

# Linear algebra and analytical geometry for engineers

## Lecture 2: Determinants and their properties

Lecturer: Igor Orlovskiy

- ① Основні поняття
- ② Розклад визначника за будь-яким рядком (стовпцем)
- ③ Основні властивості визначників
- ④ Метод зведення визначника до трикутного вигляду

# 1. Основні поняття

Довільній квадратній матриці  $n$ -го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

можна поставити у відповідність число, яке називається, **визначником (детермінантом)** матриці  $A$ , позначається

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ або } |A| \text{ або } \det A \text{ або } \Delta,$$

і наводиться нижче.

# Визначники 1-го, 2-го та 3-го порядків

## Означення 1

*Визначником 1-го порядку матриці  $A = (a_{11})$  називається вираз  $\det A = a_{11}$ ;*

## Означення 2

*Визначником 2-го порядку матриці  $A$  називається вираз*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

## Приклад 1

Знайти визначник матриці  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ .

*Розв'язання.*

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) = 12 - (-15) = 27.$$

## Означення 3

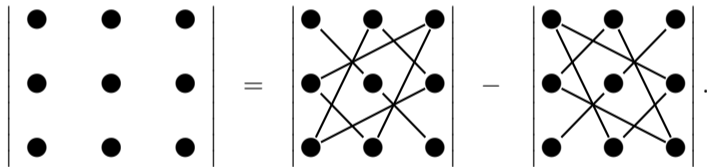
*Визначником 3-го порядку матриці  $A$  називається вираз*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}; \quad (1)$$

# Схеми обчислення визначника 3-го порядку

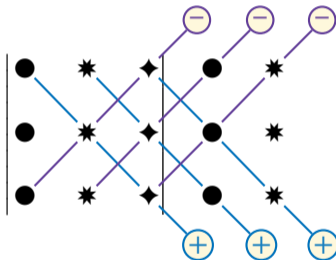
**1. Правило трикутників** (див. [2, 3]) розрахунку визначників 3-го порядку: У формулі (1) зі знаком „+“ беруться добуток елементів головної діагоналі та добутки елементів, що знаходяться у вершинах двох трикутників з основами, паралельними головній діагоналі; зі знаком „-“ беруться добуток елементів другої (побічної) діагоналі та добутки елементів, що знаходяться у вершинах двох трикутників з основами, паралельними побічній діагоналі.

Схематично її можна зобразити наступним чином



2. **Правило Саррюса** (див. [1]) полягає у дописуванні справа від визначника 1-го та 2-го стовпців зі збереженням порядку. Зі знаком “+” у формулі (1) беруться добутки елементів головної діагоналі та паралельних їй; зі знаком “-” у формулі (1) беруться добутки елементів побічної діагоналі та паралельних їй.

Схематично це правило проілюстровано нижче



## Приклад 2

Обчислити визначник 3-го порядку за правилом трикутника

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

*Розв'язання.*

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \textcircled{0} & \textcircled{5} & \textcircled{1} \\ \textcircled{-1} & \textcircled{6} & \textcircled{-2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ \textcircled{0} & \textcircled{5} & \textcircled{1} \\ \textcircled{-1} & \textcircled{6} & \textcircled{-2} \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \cdot 6 - (3 \cdot 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \cdot 6) = \\ &= -10 - 2 + 0 - (-15 + 0 + 6) = -12 + 9 = -3. \end{aligned}$$

### Приклад 3

Обчислити визначник 3-го порядку за правилом Саррюса

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & -2 & -1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \cdot 6 - (3 \cdot 5 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot 0 \cdot (-2)) = \\ &= -10 - 2 + 0 - (-15 + 6 + 0) = -12 + 9 = -3. \end{aligned}$$

## Означення 4

*Мінором* деякого елемента  $a_{ij}$  визначника  $n$ -го порядку називається визначник  $n - 1$ -го порядку, який отримано з початкового, шляхом викреслювання рядка  $i$  стовпця на перетині яких знаходиться обраний елемент. Позначається  $M_{ij}$ .

## Приклад 4

Нехай  $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ . Знайти  $M_{11}$  та  $M_{23}$ .

*Розв'язання.*

$$M_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

## Означення 5

*Алгебраїчним доповненням* елемента  $a_{ij}$  визначника  $n$ -го порядку називається його мінор, взятий зі знаком "+" якщо сума  $i + j$  - парне число, і зі знаком "-" якщо ця сума непарна. Позначається  $A_{ij}$ :  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ .

### Приклад 5 (Продовження прикладу 4)

Для  $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  знайти  $A_{11}$  та  $A_{23}$ .

*Розв'язання.*

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

## Означення 6

*Визначником (детермінантом) матриці  $A$  називають число  $\det A$ , яке обчислюють за правилом:*

- 1 якщо  $n = 1$ , то  $\det A = |a_{11}| = a_{11}$ ;
- 2 якщо  $n > 1$ , то

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \dots + a_{1n} \cdot A_{1n} = \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k},$$

де  $A_{1k}$  є алгебраїчним доповненням елементу  $a_{1k}$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

Покажемо, що для визначників 2-го порядку формули за індуктивним означенням та означенням даними раніше будуть співпадати:

$$\begin{aligned}\det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} = \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} = a_{11} \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = \det A.\end{aligned}$$

## 2. Розклад визначника за будь-яким рядком (стовпцем)

## Теорема 1

Для кожної квадратної матриці  $A$   $n$ -го порядку і для довільного  $1 \leq i \leq n$  є вірною формула розкладу визначника  $n$ -го порядку за  $i$ -м рядком:

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}, \quad (2)$$

та для довільного  $1 \leq j \leq n$  є вірною формула розкладу визначника  $n$ -го порядку за  $j$ -м стовпцем:

$$\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}. \quad (3)$$

## Означення 7

Квадратна матриця  $A$  називається **невиродженою**, якщо її визначник  $\det A \neq 0$ . В протилежному випадку ( $\det A = 0$ ) матриця  $A$  називається **виродженою**.

## Приклад 6

Обчислити визначник 4-го порядку розкладом за деяким рядком(стовпцем)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -6 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

*Розв'язання.* Оберемо 3-й стовпець, оскільки в ньому більше нулів. Тоді

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{43} \cdot A_{43} = (-1) \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 8 \end{vmatrix} + \\ &+ 0 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 8 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (1 \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \cdot 3 - (3 \cdot 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) \cdot 8)) + \\ &+ (0 + (-6) \cdot 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 3 - (1 \cdot 2 \cdot (-1) + (-6) \cdot 1 \cdot 8 + 0)) = \\ &= -(32 - 2 - 18 - (-12 + 3 - 32)) + (18 + 3 - (-2 - 48)) = -53 + 71 = 18. \end{aligned}$$

# 3. Основні властивості визначників

- ① (Рівноправність рядків та стовпців) Визначник матриці не змінюється при її транспонуванні:

$$\det A = \det A^T \text{ або } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- ② (Антисиметричність) При перестановці двох рядків (стовпців) визначник змінює знак:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- ③ (Однорідність) Спільний множник елементів будь якого рядку (стовпця) визначника можна винести за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda \cdot a_{i1} & \lambda \cdot a_{i2} & \cdots & \lambda \cdot a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- ④ (Умови рівності нулеві) Визначник матриці дорівнює нулю, якщо
- 1 один з рядків (стовпців) матриці складається з нулів:

$$i\text{-й рядок} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

- ④ (Умови рівності нулеві) Визначник матриці дорівнює нулю, якщо
- 2 матриця має два однакові рядки (стовпці):

$$\begin{array}{l} i \text{ рядок} \longrightarrow \\ k \text{ рядок} \longrightarrow \end{array} \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| = 0;$$

- 3 матриця містить два пропорційні рядки (стовпці):

$$\begin{array}{l} i \text{ рядок} \longrightarrow \\ k \text{ рядок} \longrightarrow \end{array} \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda \cdot b_1 & \lambda \cdot b_2 & \cdots & \lambda \cdot b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| = 0;$$

- 5 (Лінійність) Якщо елементи деякого рядку (стовпця) визначника представляють собою суми двох доданків, тоді визначник можна розкласти на суму двох відповідних визначників:

$$\begin{aligned}
 i \text{ рядок} \longrightarrow & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \cdots & b_n + c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\
 & = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

- 6 Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядку (стовпця) додати відповідні елементи другого рядку (стовпця), помноженого на одне і те саме число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} + \lambda \cdot a_{i1} & a_{k2} + \lambda \cdot a_{i2} & \cdots & a_{kn} + \lambda \cdot a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

8) Визначник трикутної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

9) Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку їх визначників, тобто

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

10) (Теорема анулювання) Сума добутків елементів рядка(стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнюють нулю:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \dots + a_{in} \cdot A_{jn} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk} = 0, \quad i \neq j. \quad (4)$$

## 4. Метод зведення визначника до трикутного вигляду

Даний метод заключається у приведенні визначника, за допомогою елементарних перетворень та властивостей визначника, до трикутного вигляду. Приведемо більш детально цей метод за допомогою наступної схеми.

**Схема методу зведення визначника до трикутного вигляду.**

Розглянемо визначник  $\Delta_n = \det A$  матриці  $n$ -го порядку.

- 1 Якщо всі елементи 1-го стовпця визначника дорівнюють нулю, тоді  $\det A = 0$  (за властивістю 4.1). В протилежному випадку переходимо до наступного пункту.

- ② Будемо вважати, що  $a_{11} \neq 0$ , оскільки в протилежному випадку існує деякий елемент  $a_{i1} \neq 0$  (згідно з пунктом ①), який за допомогою перестановки  $i$ -го рядка з 1-м дасть необхідне (в цьому випадку необхідно не забути перед визначником поставити знак "-"). Тоді додамо до кожного  $i$ -го рядку,  $i = \overline{2, n}$ , 1-й рядок домножений на  $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$  (дані дії не змінюють визначника, за властивістю 6). Отримаємо

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \left| a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} \cdot a_{1k}, k = \overline{1, n}, i = \overline{2, n} \right| = \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \Delta_{n-1}. \end{aligned}$$

- ③ Якщо  $n - 1 = 1$ , то  $\Delta_1 = |a'_{22}| = a'_{22}$  і в результаті будемо мати  $\Delta_2 = a_{11} \cdot a'_{22}$ . В протилежному випадку, до  $\Delta_{n-1}$  застосовуємо пункти ① та ②.

## Приклад 7

Обчислити визначник 4-го порядку зведенням його до трикутного вигляду

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -6 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 0 & -6 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} \leftarrow IIIp. + Ip. = \\ &= - \begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} \leftarrow -\frac{1}{2} \cdot IIIp. = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow IIIp. - 2 \cdot IIp. \\ \leftarrow IVp. - 3 \cdot IIp. \end{matrix} = \\
&= -2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow IVp. - 4 \cdot IIIp. \end{matrix} = \\
&= -2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-9) = 18.
\end{aligned}$$

- [1] Алексеева, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Федорова, Л. Б. *Математика в технічному університеті*. (Т. 1). К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018
- [2] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.
- [3] *Конспект лекцій з аналітичної геометрії та лінійної алгебри для студентів технічних факультетів* // Уклад.: З.П. Ординська, І.В. Орловський, М.К. Руновська. – К.: НТУУ «КПІ», Електронне навчальне видання, свідоцтво № 030513. – 2013. – 131 с.
- [4] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике*, 1 часть. – М.: Айрис Пресс, 2006.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!