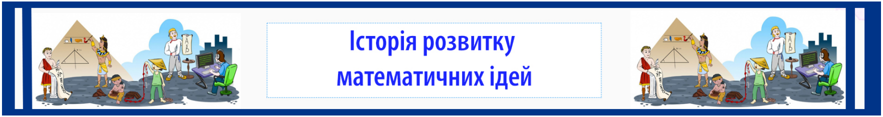
History of the development of mathematical ideas

Lecture 10. History of the origin and development of linear and square equations

O. Tymoshenko

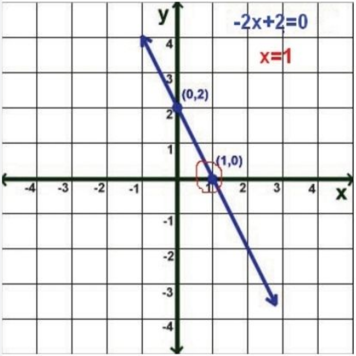
Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute



Зміст

Лінійні рівняння

Лінійне рівняння: сучасні позначення



$$ax + b = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Figure: Лінійне рівняння ©Wikipedia

Figure: Мапа Стародавнього Єгипту ©Wikipedia

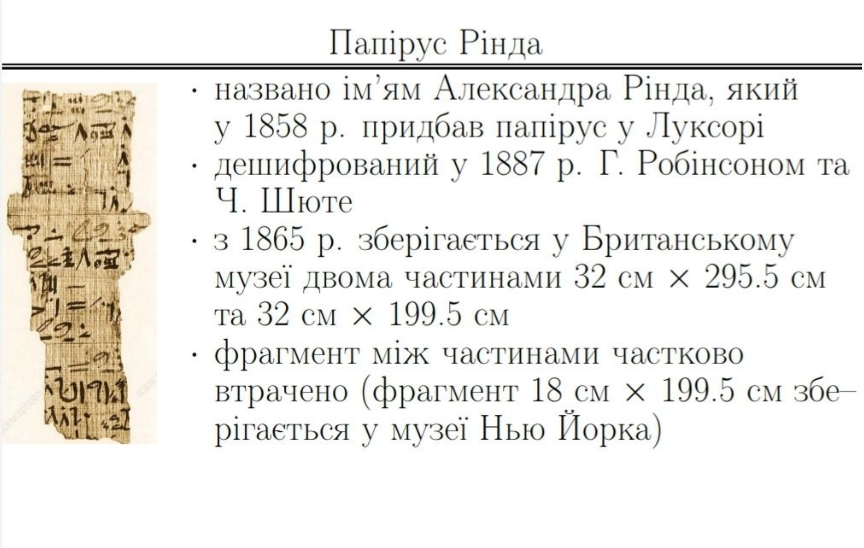


Figure: Папірус Рінда ©Wikipedia

Задача 26 Ахмеса

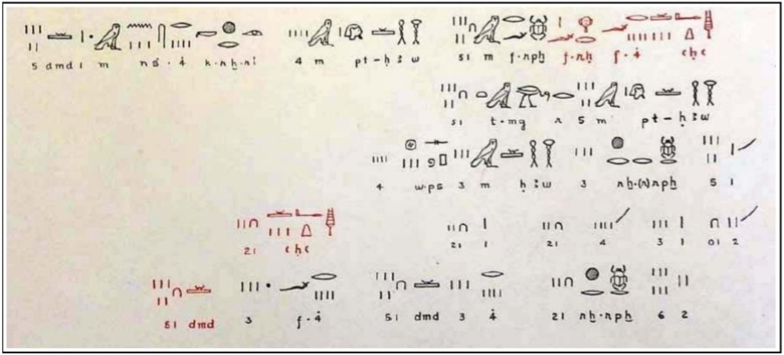


Figure: Папірус Рінда ©Wikipedia

Задача 26 Ахмеса

знайти величину, яка

разом з $\frac{1}{4}$ своєї частини

дорівнює 15.

Рівняння Ахмеса

$$x + \frac{1}{4}x = 15,$$

$$\Updownarrow$$

$$x + \overset{\bigcirc}{4}\,x = 15,$$

$$\Updownarrow$$

$$x + \overset{\bigcirc}{||||}\,x = 15.$$

Рівняння Ахмеса на папірусі

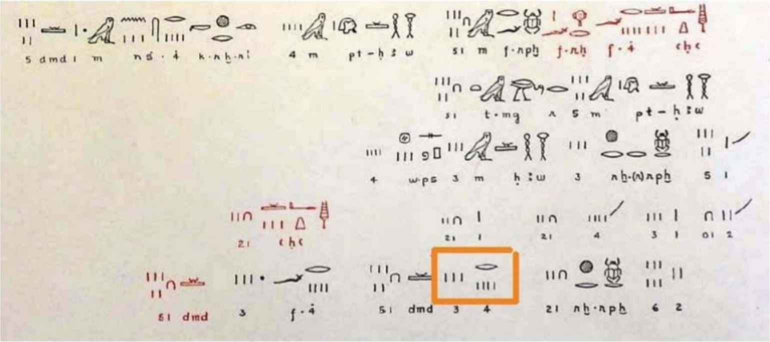


Figure: Папірус Рінда ©Wikipedia

Стародавній Вавилон на мапі

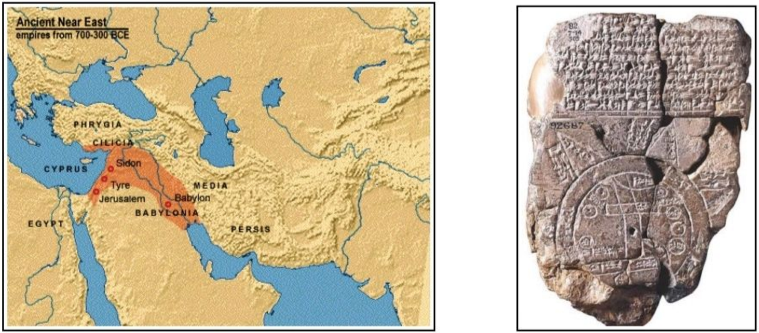


Figure: Мапа Вавилону та глиняна табличка ©Wikipedia

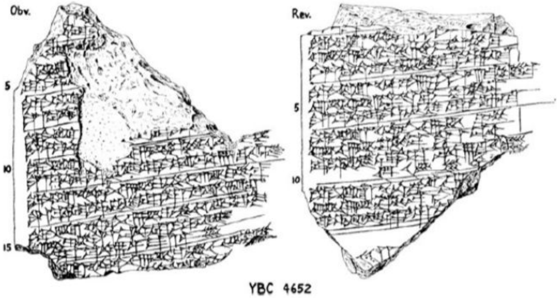
Математичні тексти на глиняних табличках

- Вавилонські математичні тексти носять переважно навчальний характер
- техніка обчислень досконаліша, ніж у Єгипті
- коло задач набагато ширше, ніж в Єгипті
- викладаються тільки алгоритми розв'язання

Yale Babylonian Collection

- в 1911 р. Джон Морган подарував Йельському університету 1000 акцій компанії U. S. Steel для організації та зберігання колекції глиняних табличок з Вавилону
- зараз колекція налічує 45 000 творів митців Вавилону
- зокрема, у колекції зберігаються таблички, у яких йдеться про теорему Піфагора (1800 років до н.е.)

Табличка YBC 4652 з колекції TBC



YBC 4652

1) Можна повністю прочитати умови 6 задач;
2) можна відновити умови ще 6 задач;
3) є підстави вважати, що загалом було 22 задачі.

Одна з задач на YBC 4652

я знайшов камінь, але не зважив його;

після того, як я додав $\frac{1}{7}$ *його ваги,*

а потім ще й $\frac{1}{11}$*, я його зважив;*

вийшло 60 мін. Якою є вага каменя?

1 міна $\approx$ 450 гр

Розв'язання задачі на YBC 4652 немає, а відповідь — є

$$w = \frac{385}{8},$$

$$\text{де } w \stackrel{\text{def}}{=} \text{це вага каменя}$$

Алгебра як мистецтво розв'язувати рівняння зародилися дуже давно у зв'язку з потребою практики, в результаті пошуку спільних прийомів вирішення однотипних завдань. Найбільш ранні рукописи які дійшли до нас свідчать про те, що в Стародавньому Вавілоні і Давньому Єгипті були відомі прийоми рішення лінійних рівнянь.

Декілька фактів про лінійні рівняння

- Слово "алгебра" виникло після появи тракту "Кітаб аль-джебрваль-мукабала" хорезмського математика і астронома Мухамеда Бен Муса аль Хорезмі.
- Термін "аль-Джерба", узятий з назви цієї книги, в подальшому став вживатися як алгебра.
- Знак рівності ввів у 1556 році англійський математик Рекорд, який пояснив це так, що ніщо не може бути більш рівним, ніж два паралельних відрізка.

Творцем сучасної буквеної символіки є французький математик Франсуа Вієт (1540 - 1603). До XVI в. Виклад алгебри велося в основному словесно. Літерні позначення та математичні знаки з'являлися поступово. Знаки + - вперше зустрічаються у німецьких алгебраїстів XVI в. Дещо пізніше вводиться знак * для множення. Знак ділення (:) був введений лише в XVII в.

Figure: Ф. Вієт ©Wikipedia

Рішучий крок у використанні алгебраїчної символіки був зроблений в XVI в., Коли французький математик Франсуа Вієт (1540-1603) і його сучасники стали застосовувати літери для позначення не тільки невідомих (що робилося і раніше), але і будь-яких чисел.

Однак ця символіка ще відрізнялася від сучасної. Так, Вієт для позначення Невідомого числа застосовував букву N (Numerus-число), для квадрата і куба невідомого букви Q (Quadratus - квадрат) і C (Cubus - куб). Наприклад, запис рівняння X в кубі, мінус $8X$ в квадраті, плюс $16X$, дорівнює 40 у Вієта виглядала б так: $1C - 8Q + 16Naequ.40$ (aequali - одно). Вієт ділить виклад на дві частини: загальні закони і їх конкретно-числові реалізації. Тобто він спочатку вирішує завдання в загальному вигляді, і тільки потім призводить числові приклади. У загальній частині він позначає літерами не тільки невідомі, що вже траплялося раніше, але й всі інші параметри, для яких він вигадав термін «коефіцієнти» (буквально: сприяючі). Вієт використовував для цього тільки великі літери - голосні для невідомих, приголосні для коеффіцієнтов.

Віет вільно застосовує різноманітні алгебраїчні перетворення - наприклад, заміну змінних або зміну знака виразу при перенесенні його в іншу частину уравненія.Новая система дозволила просто, ясно і компактно описати загальні закони арифметики і алгоритми. Символіка Вієта була відразу ж оцінена науковцями різних країн, які приступили до її удосконалення.

Figure: Діофант ©Wikipedia

Діофант (не раніше III століття н.е.) – єдиний відомий нам старогрецький математик, який займався алгеброю. Він вирішував різні рівняння, особливу увагу приділяв невизначеним рівнянням, теорія яких називається тепер «діофантовиманалізом».

Діофантові рівняння

Діофантові рівняння

З часу відкриття ірраціональних чисел, грецька математика відійшла від суто арифметичного підходу. Одним із результатів було те, що всі алгебраїчні проблеми, навіть розв' язування простих рівнянь, були відлиті в незграбну та негнучку геометричну форму. З Діофантом, поряд з Паппом останнім великим математиком класичної давнини, відбулося звільнення алгебри. Практично нічого не відомо про Діофанта як особистість, крім того, що він жив в Олександрії близько 250 року. Незважаючи на те, що його твори були написані грецькою мовою, і він продемонстрував грецький геній теоретичної абстракції, Діофант, швидше за все, був еллінізованим вавилонянином.

Діофантові рівняння

Які відомості про особисте життя Діофанта ми можемо визначити, з формулювання задачі епіграми (очевидно, датованої четвертим століттям): *його дитинство тривала* $\frac{1}{6}$ *його життя; його борода виросла після ще* $\frac{1}{12}$*; після ще* $\frac{1}{7}$ *він одружився, і його син народився на п'ять років пізніше; син прожив половину віку свого батька, а батько помер за чотири роки після свого сина.*
Якщо за x позначити вік, у якому помер Діофант, рівняння буде виглядати так:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x,$$

і він мав досягти віку $x = 84$, але в якому році чи навіть у якому столітті – достовірно невідомо.

Діофантові рівняння

Велика праця, на якій тримається репутація Діофанта, —його «Арифметика», яку можна назвати найбільш раннім трактатом, присвяченим алгебрі. Лише 6 книг з 13 збереглося; зниклі книги, очевидно, були втрачені дуже рано, ймовірно, до десятого століття, оскільки немає жодних ознак того, що араби коли-небудь ними володіли. З інших творів, приписуваних Діофанту, ми знаємо мало, окрім їхніх назв. До нас дійшли фрагменти трактату про багатокутні числа, а в «Арифметиці» згадується про існування збірки теорем, яка називається «Поризми», але вона втрачена повністю.

Діофантові рівняння

Подібно до папірусу Рейнда, «Арифметика» —це набір окремих задач, загалом 189, із їхніми розв’язками. Очевидною метою було навчити методу вирішення певних питань задачі, в яких потрібно знайти раціональні числа, що задовольняють заданим умовам.
До Діофанта алгебра була риторичною, тобто результати досягалися словесними аргументами без звернення до будь-яких символів чи скорочень.

Діофантові рівняння

«Синкопована алгебра», як її називають, є скоріше випадком скорочення для вираження часто використовуваних величин і операцій, ніж абстрактної символіки в нашому розумінні. Діофант мав стенографічні скорочення для невідомих, послідовних степенів невідомого до шостого, рівності, віднімання та обернених величин.

Задачі з арифметики

Розглянемо декілька типових задач з Арифметики, хоча й у сучасному стилі позначення. Вони розкажуть вам більше про винахідливість методів Діофанта.

1. **Книга I, Завдання 17.** *Знайти чотири числа такі, що при додаванні будь-яких трьох з них разом їх сума є одним із чотирьох заданих чисел. Скажімо, задані суми 20, 22, 24, і 27.*

Нехай x - сума всіх чотирьох чисел. Тоді числа просто $x - 20$, $x - 22$, $x - 24$ і $x - 27$. (Наприклад, якщо (1) + (2) + (3) = 20, тоді коли (4) додається до обидві частини цього рівняння, $x = (1) + (2) + (3) + (4) = 20 + (4)$ або $(4) = x - 20$.)

Звідси випливає, що

$$x = (x - 20) + (x - 22) + (x - 24) + (x - 27).$$

Јтже, $3x = 93$, або $x = 31$. Таким чином, шуканими числами є 11, 9, 7 і 4.

2. Книга II, завдання 8. *Розділіть дане квадратне число, скажімо, 16, на суму двох квадратів.*
Нехай один із шуканих квадратів дорівнює x^2. Тоді $16 - x^2$ має дорівнювати квадрату.
Тут Діофант вибрав окремий варіант для свого ідеального квадрату, який у цоьому випадку був рівним $(2x-4)^2$ і таким, що

$$16 - x^2 = (2x-4)^2.$$

Вибір Діофанта $(2x-4)^2$ спрямований на усунення постійних коефіцієнтів із наведеного рівняння.

Діофант міг би вибрати $(3x-4)^2$. Результат тоді був би

$$5x^2 = 16x,$$

з (додатнім) розв'язком $x = \frac{16}{5}$.
Тому один квадрат дорівнюватиме $\frac{256}{25}$, а інший,

$$16 - \frac{256}{25} = \frac{144}{25}.$$

3. Книга II, завдання 20. *Знайдіть два числа, квадрат кожного з яких додається до іншій дає квадрат.*
Діофант обрав числа x і $2x+1$. Якщо їх використовувати, квадрат перший плюс другий автоматично стає квадратом, незалежно від значення x, тим самим задовольняючи одну умову:

$$x^2 + (2x+1) = (x+1)^2.$$

Квадрат другого числа плюс перше дорівнює

$$(2x+1)^2 + x = 4x^2 + 5x + 1.$$

Щоб перетворити цей вираз у квадрат, Діофант припустив, що він дорівнюватиме $(2x-2)^2$. Результатом буде створення лінійного рівняння по x, яке також можна отримати, якщо взяти $(2x-3)^2$ або $(2x-4)^2$ замість $(2x-2)^2$. Потім

$$4x^2 + 5x + 1 = (2x-2)^2 = 4x^2 - 8x + 4,$$

що призводить до рівняння $13x = 3$ або $x = \frac{3}{13}$.

Квадратні рівняння

Квадратні рівняння

З історії виникнення рівнянь

- Алгебра виникла у зв’язку з розв’язанням різноманітних завдань за допомогою рівнянь.
- Зазвичай у завданнях потрібно знайти одну чи кілька невідомих, знаючи у своїй результати деяких дій, зроблених над невідомими та заданими величинами. Такі завдання зводяться до вирішення одного або системи кількох рівнянь, знаходження невідомих за допомогою алгебраїчних дій над даними величинами. У алгебрі вивчаються загальні властивості операцій над величинами.
- Деякі алгебраїчні прийоми розв’язання лінійних і квадратних рівнянь були відомі ще 4000 років тому у Стародавньому Вавилоні.

Історія

Квадратні рівняння у Стародавньому Вавилоні

Необхідність вирішувати рівняння як першого, так і другого ступеня ще з давнини була викликана потребою вирішувати завдання, пов'язані зі знаходженням площ земельних ділянок і із земляними роботами військового характеру, і навіть з недостатнім розвитком астрономії і самої математики. Незважаючи на високий рівень розвитку алгебри у Вавилоні, у клинописних текстах відсутні поняття від'ємного числа та загальні методи розв'язання квадратних рівнянь.

Як складав і вирішував Діофант квадратні рівняння

У «Арифметиці» Діофанта немає систематичного викладення алгебри, проте міститься систематизований ряд завдань, які супроводжуються поясненнями і розв'язуваннями за допомогою запису рівнянь різних ступенів. При створеннs рівнянь Діофант для спрощення розв'язку вміло вибирає невідомі. Ось, наприклад, одне з його завдань.

Завдання. «Знайти два числа, знаючи, що їх сума дорівнює 20, а добуток —96».
Діофант розмірковує так: з умови завдання випливає, що шукані числа не рівні, оскільки якби вони були рівні, то їх добуток дорівнював би не 96, а 100. Таким чином, одне з них буде більше половини їх суми, тобто $10 + x$, інше ж менше, тобто $10 - x$. Різниця між ними $2x$. Звідси рівняння

$$(10 + x)(10 - x) = 96,$$

або ж

$$100 - x^2 = 96.$$

$$x^2 - 4 = 0.$$

Звідси $x = 2$. Одне з чисел дорівнює 12, інше 8. Розв'язок $x = -2$ для Діофанта немає, оскільки грецька математика знала лише додатні числа.

Квадратні рівняння в Індії

Квадратні рівняння в Індії

Завдання з квадратними рівняння зустрічаються вже в астрономічному трактаті «Аріабхаттіам», складеному 499 р. індійським математиком та астрономом Аріабхаттою. Інший індійський вчений, Брахмагупта (VII ст.), виклав загальне правило розв'язання квадратних рівнянь, зведених до єдиної канонічної форми:

$$ax^2 + bx = c, a > 0.$$

У цьому рівнянні усі коефіцієнти, крім , можуть бути від'ємними.
Правило Брахмагупт по суті збігається з нашим.
У Стародавній Індії були поширені громадські змагання у вирішенні важких завдань. В одній із старовинних індійських книг говориться з приводу таких змагань наступне: «Як сонце блиском своїм затьмарює зірки, так вчена людина затьмарить славу іншого в народних зборах, пропонуючи і вирішуючи завдання алгебри». Завдання часто представлялися у віршованій формі.

Квадратні рівняння у Аль-Хорезмі

Квадратні рівняння у Аль-Хорезмі

В алгебраїчному трактаті Аль-Хорезмі дається класифікація лінійних та квадратних рівнянь. Автор налічує 6 видів рівнянь, називаючи їх так:

«Квадрати дорівнюють кореням», тобто $ax^2 = bx$.

«Квадрати дорівнюють числу», тобто $ax^2 = c$.

«Корені рівні числу», тобто $ax = c$.

«Квадрати та числа дорівнюють кореням», тобто $ax^2 + c = bx$.

«Квадрати і корені дорівнюють числу», тобто. $ax^2 + bx = c$.

«Корені і числа дорівнюють квадратам», тобто. $bx + c = ax^2$.

Квадратні рівняння у Аль-Хорезмі

Для Аль-Хорезмі, що уникав використання від'ємних чисел, члени кожного з цих рівнянь є доданками, про операцію віднімання не згадується. При цьому свідомо не беруться до уваги рівняння, які не мають додатніх розв'язків.
Автор викладає способи розв'язання зазначених рівнянь, користуючись прийомами ал-джабр та ал-мукабала. Його методи вирішення і розв'язки, звісно, не збігається повністю із нашим. Слід зазначити, наприклад, що при розв'язанні неповного квадратного рівняння першого виду Аль-Хорезмі, як і всі математики до XVII ст., не враховує нульового розв'язку, ймовірно тому, що в конкретних практичних завданнях він не має значення. При вирішенні повних квадратних рівнянь Аль-Хорезмі на окремих числових прикладах викладає правила розв'язання, а потім їх геометричні доведення.

Квадратні рівняння у Аль-Хорезмі

Наведемо приклад.
Завдання. «Квадрат і число 21 дорівнюють 10 корінням. Знайти корінь» (мається на увазі корінь рівняння $x^2 + 21 = 10x$).
Розв'язок автора є приблизно таким: розділи навпіл число коренів, отримаєш 5, помнож 5 саме на себе, від результату забери 21, залишиться 4. Візьми корінь з 4, отримаєш 2. Забери 2 від 5, отримаєш 3, це і буде шуканий корінь. Або додай 2 до 5, що дасть 7, це теж є корінь.
Трактат Аль-Хорезмі є першою книгою, що дійшла до нас, в якій систематично викладена класифікація квадратних рівнянь і дано формули їх розв'язання.

Література

[1] David M. Burton. The History of Mathematics: An Introduction, 6th Edition, McGraw Hill Learning Solutions (2007)
[2] Craig Smory´nski, History of Mathematics, Springer (2008)
[3] Uta C.Merzbach and Carl B. Boyer, A History of Mathematics, 3d Edition, Printed in the United States of America (2011)
[4] Гуж М. М., Матеріали для проведення факультативних занять з математики, електронна версія (2020)

Дякую за увагу!