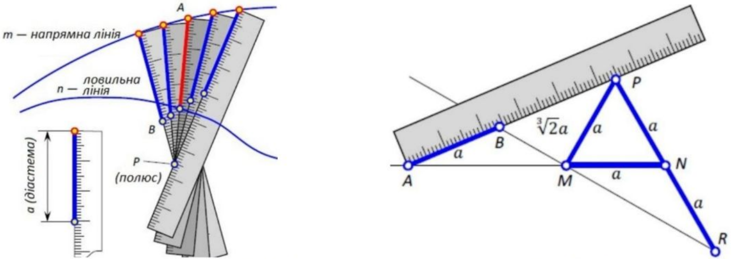


Рис.5. Побудова за допомогою несвису ©Wikipedia

Продовжимо вліво відрізки NM та RM. Візьмемо лінійку невсису з діастемою а і, використовуючи пряму NM як напрямну, точку Р як полюс і пряму RM як цільову лінію, побудуємо відрізок AB. Довжина відрізка BP відповідає стороні куба подвоєного об'єму в порівнянні з кубом зі стороною a.

Подвоєння куба за допомогою додаткових інструментів

• 400 років до н.е. Платон знайшов розв'язок задачі за допомогою двох допоміжних прямих кутів.
Нехай $OA=a$ ребро даного куба. Проведемо через точку А пряму, що є перпендикулярною OA та відкладемо на ній відрізок $2a$ (Рис. 5).

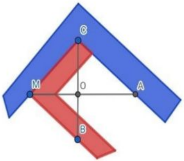


Рис.5. Косинці Платона

Подвоєння куба за допомогою додаткових інструментів

Розташуємо два прямі кути так, щоб:

1) вершина C першого кута має бути на продовженні променя OB, а вершина M –другого кута має бути на продовженні променя OA;

2) одна з сторін першого кута має проходити через точку A і одна сторона другого - через точку B;

3) дві інші сторони кутів мають потрапити на одну пряму CM.

В силу теореми про перпендикуляр, що виходить з вершини прямого кута до гіпотенузи, маємо

$$OA:OC=OC:OM;$$
$$OC:OM=OM:OB.$$

Тобто

$$a:OC=OC:OM$$
$$a:OC=OD:2a$$
$$a\times OM=OC^2$$
$$2a^2=OC\times OM$$
$$2a^3=OC^3$$

Квадратура круга

Квадратура круга

Задача квадратури круга, тобто побудови квадрата, рівновеликого даному кругу, в Стародавній Греції була, напевне, дуже популярною. Плутарх повідомляє, що філософ Анаксагор (біля 500 —428 рр. до н. е.) у в'язниці займався цією задачею. Про неї мовиться і в комедії Арістофана «Птаха» (414 р. до н. е.): «Приклавши сюди лінійку, круг описую циркулем, і вверх і вниз … Потім лінійкою відношу пряму. Круг тепер подібний чотирикутнику.» Ця згадка в комедії означає, що задача квадратури круга була загальновідома.

Квадратура круга

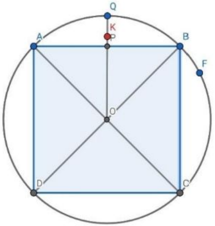
Дивним чином задача квадратури круга і зворотна їй задача «кругатури квадрата», тобто побудови круга, рівновеликого даному квадрату, була відома також і в Стародавній Індії. Індійські вівтарі були самої різної форми: у вигляді квадрата, круга, півкола, рівностороннього трикутника, рівнобедреної трапеції і т.д. Але всі ці вівтарі повинні були мати одну і ту ж площу. У зв'язку з цим виникали задачі перетворення круга в рівновеликий йому квадрат і квадрата в рівновеликий йому круг. Розв' язання цих задач зібрані в староіндійській книзі «Сульвасутра», присвяченій побудові вівтарів. Різні частини цієї книги датуються VII —II ст. до н.е. Розв' язання задач, що нас цікавлять містяться в найстародавнішій частині «Сульвасутри».

Квадратура круга

Побудова круга, рівновеликого квадратові, в «Сульвасутрі» описується так. Опишемо навкруг квадрата $ABCD$ коло. Нехай перпендикуляр до відрізка AB, проходить через центр O квадрата і перетинає пряму AB і коло в точках P і Q відповідно; точка K ділить відрізок PQ у відношенні $PK : KQ = 1 : 2$. (див. Рис. 1) Тоді OK—*радіус* круга, площа якого дорівнює площі квадрата. Це розв'язання, звичайно ж, наближене. Якщо a — сторона квадрата, r— радіус побудованого круга, то

$$r = \frac{a(2+\sqrt{2})}{6}.$$

Тому із співвідношення $a^2 = \pi r^2$ для числа π отримуємо наближене значення $a\left(\frac{3}{1+\sqrt{2}}\right)^2 \approx 3{,}088.$



Квадратура круга

Для розв'язання оберненої задачі, тобто для перетворення круга в рівновеликий йому квадрат, в Стародавній Індії не змогли знайти такої ж простої геометричної побудови і розв'язували її алгебраїчним способом. Це розв'язання виглядає наступним чином: якщо d — діаметр круга, a — сторона рівновеликого йому квадрата, то

$$a = d\left(1 - \frac{28}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}\right).$$

Квадратура круга

Для числа π це обчислення дає наближене значення 3,088.

Ці дуже близькі один до одного наближені значення числа π показують, мабуть, що перше (геометричне) розв'язання в Стародавній Індії вважалося точним. Друге (алгебраїчне) розв'язання явно перетворенням саме цієї геометричної побудови, при цьому використовувалось наближене значення, що зустрічається в книзі «Сульвасутра »

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 34} \approx 1{,}4142157,$$

яке відрізняється від точного значення тільки шостим знаком після коми.

Справді, підставивши у формулу $\frac{d}{a} = \frac{2+\sqrt{2}}{3}$ значення

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 34},$$

отримаємо $\frac{d}{a} = \frac{1393}{1224}$, тобто $\frac{a}{d} = \frac{1224}{1393}$.

Квадратура круга

Легко перевірити, що

$$\frac{1224}{1393}=1-\frac{1}{8}+\frac{1}{8\cdot 29}-\frac{1}{8\cdot 29\cdot 6}+\frac{1}{8\cdot 29\cdot 6\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 29\cdot 6\cdot 8\cdot 1393}.$$

Відкинувши останній доданок, отримаємо формулу, що міститься в книзі «Сульвасутра». Цей розклад отримуємо майже природним чином:

$$\frac{1224}{1393}=1-\frac{169}{1393};$$

$$\frac{169}{1393}=\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{8}-\frac{169}{1393}\right)=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cdot\frac{41}{1393};$$

$$\frac{41}{1393}=\frac{1}{29}-\left(\frac{1}{29}-\frac{41}{1393}\right)=\frac{1}{29}-\frac{1}{29}\cdot\frac{204}{1393};$$

$$\frac{204}{1393}=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{6}-\frac{204}{1393}\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{169}{1393};$$

$$\frac{169}{1393}=\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{8}-\frac{169}{1393}\right)=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cdot\frac{41}{1393}$$

Квадратура круга

Єдиний штучний крок в цьому розкладанні полягає в тому, що

$$\frac{1}{34} < \frac{41}{1393} < \frac{1}{33},$$

а в якості наближення числа $\frac{41}{1393}$ розглядають $\frac{1}{29}$.

Квадратура круга

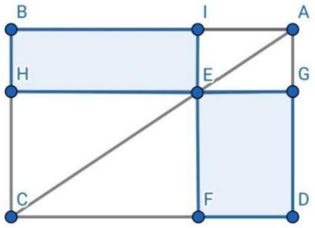
В Стародавній Греції задача квадратури круга виникла після того, як була розв' язана задача перетворення многокутника в рівновеликий йому прямокутник. Ця задача розв'язувалася таким чином. Спочатку многокутник розрізали на трикутники. Потім трикутник із стороною а і заввишки ha замінювали на рівновеликий йому прямокутник із сторонами і ha. Після цього вибирали деякий відрізок е і замінювали кожний прямокутник на рівновеликий йому прямокутник, одна сторона якого рівна е. Як це робилося, показано на рисунку

Квадратура круга

В Стародавній Греції задача квадратури круга виникла після того, як була розв' язана задача перетворення многокутника в рівновеликий йому прямокутник. Ця задача розв'язувалася таким чином. Спочатку многокутник розрізали на трикутники. Потім трикутник із стороною a і заввишки h_a замінювали на рівновеликий йому прямокутник із сторонами $a/2$ і h_a. Після цього вибирали деякий відрізок і замінювали кожний прямокутник на рівновеликий йому прямокутник, одна сторона якого рівна . Як це робилося, показано на рисунку

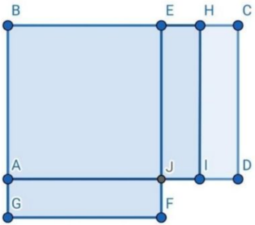
$BH=a$

$BI=b$



Квадратура круга

В книзі «Сульвасутра» квадрат, рівновеликий даному прямокутнику ABCD, будувався таким чином. Нехай для визначеності BC > AB. Відріжемо від прямокутника ABCD квадрат з стороною BC і розріжемо прямокутник, що залишився, на два рівні прямокутники; один з цих прямокутників прикладемо до квадрата. В результаті отримаємо фігуру, що зафарбована темно-синім

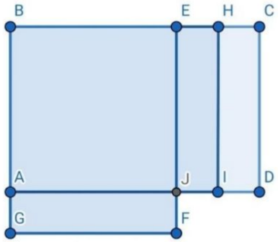


Ця фігура є квадратом зі стороною $a = BH$, з якого вирізаний квадрат із стороною $b = IJ$. Площа цієї фігури дорівнює площі квадрата із стороною x, де

$$x^2 = a^2 - b^2.$$

Квадратура круга

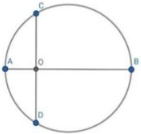
В книзі «Сульвасутра» квадрат, рівновеликий даному прямокутнику ABCD, будувався таким чином. Нехай для визначеності BC > AB. Відріжемо від прямокутника ABCD квадрат з стороною BC і розріжемо прямокутник, що залишився, на два рівні прямокутники; один з цих прямокутників прикладемо до квадрата. В результаті отримаємо фігуру, що зафарбована темно-синім



Квадратура круга

Побудова, описана в книзі «Сульвасутра», далеко не найпростіша. Більш просте розв' язання видно з рисунку: якщо хорда CD, перпендикулярна діаметру AB, перетинає його в точці O, то

$$CO^2 = CO \cdot OD = AO \cdot OB$$



тобто CO —сторона квадрата, площа якого дорівнює площі прямокутника із сторонами AO і OB. Евклід описує саме таку побудову, але доведення у нього таке саме, як в книзі «Сульвасутра»; воно теж основане на теоремі Піфагора.

Література

[1] David M. Burton. The History of Mathematics: An Introduction, 6th Edition, McGraw Hill Learning Solutions (2007)
[2] Craig Smory´nski, History of Mathematics, Springer (2008)
[3] Uta C.Merzbach and Carl B. Boyer, A History of Mathematics, 3d Edition, Printed in the United States of America (2011)
[4] Гуж М. М., Матеріали для проведення факультативних занять з математики, електронна версія (2020)

Дякую за увагу!