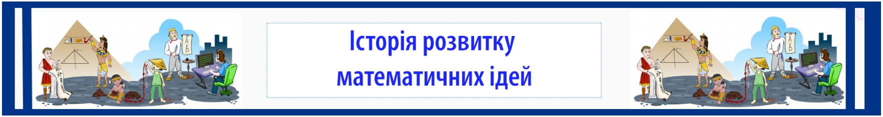
History of the development of mathematical ideas

Lecture 9. Constructing regular polygons. Gauss-Wantzel Theorem

O. Tymoshenko

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute



Зміст

Правильний многокутник

Правильний многокутник

Правильний багатокутник – багатогокутник, у якого всі кути і всі сторони рівні між собою. В стародавній Греції вміння будувати правильні многокутники лише за допомогою циркуля і лінійки вважалось верхом досконалості. До вашої уваги кілька історичних фактів.
У 4 книзі своїх „ Начал" Евклід за допомогою циркуля і лінійки вирішує задачу побудови правильного трикутника, чотирикутника, п' ятикутника, шестикутника і п' ятнадцятикутника. Протягом багатьох років зусилля математиків були спрямовані на знаходження способів побудови правильних семи, дев' яти, одинадцятикутників і т. д. Але вони були безрезультатними. І лише в кінці 18 століття 19- річний студент Геттинського університету, в майбутньому великий німецький математик Карл Фридрих Гаус, повністю вирішив питання про побудову правильних многокутників циркулем і лінійкою. Це було його перше відкриття.

Правильний многокутник

Гаус знайшов спосіб побудови правильного 17 –ти кутника. Це відкриття так вразило його, що він з 1 курсу філософії перейшов на курс математики, якій присвятив все своє життя. Він дуже пишався своїм відкриттям і заповів вигравірувати на своєму надгробії правильний сімнадцятикутник, вписаний в круг.

Розв' язання задач на побудову правильних многокутників за допомогою циркуля і лінійки є дуже непростим. Розповідають, що в Німеччині один досить наполегливий аспірант довів свого вчителя до того, що той сказав:

" Ідіть і розробляйте побудову правильного многокутника з 65537 сторонами(а його дійсно можна побудувати)."

Аспірант пішов, і повернувся лише через 20 років, але з розв' язком , який зберігається в архівах м. Геттенгена.

Задач одного історичного діяча.

Історія виникнення задачі така: Наполеон, артилерист за освітою, будучи першим консулом, попав у Мілан, де познайомився з італійським математиком Л.Максероні. Максероні подарував йому свою книгу" Геометрія циркуля" , в якій довів, що всі задачі геометрії на побудову лінійкою і циркулем можна розв' язати лише циркулем. Наполеону так сподобалась книга, що він сам склав задачу, яку не зміг розв' язати жоден з його генералів.

Наближення числа π

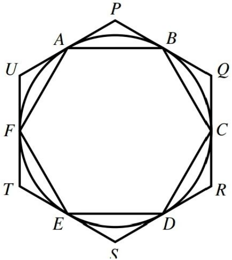
Наближення числа π

Давньогрецькі математики(Антіфон, Брісон, Архімед та інші) використовували правильні многокутники для обчислення числа π. Вони обчислювали площі вписаних в коло і описаних навколо нього многокутників, поступово збільшуючи число їх сторін і отримуючи таким чином оцінку площі кола.

Figure: Греція ©Wikipedia

Наближення числа π

Обчислюючи відповідне наближення для π, Архімед послідовно вписував і описував правильні багатокутники з 6, 12, 24, 484 і 96 сторонами всередині кола і поза ним. Вибір за кількістю сторін був закономірним. З усіх правильних многокутників шестикутник найпростіше вписати. Просто відзначте від будь-якої точки на окружності хорди довжиною, що дорівнює радіусу кола, доки не будуть отримані всі шість вершин, скажімо, A, B, C, D, E і F. Коли до кола A, B, C, D, E і F проводять дотичні, утворюється інший правильний шестикутник, який описує коло.



Наближення числа π

З правильного шестикутника правильний вписаний 12-гранний багатокутник будується шляхом поділу дуги, що лежить на описаному колі кожною стороною шестикутника, використовуючи додаткові точки, знайдені таким чином, і вихідні вершини, щоб утворити необхідний дванадцятикутник. Продовжуючи таким чином, повторюючи поділ дуг навпіл, Архімед отримав правильні многокутники 12, 24, 48 і 96 сторін шестикутника.

Наближення числа π

Якщо p_n і P_n являють собою периметри вписаного та описаного правильних многокутників n сторін, а C —довжина кола, випливає, що

$$p_6 < p_{12} < p_{24} < p_{48} < p_{96} < ... < p_n < C <$$

$$< P_n < ... < P_{96} < P_{48} < P_{24} < P_{12} < P_6.$$

Обидві ці послідовності є обмеженими монотонними послідовностями, і, отже, кожна має границю; і можна довести, що границі однакові, а C їх спільне значення. Крім того, Р$_{2n}$р$_n$ і P_n, а p_{2n} – середнє геометричне p_n і P_{2n}:

$$P_{2n} = \frac{2p_nP_n}{p_n + P_n,}, \ p_{2n} = \sqrt{p_nP_{2n}}.$$

Наближення числа π

Починаючи з периметрів $p_6 = 3d$ і $P_6 = 2\sqrt{3}d$, де d —діаметр кола, можна використовувати ці рекурсивні співвідношення для обчислення P_{2n} і p_{2n} послідовно до значень P_{96} і p_{96}. Припускаючи нерівність

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

як відомо, Архімед виявив, що

$$\left(3 + \frac{10}{71}\right) d < \frac{96 \cdot 66}{2017\frac{1}{4}} d < p_9 6$$

і

$$P_{96} < \frac{96 \cdot 153}{4673\frac{1}{2}} < \left(3 + \frac{10}{70}\right) d,$$

звідки остаточний результат

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Результат обчислень Архімеда був виражений у вигляді цієї нерівності.

Давньогрецькі математики вміли будувати многокутник з 2^m сторонами (при цілому $m > 1$), маючи вже побудований многокутник із кількістю сторін 2^{m-1}: поділом дуги на дві частини. Таким чином із двох півкіл можна побудувати квадрат, потім правильний восьмикутник, правильний шістнадцятикутник і так далі. Окрім цього, в тій же книзі Евклід вказав і другий критерій: якщо відомо, як будувати многокутники з r та s сторонами, де r та s —взаємно прості числа, то можна побудувати і многокутник із $r \times s$ сторонами.
Синтезуючи ці два способи, можна дійти висновку, що стародавні математики вміли будувати правильні многокутники з $2^m \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2}$ сторонами, де m —ціле невід' ємне число, p_1, p_2 —числа 3 та 5, а k_1, k_2 приймають значення 0 або 1.

1796 року Карлу Фрідріху Гаусу вдалося довести, що коли кількість сторін правильного многокутника дорівнює простому числу Ферма, до яких, крім 3 та 5, належать 17, 257 и 65537, то його можна побудувати за допомогою циркуля та лінійки.
Якщо брати взагалі, із цього випливає, що правильний многокутник можливо побудувати, якщо кількість його сторін дорівнює

$$2^{k_0} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s},$$

де k_0 —ціле невід' ємне число, k_1, k_2, $\cdots k_s$ набувають значення 0 або 1, а p_j – прості числа Ферма.

Figure: К. Ф. Гаус ©Wikipedia

Гаус підозрював, що ця умова є не тільки достатньою, але й необхідною, але вперше це довів П ' єр Лоран Ванцель 1836 року. Крапку в справі побудови правильних многокутників поставила побудова правильних 17-, 257- та 65537- кутників.

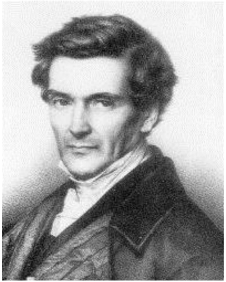


Figure: П. Л. Ванцель ©Wikipedia

Задача на побудову кутів із заданою градусною мірою

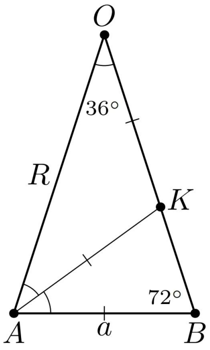
Задача на побудову кутів із заданою градусною мірою

- З побудовою правильних n-кутників тісно повязані задачі на побудову кутів із заданою градусною мірою. Оскільки побудову багатокутника можна звести до побудови центрального кута кола з заданим радіусом R, що має градусну міру $\frac{360^0}{n}$. Наприклад, якщо знати побудову кута 60^0, можна здійснити побудову правильного шестикутника, а за допомогою кута 36^0, можна побудувати правильний десятикутник.
- Таким чином, для побудови правильного чотирикутника (квадрату) достатньо побудувати два взаємно перпендикулярні діаметри кола, а для побудови правильного шестикутника можна використовувати, що його сторона дорівнює радіусу описаного кола, що дає можливість легко виконати цю побудову одним циркулем.

Побудова кута 36^0

Побудова:

- Розглянемо рівнобедрений трикутник AOB, в якому $AO = OB = R$, $\angle AOB = 36^0$.
- Кути при основі цього трикутника є рівними 72^0.
- Проведемо бісектрису AK, тоді $\angle OAK = \angle BAK = 36^0$, $\angle AKB = 72^0$. Відповідно $OK = AK = AB$.



Побудова кута 36^0

- За властивістю бісектриси трикутника одержимо:

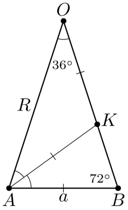
$$\frac{OA}{AB} = \frac{OK}{BK}.$$

Нехай $AB = a$, тоді

$$\frac{R}{a} = \frac{a}{R-a} \Leftrightarrow a^2 + Ra - R^2 = 0.$$

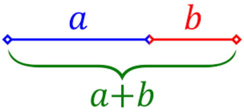
Квадратне рівняння має один додатній корінь:

$$a = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$$

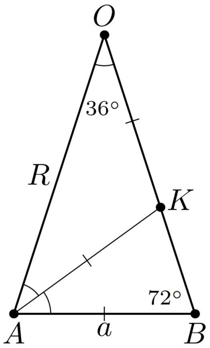


Побудова кута 36^0

Наведена побудова кута 36^0 одночасно є і побудовою золотого перерізу цього відрізка.
Золотий переріз відрізка –це таке його розбиття на дві частини, при якому довжина відрізка відноситься до більшої частини, як більша частина до меншої.



Так, точка K ділить відрізок OB саме в такому відношенні (це випливає із пропорції, складеної в процесі вирішення задачі). Тому, побудувавши вказаним чином трикутник AOB, для побудови золотого перерізу відрізка OB достатньо побудувати бісектрису AK.



Спираючись на співвідношення

$$a = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2},$$

яке виражає сторону правильного десятикутника через радіус описаного навколо нього кола, можна побудувати правильний десятикутник, а значить, і пра- вільний п'ятикутник, двадцятикутник, і таке інше. Покажемо, як побудувати сторони правильного десятикутника. тикутника та п'ятикутника на одному кресленні.

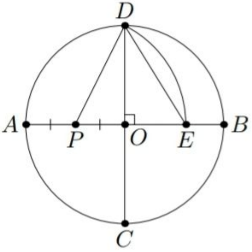
Розглянемо коло з центром O радіуса R, в якому проведемо два взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD. Розділимо відрізок AO навпіл, тоді

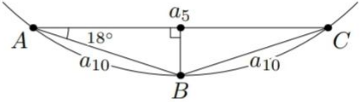
$$PD = \sqrt{r^2 + \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{5}}{2}.$$

Тому, провівши дугу з центром P і радіусом PD до перетину з відрізком AB в точці E, отримаємо, що

$$OE = PD - PO = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2},$$

тобто сторона правильного десятикутника, вписаного в розглянуту коло.





Доведемо, що DE сторона правильного п'ятикутника, вписаного в те ж коло. Дійсно, сторона a_{10} правильного десятикутника та сторона a_5 правильного п'ятикутника. вписаних в одне коло, пов'язані співвідношенням:

$$a_5 = 2a_{10}cos18^0$$

З рівнобедреного трикутника AOB з кутом при вершині 36^0, нескладно отримати значення тригонометричних функцій кута 18^0:

$$\sin 18^0 = \frac{0,5a}{R} = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

отже,

$$\cos 18^0 = \frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$$

(основне тригонометрична тотожність). Таким чином,

$$a_5 = \frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4}.$$

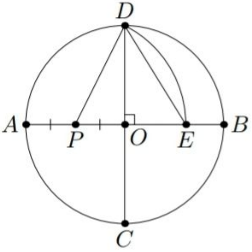
З іншого боку

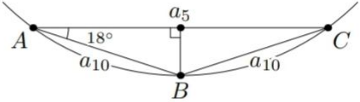
$$DE = \sqrt{OD^2 + OE^2} = \frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4}.$$

Таким чином, повністю описані способи побудови правильного n-кутника за $n = m \cdot 2^{k1}$, де $k \in N$; $m = 3;4;5$.
Далі, можна, наприклад, знайти спосіб побудови правильного п'ятнадцятикутника. Для цього достатньо збудувати його зовнішній кут:

$$\beta_{15} = 24^0 = 60^0 - 36^0$$

.





Правильний трикутник

Правильний трикутник

Рівносторонній трикутник —трикутник, усі сторони якого рівні. В Евклідовій геометрії всі три кути рівностороннього трикутника також рівні. Тому рівносторонні трикутники є правильними многокутниками і мають назву правильних.

Усі кути правильного трикутника дорівнюють 60^0

Рівносторонній трикутник можна накреслити за допомогою циркуля та лінійки. Для цього необхідно виконати такі дії:

1. Провести пряму та поставити на неї циркуль гострим кінцем.
2. Провести коло.
3. Поставити циркуль в одну із точок перетину кола та прямої, провести ще одне коло такого ж радіусу.
4. З'єднати прямими центри кіл та точку перетину цих кіл.

Правильний трикутник

Альтернативний спосіб:

1. Накреслити коло довільного радіусу.
2. Поставити циркуль на це коло і накреслити ще одне коло такого ж радіусу.
3. Ці два кола перетинаються в двох точках, кожна з точок перетину разом із центрами кіл утворюють правильні трикутники.

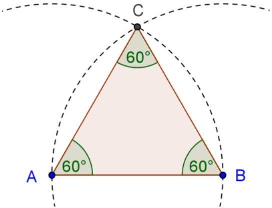
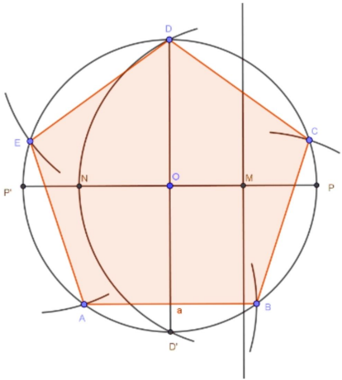


Figure: Правильний трикутник ©Wikipedia

Правильний п’ятикутник

Правильний п’ятикутник

1. Побудуємоколо $K(O, r)$ і діаметри $DD' \perp PP'$.
2. Поділимовідрізок OP навпіл($OM = MP$).
3. Побудуємоколо з центром в точці M і радіусом MD.
Точка $N \in PP'$.
4. $DN = a$, D – перша вершина. Будуємоі іншівершини 5-кутника.



Література

[1] David M. Burton. The History of Mathematics: An Introduction, 6th Edition, McGraw Hill Learning Solutions (2007)
[2] Craig Smory´nski, History of Mathematics, Springer (2008)
[3] Uta C.Merzbach and Carl B. Boyer, A History of Mathematics, 3d Edition, Printed in the United States of America (2011)
[4] Гуж М. М., Матеріали для проведення факультативних занять з математики, електронна версія (2020)
[5] Про можливе і неможливе в геометрії циркуля та лінійки / В. Н. Костарчук, Б. І. Хацет // Радянська школа –1962. –128 с.

Дякую за увагу!