Linear algebra and analytical geometry for engineers

Lecture 1: Matrices and operations on them

Lecturer: Igor Orlovskyi

Зміст

1. Основні поняття

Означення 1

Матрицею A *розміром* $m \times n$ *називають прямокутну таблицю чисел, що містить* m *рядків та* n *стовпців, і позначають*

$$\begin{array}{ccl} & \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & j\text{-й стовпець} & & \phantom{a_{1n}} \\ & & & \downarrow & & \end{array} & \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \; i\text{-й рядок} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Скорочено матрицю записують $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$, $A = (a_{ij})$, або $A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n}$, якщо треба вказати розмір матриці. Числа $a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, з яких складається матриця, називають її **елементами**.

Приклад 1

Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 1 \\ 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розмір матриці 4×3.
Елемент $a_{23} = 7$.

Типи матриць

Означення 2

Матрицю називають нульовою, якщо всі її елементи дорівнюють нулю.Позначають літерою O. Нульова матриця розміру $m \times n$ позначають $O_{m\times n}$.

Приклад 2

Нульова матриця розміру 2×3: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Означення 3

*Матрицю називають **квадратною**, якщо кількість рядків цієї матриці дорівнює кількості її стовпців, тобто $m = n$. Квадратну матрицю розміру $n \times n$ називають **квадратною матрицею n-го порядку** та позначають A_n (у разі необхідності вказати порядок).*

Набір елементів $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ квадратної матриці A_n утворює **головну діагональ**, а набір $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \ldots, a_{n1}$ – **побічну діагональ**.

головна діагональ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \iddots & a_{2n} \\ \cdots & \iddots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

побічна діагональ

Означення 4

Квадратну матрицюназивають *діагональною*, *якщо всі елементи цієї матриці, окрім, можливо, елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю.*

Приклад 3

Діагональна матриця третього порядка: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Означення 5

Діагональну матрицю називають ***одиничною****, якщо всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці. Позначають літерою E (E_n – одинична матриця n-го порядку).*

Приклад 4

Одинична матриця 3-го порядку:

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Означення 6

*Квадратну матрицю називають **верхньою (нижньою) трикутною**, якщо всі елементи, що розташовано нижче (вище) головної діагоналі, рівні нулю.*

Приклад 5

- Верхня трикутна матриця:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- Нижня трикутна матриця:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Означення 7

*Елемент рядку матриці називають **крайнім** (**лідером рядка**), якщо він відмінний від нуля, а всі елементи, що знаходяться зліва від нього, дорівнюють нулю, тобто a_{ik} крайній елемент i-го рядку, якщо $a_{ik} \neq 0$ і $a_{ij} = 0, \ j = \overline{1, k-1}$.*

Означення 8

*Матрицю називають **східчастою**, якщо*

1. *нульові рядки матриці (якщо вони є) розташовані нижче від ненульових,*
2. *крайній елемент кожного ненульового рядку, знаходиться справа від крайнього елемента попереднього рядку, тобто для кожного крайнього елементу a_{ij}, $i \geq 2$ крайній елемент $a_{i-1,k}$ має $k < j$.*

Приклад 6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

не східчаста — східчаста

Означення 9

Матрицю, яка містить один стовпець(один рядок) називають стовпцем або матрицею-стовпцем або вектором-стовпцем (рядком або матрицею-рядком або вектор-рядком). Вектор-стовпець та вектор-рядок називають також векторами.

Приклад 7

Матриця $A_{m\times 1} = [\ \vec{a}\ ] = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ є матрицею-стовпцем, що містить m елементів.

Матриця $B_{1\times n} = \left[\ \overleftarrow{b}\ \right] = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \end{pmatrix}$ є матрицею-рядком, що містить n елементів.

2. Дії над матрицями

I. Рівність матриць

Означення 10

Матриці A та B називають рівними, якщо вони однакового розміру і мають рівні відповідні елементи, позначають $A = B$.

$$\boxed{A_{m\times n} = B_{p\times q} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} 1)\ m = p \ \wedge \ n = q; \\ 2)\ a_{ij} = b_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}. \end{array}}$$

II. Додавання (віднімання) матриць

Операцію додавання (віднімання) матриць вводять тільки для матриць однакового розміру.

Означення 11

Сумою (різницею) двох матриць $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *та* $B_{m\times n} = (b_{ij})$ *називають матрицю* $C_{m\times n} = (c_{ij})$ *таку, що*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ (c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}), \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}.$$

Позначають $C = A + B$ $(C = A - B)$.

Приклад 8

Нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Знайти $A + B$, $A + C$, $B - A$ та $B - C$.

Розв'язання. Знайдемо $A + B$ та $B - A$:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+2 & 2+2 & 3+(-2) \\ 4+(-3) & 5+(-5) & 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix};$$

$$B - A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-1 & 2-2 & -2-3 \\ -3-4 & -5-5 & 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -7 & -10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Суми $A + C$ та різниці $B - C$ не існує, оскільки матриці $A_{2\times 3}$, $B_{2\times 3}$ мають розмір відмінний від матриці $C_{2\times 2}$.

III. Множення матриці на число

Означення 12

Добутком матриці $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *на число* $\lambda \in \mathbb{R}$ *називають матрицю* $B_{m\times n} = (b_{ij})$ *таку, що* $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. *Позначають* $B = \lambda A$.

Приклад 9

Нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Знайти $3 \cdot A$.

Розв'язання.

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot(-4) \\ 3\cdot(-2) & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ -6 & 0 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}.$$

Означення 13

Матрицю $-A = (-1) \cdot A$ *називають* ***протилежною*** *до матриці* A.

Зауваження

різницю матриць $A - B$ можна визначити як

$$A - B = A + (-B).$$

Означення 14

Лінійною комбінацією матриць $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *та* $B_{m\times n} = (b_{ij})$ *називають матрицю* $\alpha A + \beta B$*, де* α *та* β *– деякі числа з* $\mathbb{R}$.

Основні властивості лінійних дій над матрицями

Нехай $A = A_{m\times n}$, $B = B_{m\times n}$, $C = C_{m\times n}$ – деякі довільні матриці однакового розміру, α, $\beta \in \mathbb{R}$, а $O = O_{m\times n}$ – нульова матриця. Тоді,

1. Комутативність додавання матриць: $A + B = B + A$;
2. Асоціативність додавання матриць: $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. Властивість нульової матриці: $A + O = A$;
4. Властивість протилежної матриці: $A + (-A) = A - A = O$;
5. $1 \cdot A = A$;
6. Дистрибутивність множення матриці на число щодо додавання матриць: $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$;
7. Дистрибутивність множення матриці на число щодо додавання чисел: $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$;
8. Асоціативніть множення матриці на число: $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$.

IV. Добуток матриць

Операція добутку двох матриць вводиться тільки для випадку, коли число стовпців першої матриці дорівнює числу рядків другої матриці. Такі матриці називаються узгодженими.

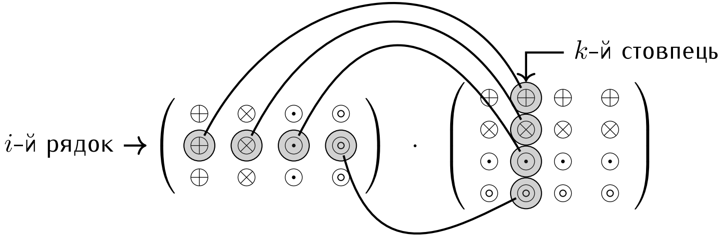
Означення 15

Добутком матриці $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на матрицю $B_{n\times p}=(b_{jk})$ називають матрицю $C_{m\times p}=(c_{ik})$ кожен елемент c_{ik} якої дорівнює сумі добутків елементів i-го рядку матриці A на відповідні елементи k-го стовпця матриці B, тобто

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk},\ \ i=\overline{1,m},\ \ k=\overline{1,p}.$$

Позначають $C=A\cdot B$.

Отримання елемента c_{ik} схематично зображено нижче



Приклад 10

Нехай,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Знайти $A \cdot B$ та $B \cdot A$ (якщо це можливо).

Розв'язання. Добутку $B \cdot A$ не існує, оскільки матриці $B_{3\times 2}$ та $A_{3\times 3}$ не узгоджені. Але $A_{3\times 3}$ та $B_{3\times 2}$ є узгодженими, тому знайдемо їх добуток:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) \\ (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + (-3) \cdot 0 & (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -1 & -2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Властивості множення матриць

1. **Асоціативність множення матриць**: Якщо $A = A_{m\times n},\ B = B_{n\times l},\ C = C_{l\times p}$, то
$$A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C;$$
2. **Дистрибутивність множення матриць щодо додавання матриць**: Якщо $A = A_{m\times n},\ B = B_{n\times l},\ C = C_{n\times l},\ D = D_{l\times p}$, то
$$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C, \quad (B+C)\cdot D = B\cdot D + C\cdot D;$$
3. **Асоціативність щодо множення на число**: Якщо $A = A_{m\times n},\ B = B_{n\times l}$ та $\alpha\in\mathbb{R}$, то
$$\alpha(A\cdot B) = (\alpha A)\cdot B = A\cdot(\alpha B);$$
4. **Властивість одиничної матриці**:
$$A_{m\times n}\cdot E_n = E_m\cdot A_{m\times n} = A;$$
5. **Властивість нульової матриці**:
$$A_{m\times n}\cdot O_{n\times p} = O_{m\times p}, \quad O_{l\times m}\cdot A_{m\times n} = O_{l\times n}.$$

Означення 16

Матриці A та B називаються комутуючими (або переставними), якщо $A \cdot B = B \cdot A$.

Зауваження

Відмінності від добутку дійсних чисел:
1. $A \cdot B$ незавжди дорівнює $B \cdot A$.

Приклад 11

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що $A \cdot B \neq B \cdot A$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \boxed{\neq} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot A.$$

2. З того, що $A \cdot B = O$ не обов'язково випливає, що $A = O$ або $B = O$. Зокрема, з того, що $A^2 = A \cdot A = O$ не обов'язково випливає, що $A = O$.

Приклад 12

Нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Тоді $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

V. Степінь матриці

Дана операція визначена лише для квадратних матриць.

Означення 17

Натуральним степенем k квадратної матриці A називають квадратну матрицю A^k, яка задається співвідношенням

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ разів}}.$$

Для $k = 0$ вважають, що $A_n^0 = E_n$.

Означення 18

Нехай є многочлен $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ та квадратна матриця A. Тоді многочленом p від квадратної матриці A називають матрицю

$$P(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 E.$$

Якщо $f(A) = O$, то матриця A – корінь матричного многочлена $f(A)$.

Приклад 13

Нехай

$$f(x) = x^2 - 2x + 10, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Знайти $f(A)$.

Розв'язання.

$$f(A) = A^2 - 2 \cdot A + 10 \cdot E =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Означення 19

Транспонування – перехід від матриці A розміру $m \times n$ до матриці A^T розміру $n \times m$ при якому рядки та стовпці міняються місцями зі збереженням порядку. Матрицю A^T називають матрицею транспонованою до матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Приклад 14

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти A^T.

Розв'язання.

$$A^T = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Властивості транспонування матриць

Нехай A, B - деякі довільні матриці і $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді,

1. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$;
2. Якщо $A = A_{m\times n}$, $B = B_{m\times n}$, то $(A+B)^T = A^T + B^T$;
3. $(\alpha A)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}}$;
4. Якщо $A = A_{m\times n}$, $B = B_{n\times p}$, то $(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Означення 20

Матрицю A називають симетричною, якщо $A^T = A$, і кососиметричною, якщо $A^T = -A$.

Наприклад, для довільної матриці A, матриця $C = AA^T$ – симетрична.

VII. Елементарні перетворення матриць

Означення 21

Елементарними перетвореннями матриць є:
– перестановка місцями двох рядків (двох стовпців) матриці;
– множення всіх елементів рядка (стовпця) на число, відмінне від нуля;
– додавання до всіх елементів рядку (стовпця) матриці відповідних елементів паралельного рядку (стовпця), помноженого на одне і те саме число.

Означення 22

Дві матриці A і B називаються еквівалентними, якщо одна з них може бути отримана з іншої за допомогою елементарних перетворень. Записується $A \sim B$.

За допомогою елементарних перетворень можна будь-яку матрицю привести до матриці східчастого вигляду.

Приклад 15

Звести до східчастого вигляду матрицю:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ -5 & 4 & 11 & 2 & 1 \\ -15 & -2 & 12 & -1 & 10 \\ 12 & -6 & -19 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Розв'язання.

$$\frac{1}{2}\cdot II \text{ ст.}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 2 & 3 & 1 & -1 \\ -5 & 4 & 11 & 2 & 1 \\ -15 & -2 & 12 & -1 & 10 \\ 12 & -6 & -19 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 11 & -5 & 1 \\ -1 & -2 & 12 & -15 & 10 \\ -3 & -6 & -19 & 12 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 11 & -5 & 1 \\ -1 & -1 & 12 & -15 & 10 \\ -3 & -3 & -19 & 12 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \longleftarrow II\text{р.}-2\cdot I\text{р.} \\ \longleftarrow III\text{р.}+I\text{р.} \\ \longleftarrow IV\text{р.}+3\cdot I\text{р.} \end{array} \sim$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 2 & 3 & 1 & -1 \\
-5 & 4 & 11 & 2 & 1 \\
-15 & -2 & 12 & -1 & 10 \\
12 & -6 & -19 & -3 & -3
\end{pmatrix}
\sim
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\
2 & 2 & 11 & -5 & 1 \\
-1 & -1 & 12 & -15 & 10 \\
-3 & -3 & -19 & 12 & -3
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\
\leftarrow II\text{р.}-2\cdot I\text{р.} \\
\leftarrow III\text{р.}+I\text{р.} \\
\leftarrow IV\text{р.}+3\cdot I\text{р.}
\end{array}
\sim
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 5 & -5 & 3 \\
0 & 0 & 15 & -15 & 9 \\
0 & 0 & -10 & 12 & -6
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\
\\
\leftarrow III\text{р.}-3\cdot II\text{р.} \\
\leftarrow IV\text{р.}+2\cdot II\text{р.}
\end{array}
\sim
$$

$$
\sim
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 5 & -5 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0
\end{pmatrix}
\sim
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 5 & -5 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

3. Приклади застосувань

I. Матричний запис в моделюванні мереж

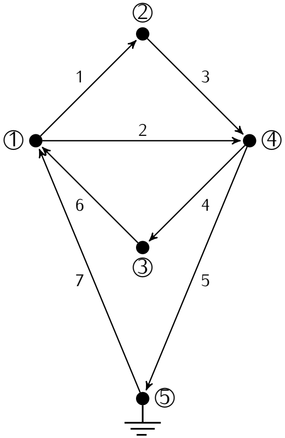


Рис. 1:

У цьому пункті використано матеріали з роботи В.В. Булдигіна, І.В. Алєксєєвої та ін. [2].

Матриці використовують для опису електричних мереж, потоків на шляхах, виробничих процесів тощо.

Мережу, зображену на рис. 1, складає 7 гілок або ребер (з'єднань, занумерованих 1,2,...,7) та 5 вузлів (точок, де дві або більше гілок сполучаються) з одним заземленим вузлом (на кожній гілці вказано напрям).

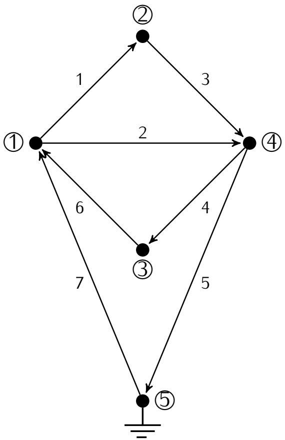


Рис. 1:

Мережу описують за допомогою "вузлової інцидентної матриці" $A = (a_{ij})_{5\times 7}$, де

$$a_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{якщо гілка } j \text{ виходить з вузла } (i); \\ -1, & \text{якщо гілка } j \text{ входить у вузол } (i); \\ 0, & \text{якщо гілка } j \text{ не зв'язана з вузлом } (i). \end{cases}$$

А саме:

$$A = \begin{array}{r c} & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{гілка} \\ \text{вузол } ① \\ \text{вузол } ② \\ \text{вузол } ③ \\ \text{вузол } ④ \\ \text{вузол } ⑤ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

II. Цифрова фотографія (додавання матриць)

Усі зображення, які можна побачити в мережі Інтернет, створені або опрацьовані за допомогою комп'ютера або іншої цифрової техніці (наприклад, цифрового фотоапарата) і збереженні у вигляді цифрового файлу. Цифрове зображення поділене на тисячі або, навіть, мільйони пікселів (маленьких квадратиків), які отримуються поділом будь-якого зображення сіткою. Розглянемо на простому прикладі представлення зображення у вигляді матриці та операцію збільшення його контрастності.

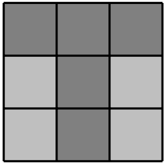


Рис. 2:

Рис. 3:

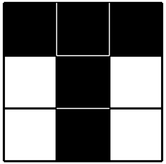


Рис. 4:

Наприклад, літеру Т на рис. 2 зображено за допомогою 9 пікселів у сітці 3×3. Розглянемо чотири відтінки: білий, світло-сірий, темно-сірий та чорний і занумеруємо їх як 0, 1, 2, 3 відповідно (рис. 3).

Запишемо матрицю, яка відповідає цифровій фотографії літери Т, кожний елемент якої відповідає використаному відтінку:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

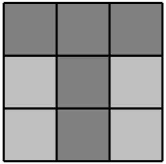


Рис. 2:

Рис. 3:

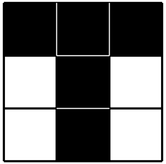


Рис. 4:

Щоб збільшити контрастність фотографії (темно-сірий відтінок літери перетвориться на чорний (тобто збільшити на 1), а світло-сірий відтінок на білий (тобто зменшити на 1)) (рис. 4), до матриці фотографії A треба додати матрицю

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

тобто $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$

Література

[1] Алєксєєва, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Федорова, Л. Б. *Математика в технічному університеті.* (Т. 1). К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018

[2] Булдигін, В.В., Алєксєєва, І.В., Гайдей, В.О., Диховичний, О.О., Коновалова, Н.Р., Федорова, Л.Б. *Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник.* — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с.

[3] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[4] *Конспект лекцій з аналітичної геометрії та лінійної алгебри для студентів технічних факультетів* // Уклад.: З.П. Ординська, І.В. Орловський, М.К. Руновська. – К.: НТУУ «КПІ», Електронне навчальне видання, свідоцтво № 030513. – 2013. – 131 с.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!