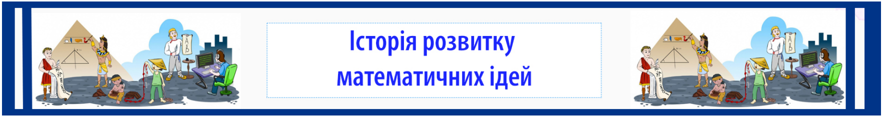
History of the development of mathematical ideas

Lecture 7. Angle trisection.

O. Tymoshenko

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute



Зміст

Вступ

Вступ

Здійснити трисекцію кута – це означає поділити кут на три рівні частини. Зробити це нескладно за допомогою транспортира з нанесеними на ньому позначками градусних мір. Така трисекція кута математиками не визнається, оскільки набір інструментів, якими необхідно її зробити, обмежений циркулем та лінійкою.
Бісекцію довільного кута – поділ кута на дві рівні частини – можна зобразити досить просто, використовуючи лише циркуль та лінійку.

Слово «трисекція» походить від латинського «tri», що означає «три» і «sectio», що означає «розрізання».
Батьківщиною цієї задачі про трисекцію кута є давня Греція. Поява задачі про поділ кута на три рівні частини не пов' язана з легендами чи переказами, вчені вважають, що вона виникла через потреби архітектури і будівельної техніки.

Figure: Греція ©Wikipedia

При створені робочих креслень орнаментів, різного роду прикрас, багатогранних колонад, при будівництві внутрішньої і зовнішньої обробки храмів, пам' ятників і інших великих і маленьких споруд, інженери, художники і архітектори зустрічались з необхідністю вміти ділити окружність на скінченну кількість рівних частин, а це в деяких випадках(і досить часто) приводило їх до розгляду трисекції деяких кутів.

Ділити кут на дві рівні частини давні грекі уміли досить легко, а ось розділити кут на три частини, виявилось не завжди можливим.

Трисекція: неприйнятні розв’язки

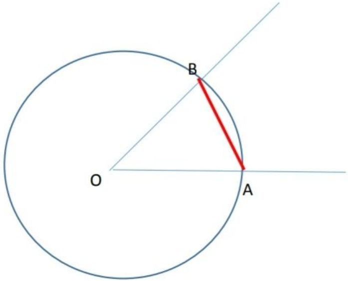
Трисекція: ітеративний метод

Здається, що поділити кут на три рівні частини нескладно: для цього достатньо використовувати транспортир. Проте використання цього предмету не передбачено умовою задачі. Крім того, результат поділу не буде точним. Але можна обійтися без транспортира, якщо застосувати метод послідовних наближень, для реалізації якого необхідні лише циркуль та лінійка.

Трисекція: ітеративний метод

Побудова:

- будуємо коло довільного радіусу у вершині кута;
- на колі відмітимо дугу AB, на яку спирається кут;
- визначимо хорду AC, яка здається втричі коротшою за AB й, починаючи з A відкладемо її три рази на колі.
- кінець третьої короткої хорди позначимо D. Якщо D співпадає з B, то задачу розв' язано. Якщо ж ні –то обрану нами хорду треба підправити.



Трисекція: ітеративний метод

Математичне обґрунтування наведеної процедури

Розглянемо геометричний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1} = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} + \ldots = \frac{b_1}{1-q}$$

$$|q| < 1.$$

Нехай

$$b_1 = \frac{1}{2};\ q = -\frac{1}{2}.$$

Тоді одержимо ряд

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^n} + \ldots$$

Трисекція: ітеративний метод

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Маємо

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Домножимо ліву та праву частину рівності на α :

$$\frac{\alpha}{3}=\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha}{8}-\frac{\alpha}{16}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\alpha}{2^n}+\ldots$$

Необхідно реалізувати нескінчену кількість ітерацій.

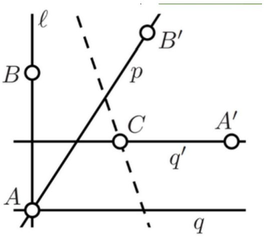
Трисекція: методи розв'язання

Методи розв ' язання задачі про трисекцію

- Хоча трисекція кута в загальному випадку нездійсненна за допомогою циркуля і лінійки, існують криві, за допомогою яких цю побудову можна здійснити. Равлик Паскаля або трисектриса, Квадратриса, Конхоїда Нікомеда, Конічні перетини, Спіралі Архімеда.
- Трисекція можлива при побудові за допомогою плаского оріґамі
- Трисекція можлива з використанням невсіса.

Трисекція кута за допомогою плаского орігамі

Нехай кут заданий двома складками p і q, позначимо через A вершину кута. Спочатку проведем підготовчі побудови, використаєм властивість оріґамі, яка каже, що лист можна скласти так, що дві відмічені точки будуть на складці.



Трисекція кута за допомогою плаского орігамі

Тепер складемо лист так, щоб A попала на q', а B на p, використовуючи властивість про те, що лист, який має дві відмічені прямі p і q і дві точки A і B, можна скласти так, що точка A попаде на пряму p, а точка B на пряму q.

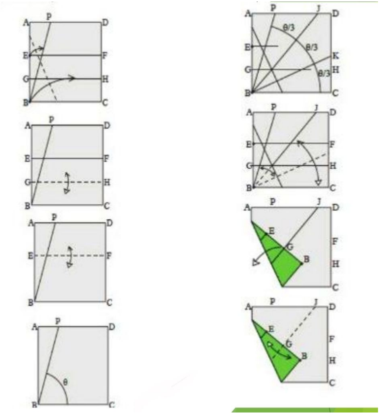


Figure: Метод орігамі ©Wikipedia

Метод Вставки

Розглянемо ще один спосіб поділу довільного кута на три рівні частини, який називають методом вставки. Цей метод був відомий ще у древній Греції, можливо його автором є Архімед, який жив приблизно у 287-212 роках до нашої ери.
Продовжимо одну з сторін даного кута $\angle ABC = \alpha$ за вершини B й побудуємо довільним радіусом r півкола з центром у B; нехай це півколо перетинає іншу сторону кута у точці D

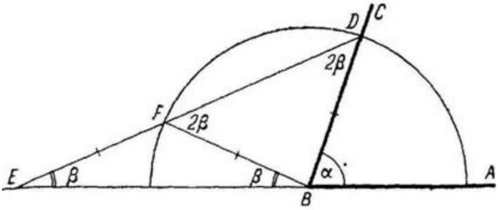


Figure: Метод вставки ©Wikipedia

Метод Вставки

Тепер на лінійці зробимо дві позначки E і F на відстані r одна від іншої. Розсташуємо лінійку так, щоб її ребро проходило через точку D, а позначка E опинилась на продовженні BA. Позначка F опиниться або поза півкола, або всередені півкола, або на ньому. У перших двох випадках будемо зсувати лінійку, зберігаючи обидві умови (вона має проходити через точку D, а позначка E має знаходитись на продовженні BA). Врешті решт ми досягнемо того, щоб позначка F опинилась на півколі.

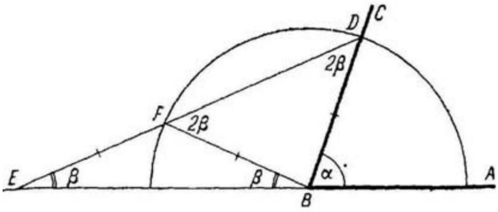


Figure: Метод вставки ©Wikipedia

Метод Вставки

Ми кажемо, що ми здійснили вставку відрізка $EF = r$ між прямою BA та колом, причому цю вставку ми здійснюємо на промені, який виходить з точки D.
Таким чином ми отримуємо рівнобедрений трикутник BFE ($EF = BF = r$). Позначивши кожен з двох рівних кутів його основи через β ми робимо висновок про те, що $\angle BFD = 2\beta$. З іншого боку, трикутник BDF є також рівнобедренним, а тому $\angle BDE = \angle BFD = 2\beta$.

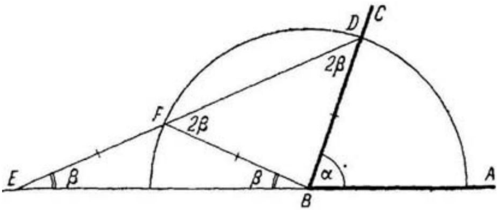


Figure: Метод вставки ©Wikipedia

Метод Вставки

Залишається розглянути трикутник BDE, для якого кут $\angle ABC = \alpha$, як зовнішній, дорівнює сумі $\angle BED = \beta$ та $\angle BDE = 2\beta$. Отже $= 3\beta$, а $\angle BED = \beta$ є третиною даного кута .

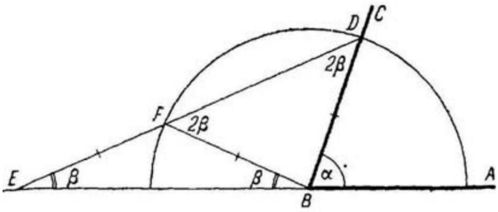


Figure: Метод вставки ©Wikipedia

Метод Вставки

Таким чином, як здається на перший погляд, ми розв'язали задачу трисекції довільного кута. Проте лінійку у цьому способі було використано не тільки для проведення прямих ліній, як передбачено умовою задачі, але й для здійснення більш складної операції вставки радіуса між продовженням та півкола. Ми використовували лінійку для побудови особливоїкривої, яку називають "конхоїдою": обертаючи лінійку навколо точки D і одночасно переміщуючи її так, щоб точка E весь час на прямій BA, ми змушуємо другу позначку (точку F) рухатися по площині, викреслюючи певну криву.

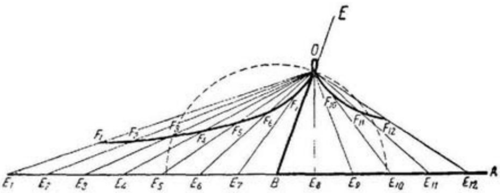


Figure: Метод вставки ©Wikipedia

Теорема Ванцеля

Теорема Ванцеля

Доведення теореми Ванцеля

Алгебраїчний еквівалент задачі можна отримати різними способами: найпростіший полягає у переході від самого кута α до його косинуса $\cos\alpha = \gamma$.

Доведемо формулу:

$$\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}.$$

Для спрощення позначимо $\alpha = 3\theta$:

$$\cos 3\theta = \cos(\theta + 2\theta) = \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta =$$

$$= \cos^3\theta - \cos\theta\sin^2\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta(1 - \cos^2\theta) =$$

$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

Тобто задача рівносильна побудові кореня кубічного рівняння.

$$4x^3 - 3x - \cos\alpha = 0$$

Теорема Ванцеля

Вважаємо, що $\alpha = 60^0$, тоді

$$\gamma = \cos 60^0 = \frac{1}{2}.$$

Тоді

$$8x^3 - 6x = 1$$

Достатньо показати, що рівняння не має раціональних коренів.

Покладемо $v = 2x$, тоді $v^3 - 3v = 1$. Якби існувало раціональне число $v = \frac{r}{s}$, яке задовольняє рівняння, де *r, s* –цілі числа без спільного множника (>1), то

$$r^3 - 3s^2 r = s^3.$$

Звідси ми б зробили висновок, що число $s^3 - r^3 + 3s^2 r$ ділиться на *r*. Тому *r, s* мали б спільний множник, якщо $r \neq \pm 1$.

Дякую за увагу!