Week 6. Straightedge and compass construction. The basic constructions

Лекція 6. Побудова лінійкою та циркулем. Основні побудови

1. Перші задачі
2. Приклади побудов

1. Перші задачі

Вважається, що давньогрецькі математики були першими, хто почав говорити про задачі про побудову за допомогою циркуля та лінійки, які виникли скоріше як ігри розуму, а не з якихось практичних запросів. Проте метою таких є впевнитись, що необхідна побудова може бути виконана цілком правильно, якщо у ній виникне потреба.

Циркуль та лінійка, які використовували у подібних побудовах, це ідеалізація реальних лінійки та циркуля, яку можна описати шляхом накладання певних обмежень на ці два пристрої.

Означення 1. Вважається, що

1) *циркуль* може бути розгорнутим на довільну ширину; за допомогою циркуля можна креслити коло з центром у довільній точці, яке проходить через ще одну довільну точку;

2) *лінійка* має лише один прямий край без позначок; за допомогою лінійки можна провести пряму лінію, яка з’єднує довільні дві точки.

Сама процедура побудови та її результат також повинні задовольняти обмеженням скінченності та точності.

Означення 2. Кожна побудова повинна

1) складатись зі скінченної кількості кроків;

2) бути точною: жодне наближене розв’язком не вважається.

Вирішення задач на побудову добре ілюструє один з основних принципів вирішення будь-яких математичних задач: вирішити задачу це означає звести її до будь-якої задачі, вже вирішеною раніше!

Які побудови циркулем і лінійкою вважати стандартними?

Це питання попередньої домовленості. До стандартних побудов можна віднести наступні:

1) побудова прямої, що проходить через дві задані точки;
2) побудова кола з даними центром і даними радіусом;
3) побудова відрізка, рівного даному;
4) побудова кута, рівного даному;
5) побудова середини відрізка (серединного перпендикуляра до відрізка);
6) побудова бісектриси кута;
7) побудова перпендикуляра до прямої, що проходить через задану точку (два випадки).

На основі стандартних побудов легко здійснюється побудова трикутників за трьома основними елементами:

1) двом сторонам і куту;
2) стороні і двом кутам;
3) трьом сторонам.

2. Приклади побудов

Ми розглянемо кілька класичних побудов за допомогою циркуля та лінійки.

Задача 1. Збільшити відрізок в r разів. Вважаємо, що r **-** це натуральне число. Для розв'язання задачі будуємо коло з центром в точці B відрізка AB радіусом $|AB|$. Точку перетину коло з продовженням AB у бік точки B позначимо C. Зрозуміло, що $|AC| = 2|AB|$. Якщо $r = 2$**,** то необхідну побудову зроблено. Якщо ж $r > 2$, то будуємо коло з центром в точці C тим самим радіусом $|AB|$. Точка перетину цього кола з продовженням відрізка AB_2 у бік точки B_2 позначимо D. Зрозуміло, що $|AD| = 3|AB|$. Якщо $r = 3$, то необхідну побудову зроблено. Якщо ж $r > 3$, то повторюємо описану процедуру необхідну кількість разів.

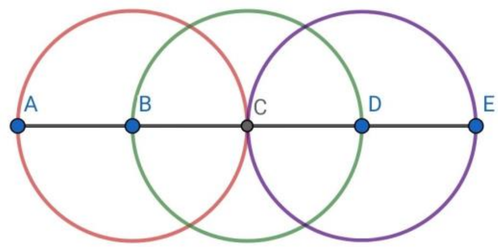

Рис.1

Задача 2. Поділити відрізок навпіл. Задано відрізок AB**.**

Рис 2.

За допомогою циркуля та лінійки необхідно поділити його навпіл, тобто на відрізку AB знайти таку точку O, що $|AO| = |OB|$.

Покажемо, як можна розв'язати цю задачу. Спочатку проведемо коло з центром в A довільного радіусу.

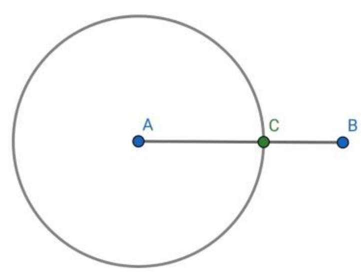

Рис.3.

Потім проведемо коло такого ж радіусу з центром в B. Точки перетину позначимо C_1 та C_2

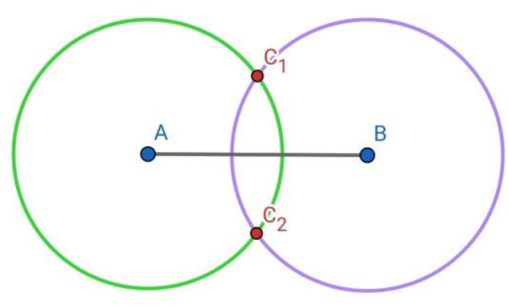

Рис.4.

З’єднаємо відрізками C_1 та C_2. Точка перетину двох відрізків C_1C_2 та AB є серединою відрізка AB.

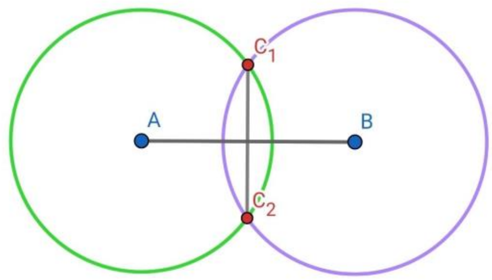

Рис.5.

Оскільки радіус кола у цій побудові обирався довільно, то можлива ситуація, коли побудовані два кола не перетинаються. Кола перетинаються тоді і тільки тоді, коли обраний радіус більший за половину відрізка. Якщо виникла ситуація, схожа до зображення на рис., то побудову треба повторити з радіусом $|AD_2|$, де D_1 та D_2 - це точки пертину з відрізком *AB* кіл, побудованих при першій спробі.

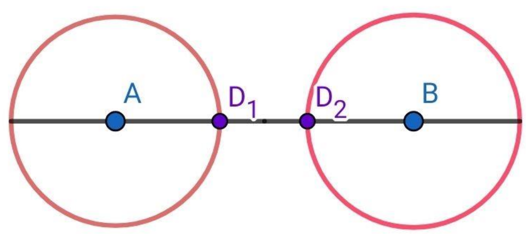

Рис.6.

Задача 3. Поділити кут навпіл. У куті *ABC* необхідно провести бісектрису. Спочатку довільним радіусом проводимо коло з центром в точці *B*.

Точки пертину кола з прямими *AB* та *CD* позначимо через *D* та *E*.

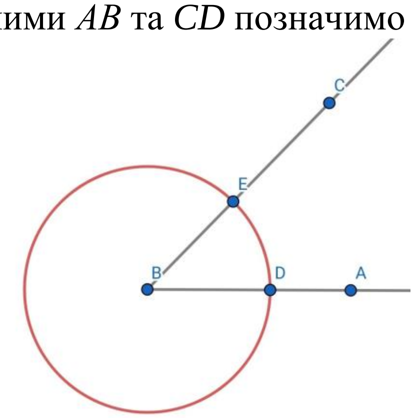

Рис.7

Потім будуємо два кола однакового радіусу з центрами в *D* та *E*. Одну з точок перетину цих кіл позначимо через *F*. бісектриса кута *ABC* проходить через точки *B* і *F*.

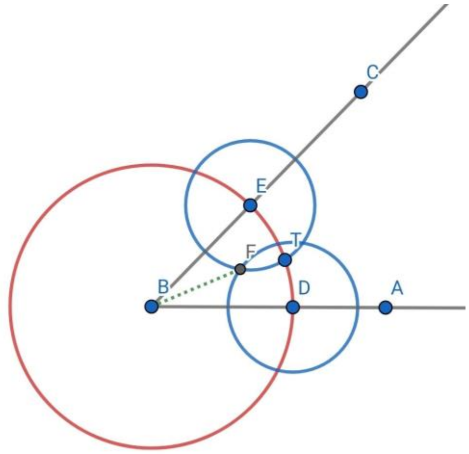

Рис.8

Щоб довести, що *BF* дійсно ділить кут *ABC* навпіл, достатньо розглянути трикутники *BEF* і *BDF*.

BE=*BD* як радіуси одного кола, а *EF*=*DF*, оскільки при побудові ми вибрали однакові радіуси для обох кіл. Сторона *BF* — спільна. Ці трикутники рівні за третьою ознакою рівності трикутників, тож їх відповідні кути рівні.
Отже, *BEF* і *BDF* — дві рівні частини одного кута, і це означає, що промінь *BF* ділить кут навпіл.

Задача 4. Підняти перпендикуляр. З точки *C*, яка знаходиться на відрізку *AB* необхідно підняти перпендикуляр.

Рис.9

Для цього вліво та вправо від точки *C* відкладаємо на однаковій відстані точки *D* та *E* будуємо два кола однакового радіусу з центрами в точках *D* та *E*. Позначимо, через *F* точку перетину цих двох кіл. Відрізок *FC* лежить на прямій, перпендикулярній до відрізка *AB*.

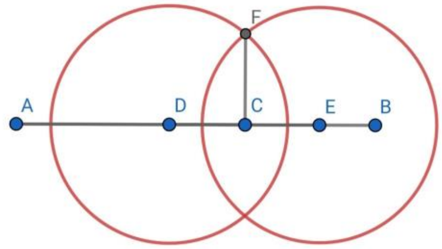

Рис.10

Чому ***FC*** **є перпендикулярною до** *AB? DE=EF*, оскільки обидва кола побудували з однаковими радіусами. Трикутник *DEF* – рівнобедрений. Позначимо іншу точку перетину двох кіл через *M*. Тоді *DM=ME* як радіуси однакових кіл. Трикутник *DEM* – рівнобедрений. Два рівнобедрені трикутники зі спільною стороною *DE* утворюють ромб з діагоналями *FM* та *DE*. Оскільки діагоналі ромба є перпендикулярними, то *FM* перпендикулярне *DE*. Звідки випливає, що *FC* шуканий перпендикуляр.

Задача 5. Опустити перпендикуляр. Задано пряму, яка визначається двома точками *A* та *B,* а також точку *C*, яка не лежить на цій прямій.

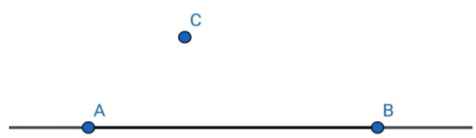

Рис. 11

Необхідно провести пряму перпендикулярну до *AB*, яка проходить через *C*.

Для цього будуємо коло довільного радіуса з центром в точці *C*. Точки перетину кола з прямою *AB* позначимо через *D* та *E*. Відрізок *DE* ділимо навпіл, його середину позначимо через *O*. Відрізок *OC* є перпендикуляром до *AB*.

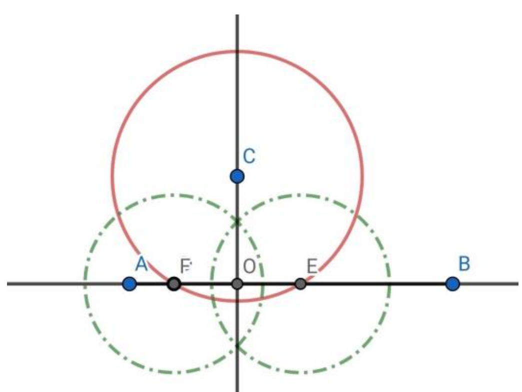

Рис. 13

Задача 6. Провести паралельну пряму. Задано пряму, яка визначається точками A і B, а також точку C, яка не лежить на цій прямій. Необхідно провести пряму паралельну до AB, яка проходить через C.

Для цього опускаємо перпендикуляр на AB з точки C. Його основу позначимо, через O. Тепер через точку С піднімаємо перпендикуляр до прямої CO.

Задача 7. Відрізок поділити на s рівних частин. Цю задачу розв'яжемо у частковому випадку $s = 4$. Розв'язання у загальному випадку цілком аналогічне цьому. З точки A відрізка AB проведемо довільний промінь AC. На промені AC відкладаємо чотири рівні відрізки. Кінцеві точки цих відрізків позначимо C_1, C_2, C_3 та C_4. З'єднаємо точки C_4 та B. Тепер через точки C_1, C_2 та C_3 проведемо прямі паралельні C_4B до перетину з AB у точках D_1, D_2, D_3 та D_4. Відрізки AD_1, D_1D_2, D_2D_3 та D_3B є рівними.

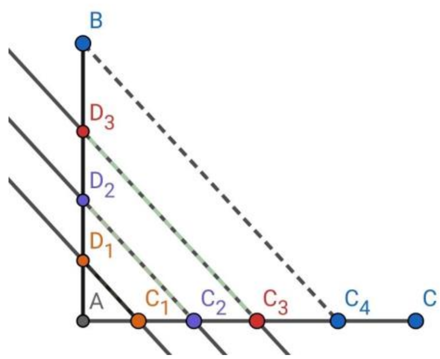

Рис. 14

Література

[1] Історія математики / Бевз В. Г. — Харків: Основа, 2006. — 171 с. — (Бібліотека журналу «Математика в школах України».

[2] Історія математики за стародавніх часів і в середні віки: посіб. для вчителів та студ. педвишів / Г. Г. Цейтен ; передм. М. Вигодського.

[3] Історія математики: [навч. посіб.] / Євген Крутиголова ; Дрогобиц. держ. пед. ун-т ім. Івана Франка. — Дрогобич:

[4] Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів: монографія / В. Г. Бевз ; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. —Київ.