

History of the development of mathematical ideas

Lecture 6. Straightedge and compass construction. The basic constructions.

O. Tymoshenko

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute



Історія розвитку
математичних ідей



Зміст

- 1 Перші задачі
- 2 Приклади побудов

Перші задачі

Перші задачі

- Вважається, що давньогрецькі математики були першими, хто почав говорити про задачі про побудову за допомогою циркуля та лінійки, які виникли скоріше як ігри розуму, а не з якихось практичних запитів. Проте метою таких є впевнитись, що необхідна побудова може бути виконана цілком правильно, якщо у ній виникне потреба.

Перші задачі

- Вважається, що давньогрецькі математики були першими, хто почав говорити про задачі про побудову за допомогою циркуля та лінійки, які виникли скоріше як ігри розуму, а не з якихось практичних запитів. Проте метою таких є впевнитись, що необхідна побудова може бути виконана цілком правильно, якщо у ній виникне потреба.
- Циркуль та лінійка, які використовували у подібних побудовах, це ідеалізація реальних лінійки та циркуля, яку можна описати шляхом накладання певних обмежень на ці два пристрої.

Перші задачі

Означення

Вважається, що

- 1 **циркуль** може бути розгорнутим на довільну ширину; за допомогою циркуля можна креслити коло з центром у довільній точці, яке проходить через ще одну довільну точку;
- 2 **лінійка** має лише один прямий край без позначок; за допомогою лінійки можна провести пряму лінію, яка з'єднує довільні дві точки.

Перші задачі

Сама процедура побудови та її результат також повинні задовольняти обмеженням скінченності та точності.

Означення

Кожна побудова повинна

- 1 складатись зі скінченної кількості кроків;
- 2 бути точною: жодне наближене розв'язком не вважається.

Вирішення задач на побудову добре ілюструє один з основних принципів вирішення будь-яких математичних задач: вирішити задачу це означає звести її до будь-якої задачі, вже вирішеною раніше!

Перші задачі

Які побудови циркулем і лінійкою вважати стандартними?

Це питання попередньої домовленості. До стандартних побудов можна віднести наступні:

- 1 побудова прямої, що проходить через дві задані точки;
- 2 побудова кола з даними центром і даними радіусом;
- 3 побудова відрізка, рівного даному;
- 4 побудова кута, рівного даному;
- 5 побудова середини відрізка (серединного перпендикуляра до відрізка);
- 6 побудова бісектриси кута;
- 7 побудова перпендикуляра до прямої, що проходить через задану точку (два випадки).

Перші задачі

На основі стандартних побудов легко здійснюється побудова трикутників за трьома основними елементами:

- 1 двом сторонам і куту;
- 2 стороні і двом кутам;
- 3 трьом сторонам.

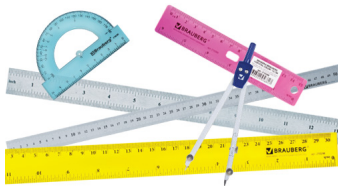


Figure: Циркуль та лінійка. ©<https://blanki.kiev.ua/>

Приклади побудов

Приклади побудов

Ми розглянемо кілька класичних побудов за допомогою циркуля та лінійки.

- **Задача 1. Збільшити відрізок в r разів.** Вважаємо, що r - це натуральне число.

Для розв'язання задачі будуємо коло з центром в точці B відрізка AB радіусом $|AB|$. Точку перетину коло з продовженням AB у бік точки B позначимо C . Зрозуміло, що $|AC| = 2|AB|$. Якщо $r = 2$, то необхідну побудову зроблено. Якщо ж $r > 2$, то будуємо коло з центром в точці C тим самим радіусом $|AB|$. Точка перетину цього кола з продовженням відрізка AB_2 у бік точки B_2 позначимо D . Зрозуміло, що $|AD| = 3|AB|$. Якщо $r = 3$, то необхідну побудову зроблено. Якщо ж $r > 3$, то повторюємо описану процедуру необхідну кількість разів.

Приклади побудов

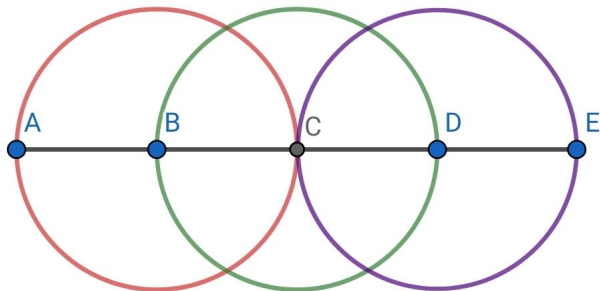


Figure: Збільшення відрізка в 3 рази

Приклади побудов

Ми розглянемо кілька класичних побудов за допомогою циркуля та лінійки.

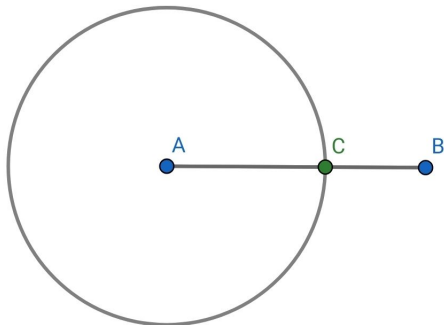
- **Задача 2. Поділити відрізок навпіл.** Задано відрізок AB .



За допомогою циркуля та лінійки необхідно поділити його навпіл, тобто на відрізок AB знайти таку точку O , що $|AO| = |OB|$.

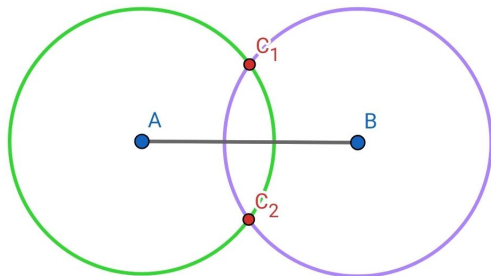
Приклади побудов

Покажемо, як можна розв'язати цю задачу. Спочатку проведемо коло з центром в A довільного радіусу.



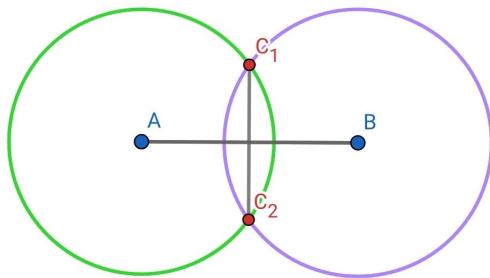
Приклади побудов

Потім проведемо коло такого ж радіусу з центром в A . Точки перетину позначимо C_1 та C_2 .



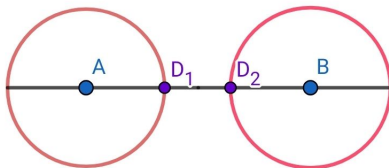
Приклади побудов

З'єднаємо відрізками C_1 та C_2 . Точка перетину двох відрізків C_1C_2 та AB є серединою відрізка AB .



Приклади побудов

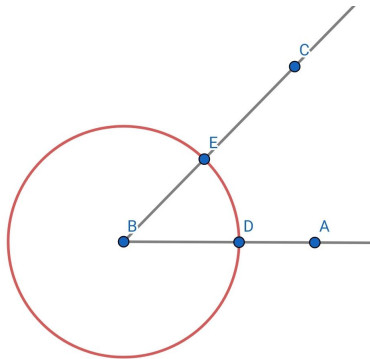
Оскільки радіус кола у цій побудові обирався довільно, то можлива ситуація, коли побудовані два кола не перетинаються. Кола перетинаються тоді і тільки тоді, коли обраний радіус більший за половину відрізка. Якщо виникла ситуація, схожа до зображення, то побудову треба повторити з радіусом $|AD_2|$, де D_1 та D_2 - це точки пертину з відрізком кіл, побудованих при першій спробі.



Приклади побудов

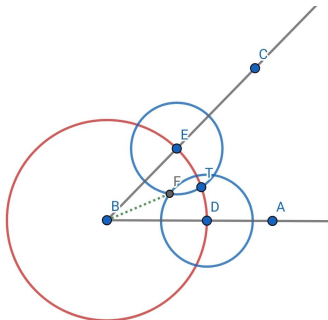
- **Задача 3. Поділити кут навпіл.** У куті необхідно провести бісектрису.

Спочатку довільним радіусом проводимо коло з центром в точці B . Точки пертину кола з прямими та CD позначимо через D та E .

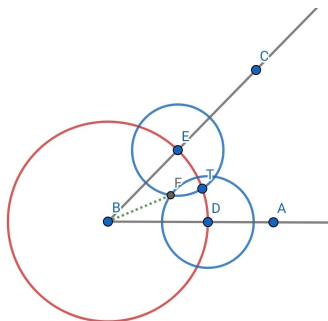


Приклади побудов

Потім будуємо два кола однакового радіусу з центрами в D та E . Одну з точок перетину цих кіл позначимо через F . Бісектриса кута ABC проходить через точки B і F .



Приклади побудов



Щоб довести, що F дійсно ділить кут навпіл, достатньо розглянути трикутники BEF і BDF .

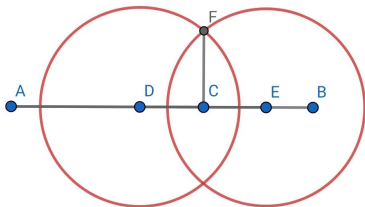
$BE = BD$ як радіуси одного кола, а $EF = DF$, оскільки при побудові ми вибрали однакові радіуси для обох кіл. Сторона BF — спільна. Ці трикутники рівні за третьою ознакою рівності трикутників, тож їх відповідні кути рівні. Отже, BEF і BDF — дві рівні частини одного кута, і це означає, що промінь BF ділить кут навпіл.

Приклади побудов

- **Задача 4. Підняти перпендикуляр.** З точки C , яка знаходиться на відрізьку AB необхідно підняти перпендикуляр.

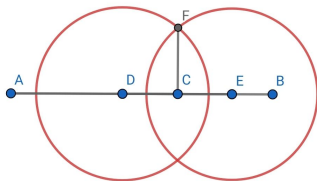


Приклади побудов



Для цього вліво та вправо від точки C відкладаємо на однаковій відстані точки D та E будуємо два кола однакового радіусу з центрами в точках D та E . Позначимо, через F точку перетину цих двох кіл. Відрізок FC лежить на прямій, перпендикулярній до відрізка DE .

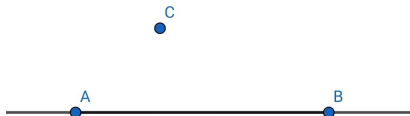
Приклади побудов



Чому FC є перпендикулярною до AB ? $DE = EF$, оскільки обидва кола побудували з однаковими радіусами. Трикутник DEF – рівнобедрений. Позначимо іншу точку перетину двох кіл через M . Тоді $DM = ME$ як радіуси однакових кіл. Трикутник DEM – рівнобедрений. Два рівнобедрені трикутники зі спільною стороною DE утворюють ромб з діагоналями FM та DE . Оскільки діагоналі ромба є перпендикулярними, то FM перпендикулярне DE . Звідки випливає, що FC шуканий перпендикуляр.

Приклади побудов

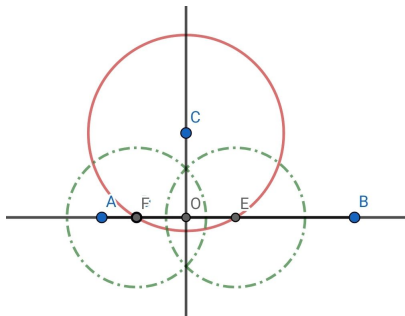
- **Задача 5. Опустити перпендикуляр.** Задано пряму, яка визначається двома точками A та B , а також точку C , яка не лежить на цій прямій.



Необхідно провести пряму перпендикулярну до AB , яка проходить через C .

Приклади побудов

Для цього будуємо коло довільного радіуса з центром в точці C . Точки перетину кола з прямою AB позначимо через D та E . Відрізок DE ділимо навпіл, його середину позначимо через O . Відрізок OC є перпендикуляром до AB .



Приклади побудов

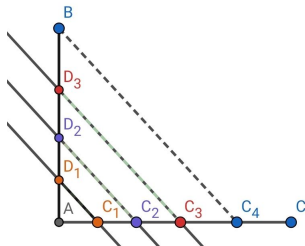
- **Задача 6. Провести паралельну пряму.** Задано пряму, яка визначається точками A і B , а також точку C , яка не лежить на цій прямій. Необхідно провести пряму паралельну до AB , яка проходить через C .

Для цього опускаємо перпендикуляр на AB з точки C . Його основу позначимо, через O . Тепер через точку C піднімаємо перпендикуляр до прямої CO .

Приклади побудов

- Задача 7. Відрізок поділити на s рівних частин.**

Цю задачу розв'яжемо у частковому випадку $s = 4$. Розв'язання у загальному випадку цілком аналогічне цьому. З точки A відрізка AB проведемо довільний промінь AC . На промені AC відкладаємо чотири рівні відрізки. Кінцеві точки цих відрізків позначимо C_1, C_2, C_3 та C_4 . З'єднаємо точки C_4 та B . Тепер через точки C_1, C_2, C_3 проведемо прямі паралельні C_4B до перетину з AB у точках D_1, D_2, D_3 та D_4 . Відрізки AD_1, D_1D_2 , та D_3B є рівними.



Література

- [1] Історія математики / Бевз В. Г. —Харків: Основа, 2006. —171 с. — (Бібліотека журналу «Математика в школах України».
- [2] Історія математики за стародавніх часів і в середні віки: посіб. для вчителів та студ. педвишів / Г. Г. Цейтен ; передм. М. Вигодського.
- [3] Історія математики: [навч. посіб.] / Євген Крутигорова ; Дрогобиц. держ. пед. ун-т ім. Івана Франка. —Дрогобич:
- [4] Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів: монографія / В. Г. Бевз ; Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. —Київ.

Дякую за увагу!