

History of the development of mathematical ideas

Lecture 11. Cardano, Tartaglia, and the solution to the cubic equation

O. Tymoshenko

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute



Історія розвитку
математичних ідей



- 1 Кубічне рівняння
- 2 Історія
 - Стародавній період
 - Делійська задача
 - Легенда
 - Спроби розв'язку
 - Середньовіччя
 - Життя та відкриття Нікколо Тарталья
 - Життя та відкриття Джероламо Кардано
 - "Велике мистецтво"
- 3 Методи розв'язування
 - Метод Кардано
 - Виведення формули Кардано
 - Тригонометрична формула Вієта
 - Виведення формули
 - Геометричний метод
 - Рішення Омара Хайяма
 - Розв'язок за допомогою трисекція кута

Кубічне рівняння

Кубічне рівняння — алгебраїчне рівняння вигляду

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \text{ де } a \neq 0.$$

Для того, щоб отримати загальний розв'язок кубічного рівняння, потрібно його звести до канонічного вигляду

$$z^3 + pz + q = 0.$$

Це можна зробити, поділивши рівняння на старший коефіцієнт a , після чого провівши заміну змінної

$$x = z - \frac{b}{3a}.$$

При цьому коефіцієнти будуть рівні:

$$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} - \frac{d}{a},$$
$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}.$$

Історія

Стародавній період

Кубічні рівняння були відомі ще стародавнім єгиптянам, вавилонцям, стародавнім грекам, китайцям та індійцям. Знайдено клинописні таблички старовавилонського періоду (XX—XVI ст. до н. е.), що містять таблиці значень кубів та кубічних коренів. Вавилоняни могли використовувати ці таблиці для розв'язування кубічних рівнянь, але не існує жодних свідчень, що вони це робили.

Задача подвоєння куба використовує найпростіше і найстаріше з кубічних рівнянь, і стародавні єгиптяни не вірили, що його розв'язок існує. У V ст. до н. е. Гіппократ звів цю задачу до знаходження двох середніх пропорційних між одним відрізком та іншим, вдвічі більшим від нього, але не зміг розв'язати її за допомогою циркуля та лінійки, що, як тепер відомо, неможливо зробити.

Стародавній період

У III столітті давньогрецький математик Діофант знайшов цілі та раціональні розв'язки для деяких кубічних рівнянь з двома невідомими (діофантових рівнянь). Вважається, що Гіппократ, Менехм і Архімед підійшли ближче до розв'язання задачі про подвоєння куба за допомогою конічних перерізів, хоча деякі історики, такі як Ревіель Нетц, кажуть, що невідомо, чи думали греки про кубічні рівняння, чи просто про здачі, які можуть привести до кубічних рівнянь. Томас Гіт, перекладач і коментатор усіх праць Архімеда, які дійшли до нас, не погоджується, вказуючи на свідчення, що Архімед дійсно розв'язував кубічні рівняння за допомогою перетину двох конусів.

Чисельні методи розв'язування кубічних рівнянь з'являються в китайському математичному тексті Математика в дев'яти книгах, складеному близько другого століття до нашої ери, які були прокоментовані китайським математиком Лю Хуеєм у III столітті.

Стародавній період

У VII столітті, за часів династії Тан, астроном і математик Ван Сяотун у математичному трактаті, під назвою Цзігу Суаньцзін, виклав і розв'язав 25 кубічних рівнянь вигляду

$$x^3 + px^2 + qx = N,$$

у 23 з яких $p, q \neq 0$ і у двох рівняннях $q = 0$.

Делійська задача

Подвоєння куба або *Делійська задача* — класична антична задача на побудову циркулем та лінійкою ребра куба, об'єм якого вдвічі більший за об'єм заданого куба.

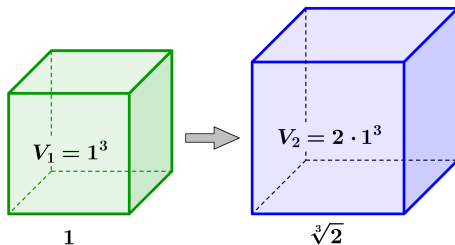


Figure: Одиничний куб (ст. = 1) і куб з подвоєним об'ємом (ст. = $\sqrt[3]{2}$)

Єгиптяни, індійці та особливо греки усвідомлювали проблему і робили багато марних спроб її вирішення. Однак відсутність рішення за допомогою циркуля та лінійки було остаточно доведено П'єром Ванцелем у 1837 році.

Легенда

Згідно з античною легендою, якимось на острові Делос почалася епідемія чуми. Мешканці острова звернулись до Піфії, і та повідомила, що необхідно подвоїти жертвне святилище, яке мало форму куба. Мешканці Делоса спорудили ще один такий же куб і поставили його на перший, але епідемія не припинилася. Після повторного звернення оракул роз'яснив, що подвоєний жертвник також повинен мати форму куба.

З того часу делійською задачею займались найкращі математики античного світу, було запропоновано декілька розв'язків, але ніхто не зміг виконати таку побудову, використовуючи тільки циркуль і лінійку.

- Гіппократ Хіоський (кінець V ст. до н. е.) показав, що задача зводиться до знаходження двох середніх відрізків пропорційних одним між одним, які вдвічі більшим за даний. У сучасних позначеннях — знаходження x та y таких, що

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

Звідси

$$x^3 = 2a^3.$$

- Архіт Тарентський (початок IV ст. до н. е.) запропонував розв'язок, заснований на перетині тора, конуса та кругового циліндра.
- Платон (перша половина IV ст. до н. е.) запропонував механічний розв'язок, заснований на побудові трьох прямокутних трикутників з потрібним співвідношенням сторін.
- Менехм (середина IV ст. до н. е.) знайшов два розв'язки цієї задачі, засновані на використанні конічних перетинів. У першому розв'язку відшукується точка перетину двох парабол, а у другому — параболы та гіперболи.

- Ератосфен (III ст. до н. е.) запропонував ще один розв'язок, в якому використовується спеціальний механічний інструмент — мезолябія, а також описав розв'язок своїх попередників.
- Нікомед (II ст. до н. е.) використовував для розв'язку цієї задачі метод вставки, яка виконується за допомогою спеціальної кривої — конхоїди.
- Група схожих між собою розв'язків, які належать Аполлонію, Філону Візантійському та Герону, також використовує метод вставки.
- У ще одній групі схожих між собою розв'язків, які належать Діоклу, Паппу та Спору, використовується та ж ідея, що й у розв'язку Платона, при цьому Діокл застосовує для побудови спеціальну криву — цисоїду.

В XI столітті перський поет і математик Омар Хаям (1048—1131) досяг суттєвого прогресу в теорії кубічних рівнянь. У ранніх роботах, присвячених кубічним рівнянням, він виявив, що кубічне рівняння може мати два розв'язки (випадку трьох коренів він не помітив), і стверджував, що рівняння не можна розв'язати за допомогою циркуля та лінійки. Він також знайшов геометричний розв'язок. У його пізнішій праці Трактат про демонстрацію задач алгебри він описав повну класифікацію кубічних рівнянь зі своїми загальними геометричними розв'язками, що використовують перетини конічних перерізів.

У XII столітті індійський математик Бхаскара II намагався розв'язувати кубічні рівняння без особливих успіхів. Однак він навів один приклад розв'язання кубічного рівняння:

$$x^3 + 12x = 6x^2 + 35.$$

У тому ж XII столітті перський математик Шараф ад-Дін написав Al-Mu'adalat (Трактат про рівняння), в якому йдеться про вісім типів кубічних рівнянь з додатними розв'язками та про п'ять типів, що не мають додатних розв'язків. Він використав підхід, який пізніше став відомим як метод Руффіні — Горнера для чисельної апроксимації кореня кубічного рівняння. Він також розробив концепцію похідної функції та екстремумів кривої для розв'язування кубічних рівнянь, які можуть не мати додатних коренів. Він зрозумів важливість дискримінанта кубічного рівняння для знаходження алгебраїчного розв'язку деяких видів кубічних рівнянь.

У середньовічній Європі до XVI століття успіхів у розв'язанні кубічних рівнянь не було. Леонардо Пізанський, відомий також як Фібоначчі (1170—1250), умів знаходити додатні розв'язки кубічного рівняння

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

за допомогою вавилонських цифр. Він вказав розв'язок 1,22,7,42,33,4,40, що дорівнює

$$1 + 22/60 + 7/60^2 + 42/60^3 + 33/60^4 + 4/60^5 + 40/60^6$$

у стандартному записі і відрізняється від точного розв'язку лише на три трильйонних.

Лука Пачолі у трактаті “Сума арифметики, геометрії, відношень і пропорцій» (1494) писав, що загальне розв'язання кубічних рівнянь «так само неможливе за сучасного стану науки, як і розв'язання квадратури круга циркулем та лінійкою”.

Життя та відкриття Нікколо Тарталья

На початку XVI століття італійський математик Сципйон дель Ферро знайшов загальний метод розв'язування важливого класу кубічних рівнянь, а саме, рівнянь вигляду

$$x^3 + ax = b$$

з невід'ємними a і b . Фактично всі кубічні рівняння можна звести до такого вигляду, якщо допустити можливість b і a бути від'ємними, але від'ємні числа тоді ще не вважалися допустимими.



Figure: Сципйон дель Ферро, Wikipedia

Життя та відкриття Нікколо Тарталья

Перед смертю свій секрет Ферро відкрив лише зятеві Аннібалу делла Наве та ще своєму учню Антоніо Маріо Фіоре. Останній вирішив використовувати отримані знання в турнірах з вирішення різноманітних математичних задач, які тоді були поширеними в Європі. Перемоги в подібних турнірах приносили повагу, грошові нагороди і можливість отримати пристойну посаду в якомусь з університетів.

У ті ж часи до проблеми розв'язання кубічних рівнянь долучився молодий математик з Верони Нікколо Фонтане, відомий в історії науки під прізвиськом Тарталья, що в перекладі з італійської значило "заїка". Прізвищем цим він був зобов'язаний каліцтву від шабельної рани обличчя та піднебіння, отриманої ще в дитинстві від французького солдата –одного з завойовників його рідного міста Бреції під час війни з венеціанцями. Вільно розмовляти після цього він не міг. Але каліцтво не завадило йому вчитися і займатися наукою. Це був справжній подвиг, бо сім'я його була дуже бідною: батько, який працював поштарем, помер, коли йому було лише шість років, у матері окрім нього було ще двоє дітей. Навіть школу він відвідував лише 15 днів, а далі довелося працювати і вчитися в ті часи, коли інші діти гралися на вулиці. І все ж таки, його успіхи в математиці були настільки значними, що невдовзі він став заробляти на життя уроками та консультуванням інженерів, артилеристів, купців, архітекторів і будівельників. Понад те, він перекладав живою італійською мовою праці Архімеда та Евкліда і писав власні книги, присвячені питанням практичного застосування математики та механіки.

Якось за допомогою у розв'язанні задач, які зводилися до кубічних рівнянь, до нього звернувся вчитель з Бреції де Кої. Тарталья з обуренням відмовився –мовляв, не хоче навіть братися за завідомо нерозв'язні завдання. Проте задачі його зацікавили, і за деякий час Тартальї вдалося знайти спосіб побудови графіка кубічного рівняння виду

$$x^3 + ax = b$$

і він став заявляти, що оволодів великим алгебраїчним секретом. Чутки про це дійшли і до Антоніо Фіоре, який сприйняв їх за просте вихваляння неука. Те ж саме, до речі, думав про Фіоре і Тарталья, який звідкись довідався про заповіт дель Ферро.

Однак упевнений у своїй "таємній зброї", дель Ферро викликав у 1535 році Тарталью на змагання, за умовами яких суперники обмінювалися через нотаріуса тридцятьма задачами, на розв'язання яких давалося п'ятдесят днів. Переможцем ставав той, хто розв'яже більшу кількість задач. Певна річ, усі 30 задач, які запропонував Фіоре, були кубічними рівняннями з різними коефіцієнтами. Щоб відшукати ключ до їх розв'язання, Тартальї довелося докласти максимум зусиль. Урешті-решт, за вісім днів до терміну, коли рішення треба було віддати нотаріусу, знайти спосіб таки вдалося. Тож запропоновані задачі він розв'язав упродовж двох годин. Наступного дня він знайшов і спосіб розв'язання кубічних рівнянь виду

$$x^3 + ax = b,$$

які у зв'язку з тим, що від'ємними числами в ті часи ще не користувалися, вважалися відмінними від наведеного вище. Що ж до Фіоре, то з більшістю задач, відібраних Тартальєю з різних розділів алгебри і геометрії, він так і не впорався.

Чутка про блискучу перемогу Тартальї не лише над Фіоре, але над математичною загадкою століть, швидко поширилася Італією. Кардано, який плекав амбітні мрії, що математичний трактат, який він тоді лише писав, прийде на зміну класичній книзі Луки Пачолі, втратив спокій. Він почав буквально переслідувати Тарталью з проханням відкрити йому свої секрети. Той вперто відмовлявся, підозрюючи навіть, що Кардано – підставна особа, яку винайняв згаданий вище вчитель математики де Кої. Проте, як не дивно, за якийсь час Кардано все ж таки досяг своєї мети! В який спосіб він змусив Тарталью – людину, за спогадами сучасників далеко не янгольської вдачі – розлучитися зі своєю таємницею, не зовсім зрозуміло. Та факт залишається фактом: латинським віршем той повідомив Кардано про свій рецепт, хоча й без наведення жодних натяків на його виведення. Навзамін Кардано був змушений присягнути, що більше нікому його не відкриє. Тож надрукувати рішення у своїй книзі він просто не мав права!



Кардано народився 24 вересня 1501 року, у стародавньому місті Павія, що на півночі Італії.

Його батько був відомим адвокатом, ім'я якого зустрічається навіть у нотатках Леонардо да Вінчі, але хлопчик народився поза шлюбом. Це дуже зашкодило йому в подальшому, оскільки коли після закінчення Падуанського університету в 1526 році він намагався отримати лікарську практику в Мілані, до міської колегії лікарів його як незаконнонародженого не прийняли. Втім, лікувати він таки розпочав, але в провінційному містечку Галларт. При цьому самовіддано продовжував досліджувати таємниці медицини і навіть почав писати трактати на медичні теми. Проте не лише на медичні, бо цікавила його і філософія, і астрологія, і багато чого ще.

Приблизно в ті ж часи розпочав він і кар'єру лектора з математики: ця наука притягувала його з дитинства, і вже в юності він досягнув у ній успіхів не менших, а може й більших, ніж у медицині. А ще він постійно вдосконалював майстерність у азартних іграх, до яких долучився ще в юнацькі роки. Причому не лише грав, але й намагався знайти в грі певні закономірності, що врешті-решт вилилося в одну з його цілком наукових праць – “Книгу про гру в кості”, яка містила початки теорії ймовірностей, деякі питання комбінаторики і навіть психології (певна річ, гри і гравців). Зауважимо, що книга була написана, коли він був ще дуже молодою людиною – у 1526 році, але видав він її лише 1563 року.

Взагалі, книг за своє життя він написав дуже багато. Адже займався не лише медициною та математикою, але й філософією, хімією, геологією, мінералогією, складанням календарів, астрономією та астрологією і, звісно, винахідництвом і конструюванням різноманітних технічних пристроїв. Відомо 138 його друкованих праць загальним обсягом приблизно 7000 сторінок великого формату –in folio. Був навіть автором своєрідних енциклопедій –книги "Про тонкі матерії" та "Про різноманітність речей". До того ж, близько 100 (!) власних творінь він знищив сам в очікуванні арешту за кілька років до смерті.

В усіх галузях, якими займався Джероламо Кардано, він досягав неабиякого успіху. Відомо, наприклад, що до послуг його як астролога вдавався навіть Папа Римський (у ті роки складання гороскопів вважалося цілком богоугодною справою). Існує навіть версія, що й смерть його була не випадковою: буцімто він наклав на себе руки, щоб підтвердити власноруч складений свій гороскоп. Відомості про особливості його характеру, які дійшли до нашого часу, якщо й не змушують повірити в цю похмуру легенду, то принаймні багато чого в його житті пояснюють.

Азартний, мстивий, відчайдушний, гострий на язик, заради досягнення мети готовий на будь-які вчинки і, водночас, великодушний і вірний у дружбі, Кардано, безумовно, був особистістю неординарною. Недарма ж пізніше великий німецький математик і філософ Готфрід Вільгельм Лейбніц зауважив: “Кардано був великою людиною з усіма його недоліками; без них він був би досконалим”. Справедливості заради варто зазначити, що ці недоліки були наслідком важкого дитинства: мати вважала його тягарем, соромилася як ганьби й часто-густо виміщала на ньому свій гнів лупцюванням; батько жив окремо і при зустрічах також обмежував виховний вплив ляпасами; до того ж і міцним здоров’ям Кардано не міг похвалитися ні в дитинстві, ні в зрілому віці. Тож те, що інші отримували без усяких зусиль, йому доводилося в життя виривати. Цілком очевидно, що багато в чому саме ранній досвід виживання й сформував урешті-решт як позитивні, так і негативні риси його вдачі та бажання визнання.

Останнє було в його житті надзвичайно важливим. Відомо, наприклад, що навіть славнозвісний пристрій, який отримав його ім'я і відомий нині як карданний вал чи карданний підвіс, з'явився у 1541 році внаслідок того, що Кардано (тоді вже ректору міської колегії лікарів) була виявлена честь у числі найшанованіших громадян Мілана зустрічати іспанського короля Карла V. Він навіть йшов біля королівського балдахіну. Розчулений таким виявом поваги, він запропонував обладнати екіпаж вінценосця підвісом з двох валів, взаємне обертання яких не виводитиме карету з горизонтального положення. Щоправда, ідея такого підвісу була відома достатньо давно і навіть знайшла місце в "Атлантичному кодексі" Леонардо да Вінчі, однак з цим зводом найрізноманітніших відомостей чи не з усіх тоді відомих галузей знань освічені люди змогли познайомитися лише за два століття по тому. А конструкція ця почала все ширше в різноманітних варіантах використовуватися в техніці саме після оприлюднення Кардано.

Кілька років Кардано витратив на ретельну перевірку і обґрунтування отриманих правил. Дивуватися такому довгому строку не варто: алгебраїчної символіки тоді ще не було і навіть користування готовими способами, не кажучи про їхнє виведення, було справою вельми непростю. Але Кардано це вдалося, більше того, він знайшов і спосіб розв'язання рівнянь виду

$$x^3 + b = ax,$$

а згодом і повних кубічних рівнянь. Ці рівняння він розв'язував, використовуючи за необхідності міркування, в яких обігрувалися від'ємні корені. Він допустив їх існування, хоча й називав "фіктивними", або "менш чистими". Таким чином, саме Кардано першим серед математиків почав, хоча ще й досить обережно, оперувати від'ємними числами. Мало того, Кардано навіть допустив можливість використовувати під час розрахунків комплексні числа, завдяки чому в результаті можна отримувати дійсні корені рівнянь.

У 1543 році Кардано разом зі своїм найкращим учнем Луїджі Феррарі відвідав у Болоньї зятя покійного професора Сціпіо дель Ферро – Аннібала делла Наві (як уже згадувалося, делла Наві був одним з двох осіб, яким професор довірив свій секрет). Той без особливих заперечень дозволив їм ознайомитися з паперами тестя, в яких вони знайшли вже знайомий їм опис способу розв'язання кубічного рівняння. Тепер уже нічого не зв'язувало Кардано – знайшлося ще одне джерело, звідки можна було отримати завітну формулу, ото ж шлях до її публікації був відкритий! У той час Джероламо Кардано вже розпочав роботу над систематичним викладенням того, що було тоді відомо з алгебри, тож не мудруючи лукаво, він включив у свою книгу “Велике мистецтво, або Про правила алгебри” (в історії математики її частіше називають просто “Велике мистецтво”) розділ про кубічні рівняння з викладенням у передмові історії питання.



Figure: “Велике мистецтво, або Про правила алгебри” , Wikipedia

Книга вийшла друком 1545 року і викликала у Тарталї шаленство. Він намагався помститися, поширював образливі листи, у своїй книзі “Проблеми і різноманітні винаходи” (1546 рік) обрушився на Кардано з докорами. Замість Кардано у сварку вступив уже згадуваний його учень Феррарі –також визначний математик, результати досліджень якого з відповідними посиланнями на автора також були включені до “Великого мистецтва”.

... Останні роки життя Кардано були нелегкими. Один його син отруїв із ревності дружину і був страчений. Другий став гравцем і пограбував власного батька. У 1570 році потрапив до в'язниці й сам Кардано – його переслідувала інквізиція. Через сім місяців його випустили під заклад без права друкувати свої твори і викладати. Він переїхав до Риму і полинув у лікарську практику. Утім, у 1575 році знов узявся за перо – почав писати книгу “Про моє життя”. У ній він розмірковував про своє призначення, підсумовував здобутки та поразки, згадував про незвичайні випадки, що з ним траплялися. Книга ця стала найціннішим джерелом відомостей не лише про його долю, але й про ті часи...

Методи розв'язування

Методи розв'язування

Загальні точні методи розв'язування:

- Формула Кардано
- Тригонометрична формула Вієта
- Перетворення Чірнхауса

Для деяких особливих типів кубічних рівнянь існують спеціальні способи розв'язування. Наприклад:

- Зворотне рівняння
- Теорема Безу

Також можна застосовувати чисельні методи розв'язування рівнянь.

Методи розв'язування

Введемо дві змінні u та v , такі що

$$z = u + v,$$

підставивши їх в рівняння отримаємо

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

введемо додаткову умову для змінних, а саме:

$$3uv + p = 0$$

підставивши її в рівняння, та використавши $uv = -\frac{p}{3}$, отримаємо та розв'яжемо квадратне рівняння відносно u^3 наступним чином:

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0, \quad u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{D}, \quad D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

Всього є три розв'язки рівняння $z^3 + pz + q = 0$, один з них є

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$$

Якщо $p, q \in \mathbb{R}$ та:

- $D > 0$, то рівняння має один дійсний корінь і два комплексні.
- $D < 0$, то всі три корені рівняння є різними дійсними числами.
- $D = 0$, то всі корені рівняння є дійсними числами, при чому принаймні два з них є однаковими.

Формула Кардано —це формула для аналітичного розв'язку канонічного кубічного рівняння виду $x^3 + px + q = 0$. Вона має вигляд:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Нехай дано рівняння $x^3 + px + q = 0$
Будемо шукати його розв'язок у вигляді $x = u + v$.
Отримаємо рівняння

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Введемо додаткову умову для змінних $3uv + p = 0$,
утворену систему

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases}$$

розв'яжемо за допомогою формули Вієта для квадратного рівняння і
отримаємо:

$$\begin{cases} u^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{D} \\ v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{D}, \end{cases}$$

де $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ — дискримінант кубічного рівняння, звідки

$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \\ v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \end{cases}$$

Розв'язок рівняння подається у вигляді $x = u + v$. В комплексних числах
кубічний корінь має 3 різних значення. Для отримання розв'язків
потрібно вибирати такі пари значень кубічного кореня, щоб $uv = -\frac{p}{3}$.
Таких пар обов'язково знайдеться рівно 3.

Тригонометрична формула Вієта

Тригонометрична формула Вієта — один із способів розв'язувати кубічні рівняння виду $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Формула

- Обчислимо $Q = \frac{a^2 - 3b}{9}$, $R = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{54}$
- Обчислимо $S = Q^3 - R^2$
- Якщо $S > 0$, то обчислимо $\phi = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}}\right)$ і матемо три дійсних корені:

$$x_1 = -2\sqrt{Q} \cos(\phi) - \frac{a}{3}$$

$$x_2 = -2\sqrt{Q} \cos\left(\phi + \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{a}{3}$$

$$x_3 = -2\sqrt{Q} \cos\left(\phi - \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{a}{3}$$

Тригонометрична формула Вієта

- Якщо $S < 0$, то замінюємо тригонометричні функції гіперболічними. Тут можливі наступні випадки в залежності від значення Q :

- $Q > 0$:

$$\phi = \frac{1}{3} \operatorname{Arch} \left(\frac{|R|}{\sqrt{Q^3}} \right)$$

$$x_1 = -2 \operatorname{sgn}(R) \sqrt{Q} \operatorname{ch}(\phi) - \frac{a}{3} (\text{дійсний корінь})$$

$$x_{2,3} = \operatorname{sgn}(R) \sqrt{Q} \operatorname{ch}(\phi) - \frac{a}{3} \pm i\sqrt{3} \sqrt{Q} \operatorname{sh}(\phi) \quad (\text{комплексні корені})$$

- $Q < 0$:

$$\phi = \frac{1}{3} \operatorname{Arsh} \left(\frac{|R|}{\sqrt{|Q|^3}} \right)$$

$$x_1 = -2 \operatorname{sgn}(R) \sqrt{|Q|} \operatorname{sh}(\phi) - \frac{a}{3} (\text{дійсний корінь})$$

$$x_{2,3} = \operatorname{sgn}(R) \sqrt{|Q|} \operatorname{sh}(\phi) - \frac{a}{3} \pm i\sqrt{3} \sqrt{|Q|} \operatorname{ch}(\phi) \quad (\text{комплексні корені})$$

○ $Q = 0$:

$$x_1 = -\sqrt[3]{c - \frac{a^3}{27}} - \frac{a}{3} \text{ (дійсний корінь)}$$

$$x_{2,3} = -\frac{a + x_1}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{|(a - 3x_1)(a + x_1) - 4b|} \text{ (комплексні корені)}$$

- Якщо $S = 0$, то рівняння вироджене і має менше ніж 3 різних розв'язків (другий корінь буде кратний 2):

$$x_1 = -2 \operatorname{sgn}(R) \sqrt{Q} - \frac{a}{3} = -2\sqrt[3]{R} - \frac{a}{3}$$

$$x_2 = \operatorname{sgn}(R) \sqrt{Q} - \frac{a}{3} = \sqrt[3]{R} - \frac{a}{3}$$

Виведення формули

Виведення формули Вихідний многочлен має вигляд

$$P(x_1) = x_1^3 + a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1 + c.$$

Підстановка $x_1 = x - \frac{a}{3}$ зводить многочлен до виду

$$Q(x) = x^3 + p \cdot x + q, \quad \text{де} \quad p = b - \frac{a^2}{3} \quad \text{і} \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c.$$

Шукаємо розв'язки рівняння $Q(x) = x^3 + p \cdot x + q = 0$ у вигляді $x = A \cdot \cos \varphi$, отримаємо рівняння

$$A^3 \cdot \cos^3 \varphi + Ap \cdot \cos \varphi = -q.$$

- Засвідчемо, що у випадку $p < 0$ при $A = \sqrt{-\frac{4p}{3}}$ це рівняння набуває вигляду

$$\frac{A^3}{4} \cdot (4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi) = -q.$$

- Використаємо тригонометричну тотожність $\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi$ зводимо до рівняння виду $\cos 3\varphi = -\frac{4q}{A^3}$.
- Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\varphi_k = \frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{4q}{A^3} \right) + \frac{2\pi k}{3},$$

де k набуває значення 1, 2, 3.

- Підставляємо отримане значення φ_k в вираз для змінної x , отримаємо відповідь $x_k = A \cdot \cos \varphi_k$.

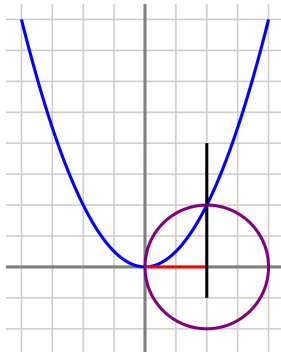


Figure: Геометричний розв'язок Омара Хаяма кубічного рівняння для випадку $a = 2, b = 16$, що дає корінь 2. Перетин вертикальної лінії на осі x у центрі кола є випадковістю наведеного прикладу.

Для розв'язання кубічного рівняння

$$x^3 + a^2x = b,$$

де $b > 0$, Омар Хаям побудував параболу

$$y = \frac{x^2}{a},$$

коло, діаметром якого є відрізок

$$\left[0, \frac{b}{a^2}\right]$$

додатної півосі x , і вертикальну пряму, що проходить через точку перетину кола та параболи над віссю x . Розв'язок визначається довжиною горизонтального відрізка від початку координат до перетину вертикальної прямої з віссю x .

Просте сучасне доведення полягає в наступному. Помножимо рівняння на $\frac{x}{a^2}$ та згрупуємо члени

$$\frac{x^4}{a^2} = x \left(\frac{b}{a^2} - x \right) .$$

Ліва частина —це значення y^2 на параболі. Рівняння кола,

$$y^2 + x \left(x - \frac{b}{a^2} \right) = 0,$$

збігається з правою частиною рівняння та дає значення y^2 на колі.

Кубічне рівняння з дійсними коефіцієнтами можна розв'язати геометрично за допомогою циркуля, лінійки та трисекції кутів тоді і тільки тоді, коли воно має три дійсні корені.

Кубічне рівняння можна розв'язати за допомогою побудови циркуля та лінійки (без трисекції) тоді і тільки тоді, коли воно має раціональний корінь. Це означає, що старі задачі, такі як: подвоєння куба та трисекції кута, поставлені давньогрецькими математиками, не можуть бути розв'язані побудовою циркулем та лінійкою.

Література

- [1] David M. Burton. The History of Mathematics: An Introduction, 6th Edition, McGraw Hill Learning Solutions (2007)
- [2] Craig Smoryński, History of Mathematics, Springer (2008)
- [3] Uta C. Merzbach and Carl B. Boyer, A History of Mathematics, 3d Edition, Printed in the United States of America (2011)
- [4] Гуж М. М., Матеріали для проведення факультативних занять з математики, електронна версія (2020)

Дякую за увагу!