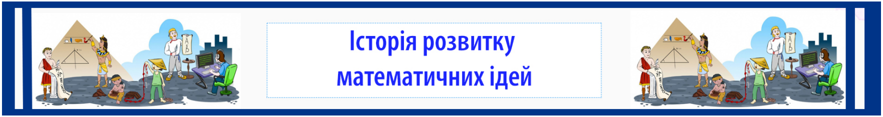
History of the development of mathematical ideas

Lecture 8. Geometric construction of the square root and other generalizations

O. Tymoshenko

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute



Зміст

Вступ

Вступ

- ”Раціональні” алгебраїчні операції – додавання, віднімання, множення і ділення, які виконуються над заданими величинами, можуть бути реалізовані за допомогою геометричних побудов.

Вступ

- ”Раціональні” алгебраїчні операції – додавання, віднімання, множення і ділення, які виконуються над заданими величинами, можуть бути реалізовані за допомогою геометричних побудов.
- Виходячи з даних відрізків, що вимірюються дійсними числами $a, b, c, \ldots$, ми можемо побудувати будь-яку величину, яка через $a, b, c, \ldots$ виражається раціонально, тобто за допомогою лише перерахованих чотирьох основних дій.

Вступ

- "Раціональні" алгебраїчні операції – додавання, віднімання, множення і ділення, які виконуються над заданими величинами, можуть бути реалізовані за допомогою геометричних побудов.
- Виходячи з даних відрізків, що вимірюються дійсними числами $a, b, c, \ldots$, ми можемо побудувати будь-яку величину, яка через $a, b, c, \ldots$ виражається раціонально, тобто за допомогою лише перерахованих чотирьох основних дій.
- Сукупність усіх величин, які таким чином можуть бути отримані з $a, b, c, \ldots$, утворює те, що називається числовим полем –множину чисел, які мають властивість таку що довільна раціональна операція, яка проводиться над двома (або більше) елементами цієї множини, призводить знову до елементу цієї ж множини.

Вступ

Нагадаємо, що сукупність всіх раціональних чисел, сукупність всіх дійсних чисел, сукупність всіх комплексних чисел утворюють такі поля. У розглянутому нами тепер випадку говорять, що поле породжується даними числами $a, b, c, \ldots$.

Твердження

Якщо дано відрізок довжини a, то можна побудувати будь-який відрізок довжини $\frac{m}{n} \cdot a$, де m і n натуральні числа.

Вступ

Нагадаємо, що сукупність всіх раціональних чисел, сукупність всіх дійсних чисел, сукупність всіх комплексних чисел утворюють такі поля. У розглянутому нами тепер випадку говорять, що поле породжується даними числами $a, b, c, \ldots$.

Твердження

Якщо дано відрізок довжини a, то можна побудувати будь-який відрізок довжини $\frac{m}{n} \cdot a$, де m і n натуральні числа.

Завдання. За допомогою Geogebra збільшити відрізок в r разів, де r – деяке раціональне число.

Вступ

Нагадаємо, що сукупність всіх раціональних чисел, сукупність всіх дійсних чисел, сукупність всіх комплексних чисел утворюють такі поля. У розглянутому нами тепер випадку говорять, що поле породжується даними числами $a, b, c, \ldots$.

Твердження

Якщо дано відрізок довжини a, то можна побудувати будь-який відрізок довжини $\frac{m}{n} \cdot a$, де m і n натуральні числа.

Завдання. За допомогою Geogebra збільшити відрізок в r разів, де r – деяке раціональне число.

Завдання. Дано відрізки a, b,c. Побудуйте відрізок довжини x, якщо

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$$

Frame Title

Але чи всі числа можна побудувати за допомогою циркуля та лінійки?

Перехід до ірраціональних чисел

Перехід до ірраціональних чисел

А як бути з ірраціональними числами?

Чи зможемо ми побудувати, наприклад, відрізки довжини $a\sqrt{2}$ або $a\sqrt{3}$, якщо заданий відрізок довжини a?

Перехід до ірраціональних чисел

А як бути з ірраціональними числами?

Чи зможемо ми побудувати, наприклад, відрізки довжини $a\sqrt{2}$ або $a\sqrt{3}$, якщо заданий відрізок довжини a?

Число $a\sqrt{2}$. Достатньо побудувати рівнобедрений прямокутний трикутник з катетом 1, тоді його гіпотенуза і буде шуканим відрізком.

Перехід до ірраціональних чисел

А як бути з ірраціональними числами?

Чи зможемо ми побудувати, наприклад, відрізки довжини $a\sqrt{2}$ або $a\sqrt{3}$, якщо заданий відрізок довжини a?

Число $a\sqrt{2}$. Достатньо побудувати рівнобедрений прямокутний трикутник з катетом 1, тоді його гіпотенуза і буде шуканим відрізком.
Число $a\sqrt{3}$. Можна побудувати прямокутний трикутник з гіпотенузою 2 і катетом 1.

Перехід до ірраціональних чисел

Насамперед потрібно зазначити, що число може бути побудоване тоді й лише тоді, якщо його можна записати з використанням чотирьох базових арифметичних операції та лише квадратного кореня, але не кореня іншого степеня, тому побудова квадратного кореня є однією з основних побудов.
Оскільки поле точок, що можна побудувати замкнене відносно квадратних коренів, воно містить усі точки, які можна отримати скінченною послідовністю квадратичних розширень поля комплексних точок їх раціональними коефіцієнтами. Будь-яка точка, яку можна побудувати, може бути отримана такою послідовністю розширень. Як наслідок цього, можна сказати, що мінімальний поліном для точки, що доступна до побудови (і через це будь-яка довжина, яку можна побудувати), має степінь 2.

Перехід до ірраціональних чисел

Варто пам'ятати, що саме піфагорійці були засновниками так званої геометричної алгебри. В чому ж полягала суть геометризації алгебри та для чого вона взагалі була потрібна? Як зазначає математик Папп, це пов'язано з відкриттям ірраціональності, яке було зроблене в піфагорійській школі. Вважалося, що діагональ квадрата не може бути виміряною, адже вона не виражається не тільки цілим числом, але й дробом.

Сьогодні, наприклад, ми кажемо, що діагональ квадрата зі стороною один дорівнює ірраціональному числу –кореню з двох. Однак греки, говорячи про числа, мали на увазі щось на позначення кількості, а тому не могли допустити навіть раціональних дробів, замінюючи їх на відношення цілих чисел. Вавилоняни, наприклад, з легкістю користувалися наближеними значеннями, а грекам було важливе точне значення, «діагональ по самій її суті», як виражав це Платон.

Перехід до ірраціональних чисел

Рівняння $x^2 = 2$ не може бути розв' язане ні в області цілих чисел, ні навіть у сфері відношень чисел (дробів). Але його цілком можна розв' язати в області прямолінійних відрізків: дійсно, його розв' язком є діагональ квадрата зі стороною, що дорівнює одиниці. Отже, для того, щоб отримати точне рішення квадратного рівняння, нам слід з області «чисел» (як вони сприймалися у грецькій математиці) перейти до області геометричних величин. Геометрична алгебра використовує також і ірраціональні відрізки і тим не менш є точною наукою.

Перехід до ірраціональних чисел

Феодор з Кірени (близько 430 до н. е.), за словами Платона, довів ірраціональність $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ і т. д. до $\sqrt{17}$, але він обійшов мовчанням $\sqrt{2}$. Звідси Цейтен робить висновок, що ірраціональність $\sqrt{2}$ або діагоналі одиничного квадрата була відома до нього. З іншого сторони, Папп каже, що теорія ірраціональностей набула свій початок у школі Піфагора, і справді, піфагорійська теорія парного та непарного вже давала можливість довести ірраціональність $\sqrt{2}$, тому ймовірно, що це доведення належить піфагорійцям.

Перехід до ірраціональних чисел

Евклід (близько 325 до н. е.), наприклад, вводить поняття ірраціонального відрізка як медіалі. Медіальною площею називається площа прямокутника ab, сторони a і b якого виразні, але один з одним непорівнянні. Ми б сказали, що це площа, рівна $\sqrt{r}$, де r є раціональним числом. Відрізок, квадрат на якому має медіальну площу, називається медіальним відрізком, ми сказали б відрізком $\sqrt[4]{r}$. Довжина цього відрізка задовольняє рівняння $x^2 = ab$ і таким чином, є середньою пропорційною між і b, звідки така назва –медіаль.
Таким чином, Евклід кожне ірраціональне число намагався представити у вигляді діагоналі певного прямокутника, що звісно викликало певні труднощі, як наприклад у випадку, коли було задано певну суму $a + b$ або різницю $a - b$ (відрізки певної довжини, а не площі).

Висновок

Отже, $\sqrt{2}$, як число, було знайдене саме піфагорійцями, вони й довели його ірраціональність. Доведення ірраціональності чисел $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ і т. д. до $\sqrt{17}$ належить Феодору з Кірени, а Евклід узагальнив поняття ірраціональності та запропонував доведення, яке сьогодні стало класичним.

Ірраціональність числа $\sqrt{2}$

Перехід до ірраціональних чисел

Чому число $\sqrt{2}$ ірраціональне?

Сучасному доведенню того, що $\sqrt{2}$ є ірраціональним, відповідає за своєю сутністю доведення про несумірні відрізки, яке є найдавнішим. Це доведення про неспівмірність діагоналі квадрата з його стороною, і його можна знайти в десятій книзі «Початків» Евкліда. Посилання в одній із праць Аристотеля, однак, дає зрозуміти, що доведення було відоме задовго до часів Евкліда. Як і в більшості класичних доведень використовувався метод від супротивного.

Перехід до ірраціональних чисел

Аргументація полягає в наступному. Якщо діагональ AC і сторона A квадрата $ABCD$ мають спільну міру, скажімо σ, то існують натуральні числа m і n, що задовольняють $AC = m\sigma$, $AB = n\sigma$. Відношення цих відрізків дорівнює

$$\frac{AC}{AB} = \frac{m}{n}$$

Припустимо, що m і n є взаємнопростими. Тоді

$$\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Застосовуючи теорему Піфагора до трикутника ABC, отримуємо $AC^2 = 2AB^2$, а отже

$$2 = \frac{m^2}{n^2},$$

або

$$2n^2 = m^2.$$

Перехід до ірраціональних чисел

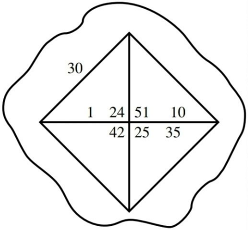
Тепер $2n^2$, як кратне 2, є парним цілим; отже m^2 є парним. А як щодо самого m? Якби m було непарним, то m^2 було б непарним, тому що квадрат будь-якого непарного цілого числа повинен бути непарним. Отже, m є парним, скажімо, $m = 2k$. Підставивши цю величину в рівняння $m^2 = 2n^2$ і спрощуючи, ми отримуємо

$$2k^2 = n^2.$$

Можна зробити висновок, що n є парним числом. Основний результат полягає в тому, що m і n парні (тобто кожен має коефіцієнт 2), що суперечить початковому припущенню, що вони не мають жодного спільного множника.

Перехід до ірраціональних чисел

Піфагорійці не були першими, хто розглянув числове значення $\sqrt{2}$. Клинописна табличка, яка зараз знаходиться в Єльській вавилонської колекції, містить схему квадрата з його діагоналями



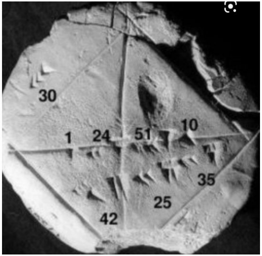


Figure: Рис.1. Вавилонська табличка ©Wikipedia

У шістдесятковому численні число 1-24-51- 10 дорівнює

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx 1.414213,$$

$$\sqrt{2} \approx 1.414213562...$$

Перехід до ірраціональних чисел

Греки побудували відрізок довжиною $\sqrt{n}$, де n є додатним цілим числом

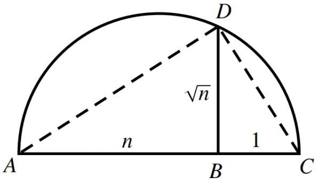


Figure: Рис.2. ©Wikipedia

Завдання. Повторити побудову греків в Geogebra

Перехід до ірраціональних чисел

Узагальнення попередньої задачі.
Завдання. Побудувати прямокутний трикутник, якщо задано проекції катетів на гіпотенузу

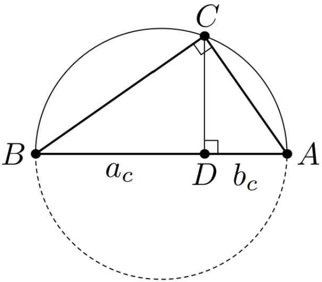


Figure: Рис.3. ©Wikipedia

Числа сторін і діагоналей Теона

Числа сторін і діагоналей Теона

Теон зі Смірни (близько 130 р.) розробив процедуру досягнення все ближчих і ближчих наближень числа $\sqrt{2}$ раціональними числами. Обчислення включають дві послідовності чисел, «бічні числа» та «діагональні числа».

Числа сторін і діагоналей Теона

Починаємо з двох чисел, Перше число називається– перша сторона і позначається x_1, а друге число – це перша діагональ і позначаємо y_1. The друга сторона і діагональ – (x_2 і y_2) утворюються з першої пари, третя сторона і діагональ (x_3 і y_3) з другого і так далі за схемою:

$$x_2 = x_1 + y_1,\ y_2 = 2x_1 + y_1,$$

$$x3 = x_2 + y_2, y_3 = 2x_2 + y_2,$$

....

Загалом x_n і y_n отримуються з попередньої пари бічних і діагональних чисел за допомогою формули

$$x_n = x_{n-1} + y_{n-1},\ y_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}.$$

Числа сторін і діагоналей Теона

Якщо за початкові значення взяти $x_1 = y_1 = 1$, то

$$x_2 = 1 + 1 = 2, \;\; y_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3,$$

$$x_3 = 2 + 3 = 5, \;\; y_3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7,$$

$$x_4 = 5 + 7 = 12, \;\; y_4 = 2 \cdot 5 + 7 = 17.$$

$$\dots$$

Назви номерів сторін і діагональних чисел натякають на те, що частки $\frac{y_n}{x_n}$ пов’язаніз відношення діагоналі квадрата до його сторони:

$$\frac{y_1}{x_1} = 1,$$

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{3}{2},$$

$$\frac{y_3}{x_3} = \frac{7}{5},$$

$$\dots .$$

Числа сторін і діагоналей Теона

Звідси випливає, що ${y_n}^2 = 2{x_n}^2 \pm 1$ тоді

$$\left(\frac{y_n}{x_n}\right)^2 = 2 \pm \frac{1}{{x_n}^2}$$

Оскільки значення $\frac{1}{{x_n}^2}$ можна зробити як завгодно малим, взявши n достатньо великим, то виявляється, що

$$\frac{x_n}{y_n} = \sqrt{2 \pm \frac{1}{{x_n}^2}}$$

має тенденцію залишатися поблизу деякого фіксованого числа для великих n. Можна показати, що фіксованою «межею» є $\sqrt{2}$.

Числа сторін і діагоналей Теона

Ви можете побачити, як це працює, розглянувши випадок $n = 4$. Тут

$$\left(\frac{y_4}{x_4}\right)^2 = \left(\frac{17}{12}\right)^2 = \frac{289}{144} = \frac{288}{144} + \frac{1}{144} = 2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2,$$

звідки

$$\frac{y_4}{x_4} = \sqrt{2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2}$$

Відношення $\frac{y_4}{x_4}$ відрізняється від справжнього значення $\sqrt{2}$ менш ніж на 0,0014286

Бічні та діагональні числа. Узагальнення

Для визначення загальної максимальної міри двох сумірних величин a і b грецька математика знала спосіб поперемінного віднімання (antanairesis): меншу величину, наприклад a, віднімають з більшої, так що виходять дві нові величини a і $b-a$, потім знову меншу віднімають з більшої і т. д. Якщо існує загальна міра, то цей процес неминуче приведе до двох рівних величин $c=d$, кожна з яких є загальна найбільша міра. У VII книзі «Початків» цей метод застосовується для знаходження загального найбільшого дільника чисел, а на початку книги X —для довільних величин, щоб встановити, чи є у них загальна міра і якщо так, то яка вона. Однак, якщо застосувати цей спосіб до двох несумірних величин, процес стає нескінченним.

Якщо, наприклад, a є сторона, а b- діагональ квадрата, то а можна один раз відняти від b. Залишок $b - a = AD = DE = EB = {}'$ можна знову відняти від а=АВ; у залишку вийде $b' = AE$. Тепер a' і b' знову представляють сторону і меншу діагональ, квадрата, і

$$b' = a - a'; a' = b - a$$

випливає

$$a = a' + b'; b = 2a' + b'.$$

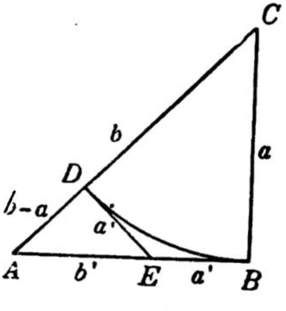


Figure: Рис.4. ©Wikipedia

Ці формули вже мають той самий вигляд, що і рекурентні формули, які ми бачили раніше. Якщо ми продовжимо процес повторюваного віднімання, то знову отримаємо ще менші сторону та діагональ, a'' і b''. Якщо ми дійдемо до того, що різниця між a''' і b''' стане надзвичайно малою, і зупинимося на наближенні $a''' = b'''$, обравши a''' як одиницю довжини, тоді a'' і b'', a' і b' і, нарешті, a і b будуть представлені у вигляді ряду послідовних бічних та діагональних чисел. Піфагорійці знайшли цілу низку наближень необмежено зростаючої точності, а крім того, створили наукову теорію цих наближення і довели загальну пропозицію рекурентного представлення за допомогою повної індукції.

Література

[1] David M. Burton. The History of Mathematics: An Introduction, 6th Edition, McGraw Hill Learning Solutions (2007)
[2] Craig Smory´nski, History of Mathematics, Springer (2008)
[3] Uta C.Merzbach and Carl B. Boyer, A History of Mathematics, 3d Edition, Printed in the United States of America (2011)
[4] Гуж М. М., Матеріали для проведення факультативних занять з математики, електронна версія (2020)
[5] Про можливе і неможливе в геометрії циркуля та лінійки / В. Н. Костарчук, Б. І. Хацет // Радянська школа –1962. –128 с.
[6] Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука: Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции / Пер. И. Н. Веселовского. —М.: Физматгиз, 1959. (Репр.: М.: УРСС, 2007)
[7] Жмудь Л. Я. Пифагор и его школа (ок. 530 —ок. 430 гг. до н. э.). —Л.: Наука, 1990.

Дякую за увагу!