

History of the development of mathematical ideas

Lecture 12. Number Theory and the Queen of Mathematics

O. Tymoshenko

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute



Історія розвитку
математичних ідей



Зміст

- 1 Стародавня геометрія та теорія чисел
- 2 Наука XVI-XVII століть
- 3 Досконалі та недосконалі числа
- 4 Математики XVII ст
- 5 Відома остання теорема Ферма

Стародавня геометрія та теорія чисел

Стародавня геометрія та теорія чисел

Стародавня геометрія — ранній погляд на союз геометрії та теорії чисел. Геометрія постійно відігравала важливу роль у математиці ранніх цивілізацій. Відкриття та дослідження приблизно 500 глиняних табличок із території, колись відомої як Месопотамія, свідчить про те, що вавилоняни не були винятком. Інтерес вавилонян до геометрії є очевидним. Одна табличка, Плімптон 322 — табличка з піфагоровими трійками — вказує на те, що вавилоняни знали про зв'язок між сторонами прямокутного трикутника.



Figure: Плімптон 322 ©Wikipedia

Стародавня геометрія та теорія чисел

Плімптон 322, датований серединою 18 століття до нашої ери, був предметом дослідження та вивчення протягом кількох десятиліть. Плімптон 322 виглядає неповним; вздовж лівого краю є явний злам. Крім того, ця табличка не містить жодної роботи, яка б пролила світло на методи. Питання, яке хвилює дослідників, полягає в тому, як вавилоняни створили цей список піфагорових трійок?

Стародавня геометрія та теорія чисел

Щоб дати відповідь на це запитання, необхідно відійти від наших сучасних та культурних поглядів, закладених у нашому математичному розумінні, та спробувати побачити вавилонську математику крізь їхню культурну завісу. Існують значні відмінності між культурним поглядом вавилонян на математику та нашим сучасним поглядом. Крім того, при відповіді на це питання, буде виявлено важливу єдність двох математичних напрямів – геометрії та теорії чисел. Числа належать до універсальної мови, яку використовували дослідники, щоб сформулювати теорії. Три теорії про Плімптон 322 привернули до себе найбільшу увагу. Формулювання та розшифрування цих теорій ілюструє важливість враховувати культурні чинники під час використання теорії чисел.

Стародавня геометрія та теорія чисел

Теорія тригонометричних таблиць - це не стільки теорія про породження піфагорійських трійок, а скоріше теорія/інтерпретація змісту Плімптона 322. Ця інтерпретація виходить з того факту, що перший стовпець представляється кутом протилежного меншого катета прямокутного трикутника. Обчислення цього кута, θ , показує, що θ , зменшується приблизно на 1^0 від ряду до ряду, що свідчить про деякий порядок розташування рядів. Крім того, розрахунки показують, що θ становить від 30 до 45 градусів.

Стародавня геометрія та теорія чисел

Ця теорія, однак, порушує важливість культурних зв'язків. Завдяки вивченню вавилонських табличок, вчені дійшли висновку, що вавилоняни використовували довжину кола, а не радіус, для визначення площі. Замість того $A = \pi r^2$, вони, очевидно, використовували $A = \frac{c^2}{4\pi}$, де π приблизно дорівнює 3. За словами деяких вчених, немає жодних доказів того, що вавилоняни використовували радіуси, а без цього факту немає "концептуальної основи" для тригонометрії. Дослідники, які стали авторами цієї теорії, не заглядали крізь завісу вавилонської культури, тому ця теорія вважається безпідставною.

Стародавня геометрія та теорія чисел

Другою теорією, є метод генеруючої пари. Отто Нойгебауер і Абрахам Дж. Сакс представили цю теорію у своїй книзі «Математика клинописних текстів» 1945 року. Теорія генеруючих пар по суті взята з Книги X Елементів, який представляє розуміння раціональних та ірраціональних ліній за допомогою понять сумірних і несумірних довжин і квадратів. Теорія генерації пар стверджує, що вавилоняни використовували формулу, порівнянну з формулою Евкліда для створення піфагорових трійок, як показано в Книзі X. За допомогою цієї формули трійки, що створені з чисел m і n , що задовольняють такі умови:

- $m > n$, НСД(m, n)=1;
- m, n не є непарними;
- $a = mn, b = m^2 - n^2, c = m^2 + n^2$.

Стародавня геометрія та теорія чисел

Ця теорія відкидається з кількох причин. Не було знайдено жодних доказів того, що вавилоняни знали поняття парних та непарних чисел та простих чисел. Іншою причиною чому цю теорію не можна брати за основу є те, що Плімптон 322 має чіткий, цілеспрямований порядок. Інші вавилонські таблички вказують на те, що порядок був важливим для вавилонян. Ця теорія та теорія чисел, що лежить в основі цієї теорії, не підтверджують створення таблички зі структурою з таким порядком.

Стародавня геометрія та теорія чисел

Третя теорія була представлена в 1949 році Е. М. Брюїнсом, яка стверджує, що табличку було сконструйовано з використанням взаємної геометрії та геометрії «вирізання та вставлення». Ще одна вавилонська глиняна табличка, YBC 6967, є доказом того, що вавилоняни справді регулярно використовували ці методи. Згідно з цією теорією, вавилоняни використовували взаємні величини для створення інтегральних піфагорових трійок. Ця теорія не ефективно використовує теорію чисел для інтерпретації методу Плімптона 322 породження піфагорових трійок; тому ця теорія найбільш правдоподібна.



Стародавня геометрія та теорія чисел

З дослідження Плімптон 322 важливо винести те, що воно ілюструє потужне застосування об'єднання геометрії та теорії чисел. Плімптон 322, сам собою, без розшифровки методу піфагорійської трійки - сам собою є артефактом давньої "сучасної" теорії чисел. Він, врешті-решт, використовує окремий випадок останньої теореми Ферма

$$a^n + b^n = c^n, n = 2$$

Робота вавилонян з піфагорійськими трійками і цей випадок останньої теореми Ферма можна розглядати як прелюдію до сучасної теорії чисел. Відкриття Плімптона 322 було названо одним з "найдивовижніших відкриттів в археології двадцятого століття", тому що воно показує, що вавилоняни працювали з цим типом завдань за багато століть до Діофанта, Евкліда, та Ферма. Схоже, що теорія чисел і геометрія завжди мали певний зв'язок, але цей зв'язок не завжди був відомий або визнаний. Практично, в 17 столітті геометри наполегливо вимагали, щоб геометрія була чистою арифметикою. П'єр де Фермат з'явився математичної сцені у Європі XVII століття. Ферма вважається батьком сучасною теорії чисел, цариці математики.

Наука XVI-XVII століть

Наука XVI-XVII століть

Дуже небагато людей у шістнадцятому столітті серйозно цікавилися математикою чи природничими науками. Ймовірно, їх було лише кілька тисяч – і більшість із них були зацікавлені, але не активні. Багато хто, хто працював з наукою чи математикою, робив це в ізоляції, оскільки навіть навіть в університетській спільноті їхні інтереси вважалися лише периферійно важливими. Наука, все ще заплямована магичною практикою, ще не стала шановним інтелектуальним заняттям, тому визнання отримували ті, хто процвітав у центральних галузях науки. За межами книг не було жодного регулярного способу самовираження для вчених, люди не могли регулярно спілкуватися один з одним, а публікація була часом ускладнена через церковної цензури та засудження.

Наука XVI-XVII століть

Однак у міру того, як все більше людей займалися науковими дослідженнями, ставало дедалі очевиднішим, що прогрес у знаннях залежить від масштабів і швидкості передачі інформації, відкриттів. Постійна перевірка ідей підтримує науку у хорошому стані, оскільки вона веде до відмови від спростованих гіпотез. У чудовому розвитку, порівняно з епохою Відродження, коли майже всі наукові дискусії - а їх було небагато - проходили в рамках університетської програми, у 1600-х роках виникла нова модель соціальної організації - наукові товариства та академії. Організації - незалежні від університетів. Починаючи з створення невеликих і відносно неформальних аматорських гуртків, цей період досяг кульмінації на підставі Лондонського королівського товариства (1660) та Королівської академії наук (1666). Обидва ці суспільства досі є активними та видатними професійними товариствами. Ці організації працювали в основному для обміну науковою інформацією між своїми членами та в другу чергу для того, щоб зробити їх колективні висновки загальнодоступними для інших зацікавлених груп.

Наука XVI-XVII століть

Першою академією, присвяченою головним чином науці, була, ймовірно, та, яку Джамбаттіста делла Порта (1535-1615) заснував у Неаполі в 1560 під назвою Accademia Secretorum Naturae. Щоб стати її членом, людина мала зробити якесь оригінальне відкриття або повідомити якийсь раніше невідомий факт у галузі природничих наук. Члени академії делла Порта називали себе отіозі, або ідлерами, слідуючи поширеному на той час в італійських суспільствах звичаю приймати жартівливі зневажливі імена. , а інша носила ім'я "скомпості", що означає "спантеличені, неорганізовані"). Назва Academia Secretorum Naturae не сподобалася церкві, і делла Порта був засуджений як практик чорних мистецтв. Він, безперечно, заохочував це звинувачення, написавши книгу під назвою Magia Naturalis (Природна магія). Секретність його суспільства та репутація його членів, які вели таємне листування, не допомогли справі. Хоча особисто делла Порта виправдали. Хоча делла Порта особисто був звільнений від усіх звинувачень, йому було наказано закрити свою академію.

Наука XVI-XVII століть

Ця недовговічна спроба формальної наукової організації передбачила важливішу Академію деї Лінчеї, яка була заснована в Римі в 1603 з метою вивчення нових відкриттів в галузі фізичних наук та їх публікації для всього світу. Її емблема - рись, яка забиває пазурами до смерті Цербера (багатоногового пса з хвостом із змії) - була обрана як символ. Була обрана для того, щоб символізувати боротьбу наукової істини з невіглаством. На будь-яких розумних підставах Академія деї Лінчеї мала розпастися. Протягом семи років, перш ніж вона залучила до членства будь-якого широко визнаного вченого, вона складалася рівно з чотирьох членів, молодших 30 років. Але в 1610 році Академія реорганізувалася в ширшому масштабі, і серед її нових членів з'явилися Галілей та старіючий делла Порта. Відроджена в організація опублікувала кілька книжок, написаних її членами, зокрема дві книжки Галілея. Галілей – Велика людина, здавалося, пишався тим, що використовував титул Лінсея у своєму листуванні та на титульних аркушах більшості своїх наступних книг.

Наука XVI-XVII століть

Останнім із важливих італійських наукових товариств цього періоду є Академія дослідів (Accademia del Cimento), заснована у Флоренції у 1657 році. Сім'я Медічі забезпечила необхідну фінансову підтримку для збирання кращої наукової колекції обладнання, яке тоді було доступне в Європі; але коли Медічі став кардиналом (1667), діяльність Флорентійської академії не була порахована відповідно до його нової честі, і припинилася. Припинення діяльності Академії було кінцем наукових експериментів і дискусій, однак, оскільки насправді вона була лише формальною організацією для вже існуючої групи друзів, які зустрічалися більш менш часто. протягом 1640-х років для експериментів та обговорення питань, що становлять науковий інтерес. Головною фігурою в цих зборах був останній учень Галілея, Еванджеліста Торрічеллі (1608-1647).

Досконалі та недосконалі числа

Досконалі та недосконалі числа

Однією з найстаріших проблем у теорії чисел є пошук усіх досконалих чисел. Ранні грецькі математики були особливо заінтриговані відносинами між числом та його аліквотними дільниками (позитивними дільниками, меншими, ніж саме число). В епоху, коли числа мали містичні властивості, це вважалося дивовижним.

Досконалі та недосконалі числа

Число 6 - це сума його аліквотних дільників:

$$6 = 1 + 2 + 3.$$

Наступне після 6 число, що має цю властивість, - 28, так як позитивними дільниками 28 є 1, 2, 4, 7, 14 та 28, та

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

Піфагорійці, відповідно до своєї філософії, приписували числам певні соціальні якості, а згодом навіть етичне значення? називали такі числа "досконалим".

Означення

Ціле позитивне число n вважається досконалим, якщо n дорівнює сумі всіх його позитивних дільників, не включаючи саме n .

Досконалі та недосконалі числа

Якщо позначити $\sigma(n)$ суме всіх додатніх дільників n , то сума додатніх дільників менша за n дорівнює $\sigma(n) - n$. Таким чином, умова "n-досконале" рівносильна на вимогу $\sigma(n) - n = n$, або еквівалентно, $\sigma(n) = 2n$. Як приклад ми маємо

$$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 2 \cdot 6.$$

і

$$\sigma(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 2 \cdot 28.$$

Досконалі та недосконалі числа

Протягом багатьох століть філософи були більше стурбовані етичним та релігійним значення досконалих чисел, ніж їхнім математичними характеристиками. У своїй праці "De Civitate Dei" святий Августин (354-430) пояснив, що хоча Бог міг створити світ за один раз, Він вважав за краще зробити це за шість днів, тому що досконалість роботи символізує (досконале) число шість. Прочитуємо святого Августина: Шість - число досконале саме собою, а чи не тому, що Бог створив всі речі за шість днів; скоріше навпаки. Бог створив усі речі за шість днів, тому що це число досконале, і воно було б досконалим, навіть якби робота роботою шести днів.

Досконалі та недосконалі числа

Стародавнім грекам були відомі лише чотири досконалі числа. Нікомах з Гераси, який узагальнив існуючі знання з теорії чисел у своїй праці "Вступ до арифметики" (Introductio Arithmetica). (близько 100 р. н.е.), перераховує

$$P_1 = 6,$$

$$P_2 = 28,$$

$$P_3 = 496,$$

$$P_4 = 8128.$$

.

Досконалі та недосконалі числа

Він сказав, що "досконалі числа легко перерахувати та розташувати у відповідному порядку" - один знайдено серед одиниць, одне серед десятків, одне серед сотень Використовуючи ці міркування, пізніші автори припустили, що 1. n -е досконале число P_n містить рівно n цифр. 2. Парні досконалі числа по черзі закінчуються цифрами 6 чи 8. Обидва твердження неправильні. Немає досконалого числа з п'ятьма цифрами; наступне досконале число (вперше правильно вказане в анонімному манускрипті п'ятнадцятого століття) –це

$$P_5 = 33,550,336.$$

Хоча остання цифра P_5 дорівнює 6, але досконале число

$$P_6 = 8,589,869,056$$

також закінчується на 6, а чи не на 8, як передбачалося раніше. Щоб урятувати хоч щось у позитивному напрямку, ми пізніше покажемо, що парні досконалі числа завжди закінчуються на 6 чи 8, але поперемінно.

Досконалі та недосконалі числа

Величина P_6 повинна переконати читача в рідкості досконалих чисел. Поки невідомо, скільки їх існує – нескінченно багато чи нескінченно мало. Визначення загальної форми всіх досконалих чисел відноситься до глибокої давнини. Воно було частково досягнуто Евклідом, коли у 36 книзі IX "Елементів" він

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{k-1} = p$$

є простим числом, то $2^{2k-1}p$ - досконале число (обов'язково парне). Процитуємо слова Евкліда власні слова Евкліда: Якщо скільки завгодно чисел, починаючи з одиниці, викладати безперервно у подвійній пропорції поки сума всіх не стане простою, і якщо сума, помножена на останнє, становитиме деяке число, твір буде досконалим. Наприклад, $1 + 2 + 4 = 7$ - просте число, отже, $4 \cdot 7 = 28$ - досконале число. Евкліда використовує формулу суми геометричної прогресії.

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

Математики XVII ст

Математики XVII ст

Небагато періодів були настільки плідними для математики, як сімнадцяте століття. Тільки Північна Європа народила стільки людей з визначними здібностями, скільки з'явилося за попереднє тисячоліття. У той час, коли такі імена, як Декарт, Паскаль, Валліс, Бернуллі, Лейбніц та Ньютона. Французький державний службовець П'єр де Фермат (1601-1665), стояв в одному ряду з цими блискучими вченими. Ферма, "принц дилетантів" був останнім великим математиком, який займався цим предметом як побічне заняття для ненаукової кар'єри. За професією юрист і магістрат при провінційному парламенті в Тулузі. Він шукав притулку від протиріч в абстракції математики.

Математики XVII ст

На початку своєї кар'єри Ферма приділяв багато уваги класичним питанням ділимості, що стосуються функції $\sigma(n)$, суми дільників числа n , наприклад, знаходження вирішення задачі про $\sigma(n) = 2n$ (досконалі числа) абовирішення задачі про $\sigma(n) = n + m = \sigma(m)$ (дружні числа). Суть проблеми досконалих чисел у тому, щоб з'ясувати, які числа $2^p - 1$ є простими. Досліджуючи це питання, Фермат він виявив, що якщо p - просте, то 2^p буде ділити число $(2^p - 1) - 1$. В іншому формулюванні це означає, що p завжди ділить $2^{p-1} - 1$. Це був лише лише передчуття майбутнього, оскільки невдовзі після цього Ферма оголосив, що вдалося вивести набагато загальніший результат.

Математики XVII ст

Це був лише провісник майбутніх подій, оскільки незабаром Ферма оголосив, що йому вдалося вивести набагато загальніший результат. У листі до свого друга, Бернара Френеля де Бессі, датованого 18 жовтня 1640 року. 18 жовтня 1640 року він заявив наступне: Якщо p – просте число, а a – будь-яке ціле число, не кратне p , то $a^{p-1} - 1$ кратно p . Наприклад, оскільки 11 – просте число, $3^{10} - 1$ має бути кратно 11. Дійсно,

$$3^{10} - 1 = 59,048 = 11 \cdot 5368.$$

Математики XVII ст

Варіант, у якому більше немає обмеження на подільність, пов'язаного з a та p , наступний: Для будь-якого числа a та простого числа p , p ділить a на $a^p - a$. Цей результат зараз відомий як "теорема Ферма", хоча деякі автори називають її малою теоремою, щоб відрізнити її від відомої останньої теореми. Як завжди, Ферма не сказав, як він прийшов до своєї теореми, написавши Фр'єніклу лише наступне, "Я б послав вам демонстрацію, якби не боявся, що вона буде надто довгою". Ніде серед його робіт він не залишив ні натяку на доведення, ні сліду своєї "демонстрації". Перше опубліковане доведення було наведено Ейлером у "Працях Петербурзької академії" в 1736; однак у рукописах Лейбна зберігся лише одне доведення. Проте рукописи Лейбниці у Ганноверській бібліотеці показують, що він довів теорему Ферма десь до 1683 року. Аргумент Ейлера, як і аргумент Лейбніца, ґрунтується на використанні біномного розкладу, і навряд чи можна сумніватися, що саме це доведення мав на увазі Ферма

Відома остання теорема Ферма

Відома остання теорема Ферма

Ми бачили, що Фермат особисто опублікував дуже мало, воліючи повідомляти про свої відкриття у листах друзям (зазвичай не більше ніж з короткою заявою про те, що у нього є доведення) або залишав їх при собі у нотатках на полях своєї "Арифметики". Найвідомішою є замітка, написана латиною близько 1637 року, яка говорить: *Неможливо записати куб як суму двох кубів, четверту силу як суму двох четвертих сил, і взагалі будь-який куб як суму двох четвертих сил. Я знайшов справді чудове доведення, але поля надто малі, щоб умістити його.* У цьому дражливого відступі Ферма стверджував, що якщо $n > 2$, то діофантове рівняння

$$x^n + y^n = z^n$$

немає розв'язків у цілих числах, крім тривіальних, у яких $z = x$ чи $z = y$, причому решта змінних дорівнює нулю.

Відома остання теорема Ферма

Щойно наведена цитата стала відомою як "остання теорема Ферма" точніше, гіпотезою Ферма. Усі результати викладені на полях його "Арифметики" були визнані вірними, хоча остання з них, знаменита теорема, чекала на доведення до 1994 року.

У своєму листуванні Ферма неодноразово згадував випадки кубів та четвертої сили, що дозволяє припустити, що успіх, досягнутий їм у доведенні цих двох випадків, змусив його припустити, що метод нескінченного спуску працюватиме для всіх експонентів; але в жодному місці немає жодних слідів цього "воістину чудового доведення", яке він нібито знайшов. Більшість експертів зараз вважають, що Ферма просто вірив у те, що має доведення, хоча це не так.

Відома остання теорема Ферма

Протягом 350 років остання теорема чинила опір усім спробам її вирішення багатьма великими математиками і ще більшим числом математиків. Потім, в останні десятиліття XX століття було досягнуто швидкого і істотного прогресу. Деякі математики намагалися підкорити гіпотезу грубою силою, використовуючи комп'ютери для перевірки гіпотези для все більших великих експонент.

Математики XVII ст

Великий крок уперед відбувся 1983 року, коли молодий західний німець Герд Фальтінгс довів, що рівняння Ферма

$$x^n + y^n = z^n$$

має лише скінченну, а чи не нескінченне число інтегральних рішень для будь-якого заданого $n \geq 3$. Якби згодом вдалося довести, що скінченну число рішень насправді дорівнює нулю в кожному випадку, твердження Ферма було б вирішено раз і назавжди. Інший разючий результат, встановлений у 1987 році, полягає в тому, що остання теорема вірна правильна для "майже всіх" значень експоненти n ; тобто, у міру того, як n прагне нескінченності, частка значень, котрим ця теорема вірна, наближається до 100 відсотків. Перша вказівка на те, що проблема, можливо, нарешті вирішена, з'явилося влітку 1993 року, коли Ендрю Уайлз з Принстонського університету накидав доведення під час серії з трьох лекцій у Кембриджі, Англія

Література

- [1] David M. Burton. The History of Mathematics: An Introduction, 6th Edition, McGraw Hill Learning Solutions (2007)
- [2] Craig Smoryński, History of Mathematics, Springer (2008)
- [3] Uta C. Merzbach and Carl B. Boyer, A History of Mathematics, 3d Edition, Printed in the United States of America (2011)
- [4] Гуж М. М., Матеріали для проведення факультативних занять з математики, електронна версія (2020)

Дякую за увагу!