Linear algebra and analytical geometry for engineers

Lecture 3: The inverse of a square matrix and its properties. Matrix equations

Lecturer: Igor Orlovskyi

Зміст

1. Обернена матриця та її властивості

Означення 1

Матрицю A^{-1} *називають* ***оберненою*** *до квадратної матриці* A*, якщо*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

При цьому саму матрицю A *називають* ***оборотною****.*

Зауваження

Матриця A^{-1} має такий самий порядок, що й матриця A.

Теорема 1

Якщо обернена матриця існує, то вона єдина.

Доведення

Доведемо від супротивного. Нехай існує дві різні обернені матриці A_1^{-1}, A_2^{-1}. Тоді,

$$A_1^{-1} = A_1^{-1} \cdot E = A_1^{-1} \cdot (A \cdot A_2^{-1}) = (A_1^{-1} \cdot A) \cdot A_2^{-1} = E \cdot A_2^{-1} = A_2^{-1}.$$

Отримуємо протиріччя. Теорему доведено.

Властивості оберненої матриці

Нехай дано невироджені квадратні матриці A та B однакового порядку. Тоді

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$;
3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Означення 2

*Матрицею, **приєднаною** до матриці* $A_n = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ *називають матрицю*

$$A^* = \left((A_{ij})_{i,j=1}^{n}\right)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} *– алгебраїчне доповнення елемента* a_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$ *матриці A (визначається так само, як алгебраїчне доповнення елемента визначника).*

Теорема 2 (Критерій існування оберненої матриці)

Матриця має обернену тоді і тільки тоді, коли вона є невиродженою ($\det A \neq 0$)*, причому*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*. \tag{1}$$

Доведення

Необхідність. Доведемо від супротивного. Нехай матриця A є виродженою ($|A| = 0$) та має обернену матрицю, тобто $A \cdot A^{-1} = E$. Тоді $|A \cdot A^{-1}| = |E|$, і $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 0 \cdot |A^{-1}| = 0 = |E| = 1$, приходимо до протиріччя. Необхідність доведено.

Достатність. Нехай матриця A є невиродженою. Покажемо, що матриця A^{-1}, яку задано (1), буде оберненою до матриці A. Розглянемо,

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A \cdot A^{*} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} \right)_{i,j=1}^{n}.$$

З властивостей алгебраїчних доповнень (розклад визначника за рядком та теорема анулювання) випливає, що

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \det A, & i = j, \end{cases} , i, j = \overline{1, n}.$$

З останнього випливає, що $A \cdot A^{-1} = E_n$, що й треба було довести.

2. Метод приєднаної матриці для знаходження оберненої матриці

На останній теоремі ґрунтується метод розрахунку оберненої матриці, який називається методом приєднаної матриці.

Схема методу приєднаної матриці

Крок 1. Знаходимо $\det A$. Якщо $\det A = 0$, тоді матриці, оберненої до матриці A не існує. В протилежному випадку ($\det A \neq 0$) переходимо до наступного кроку.

Крок 2. Обчислюємо приєднану матрицю $A^* = (A_{ij})^T$ та підставляємо у формулу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*.$$

Перевірка Перевіряємо правильність знайденої оберненої матриці:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Формула для оберненої матриці 2-го порядку

Запишемо формулу для обчислення оберненої матриці 2-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

причому $\det A \neq 0$. Тоді

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти A^{-1} та B^{-1}, якщо вони існують.

Розв'язання. Перевіримо, чи є матриця A невиродженою. Для цього знайдемо визначник

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0.$$

Тому A^{-1} не існує.

Аналогічно, перевіримо спочатку чи є матриця B невиродженою:

$$\det B = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2 \neq 0.$$

Матриця B – невироджена, тому, B^{-1} існує. Знайдімо її:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність знаходження

$$B^{-1} \cdot B = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = E.$$

Формула для оберненої матриці 3-го порядку

Запишемо формулу для обчислення оберненої матриці 3-го порядку. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

причому $\det A \neq 0$. Тоді

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Приклад 2

Знайти A^{-1}, якщо
$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є матриця A невиродженою:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix} =$$
$$= (-1)\cdot 2\cdot(-1)+2\cdot 1\cdot 0+3\cdot 2\cdot(-1)-\big(3\cdot 2\cdot 0+2\cdot 2\cdot(-1)+(-1)\cdot 1\cdot(-1)\big) =$$
$$= 2+0-6-(0-4+1)=-4+3=-1\neq 0.$$

Отримали, що $\det A=-1\neq 0$, тобто матриця A – невироджена і A^{-1} існує. Знайдемо її.

Для знаходження A^{-1} обчислимо всі алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-1,\quad A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-1,\quad A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=2,\quad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=1,\quad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=7,$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-2,\quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1,\quad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-6.$$

Таким чином, $A^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 7 \\ -2 & -1 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -7 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

Перевіримо правильність знаходження

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -7 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

3. Матричні рівняння

Розглянемо рівняння відносно невідомої матриці $X = (x_{ij})$ розміру $m \times n$

$$A \cdot X = B, \tag{2}$$

де A і B – відомі матриці розмірів $m \times m$ та $m \times n$ відповідно.
Якщо матриця A у рівнянні (2) є невиродженою, тоді для неї існує обернена матриця A^{-1}.
В цьому випадку розв'язок рівняння (2) можна подати у вигляді

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B.}$$

Дійсно, якщо ми домножимо ліву та праву частину рівняння (2) зліва на A^{-1}, отримаємо

$$X = E \cdot X = \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X = A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B.$$

Розглянемо рівняння відносно невідомої матриці $X = (x_{ij})$ розміру $m \times n$

$$X \cdot A = B, \tag{3}$$

де A і B – відомі матриці розмірів $n \times n$ та $m \times n$ відповідно.
У випадку невиродженості матриці A, розв'язок рівняння представляється у вигляді

$$\boxed{X = B \cdot A^{-1}.}$$

Показується даний факт аналогічно до попереднього, тільки ми ліву та праву частини рівняння домножаємо на A^{-1} справа.

Розглянемо рівняння відносно невідомої матриці $X = (x_{ij})$ розміру $m \times n$

$$A \cdot X \cdot B = C, \tag{4}$$

де A, B і C – відомі матриці розмірів $m \times m$, $n \times n$ та $m \times n$ відповідно.
У випадку невиродженості матриць A і B, розв'язок рівняння представляється у вигляді

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}.}$$

Показується даний факт аналогічно до попередніх.
Рівняння $(2) - (4)$ називаються матричними рівняннями.

Приклад 3

Розв'язати матричне рівняння $XA = B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Маємо рівняння типу (3), розв'язок якого, у разі невиродженості A, шукається у вигляді $X = B \cdot A^{-1}$. Знайдемо спочатку

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) = -6 + 2 = -4 \neq 0.$$

Отже, матриця A невироджена і для знаходження X потрібно обчислити

$$A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо розв'язок нашого рівняння

$$X = B\cdot A^{-1} = -\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -8 & 0 \\ -12 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Приклад застосування оберненої матриці при кодуванні повідомлень

У цьому пункті використано матеріали з роботи В.В. Булдигіна, І.В. Алєксєєвої та ін. [2].
Розглянемо простий спосіб закодувати повідомлення. Кожній літері латинської абетки зіставляють номер (число):

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

"пробілу" ставлять у відповідність 0.
Наприклад, числова послідовність, яка відповідає слову LINE буде:

$$12,\ 9,\ 14,\ 5.$$

Після цього, отриману послідовність чисел, що відповідають повідомленню, перетворюють на матрицю, записуючи числа у стовпці. Нарешті, помножуючи отриману матрицю повідомлення на невироджену (отже, й оборотну) матрицю A, кодують повідомлення. За допомогою оберненої матриці A^{-1} повідомлення можна розкодувати.

Кодування повідомлення

Закодуємо повідомлення LINE.

1. Записуємо повідомлення за допомогою чисел
$$12,\ 9,\ 14,\ 5.$$
2. Записуємо матрицю по стовпцях і формуємо квадратну матрицю (у разі, якщо не вистачає чисел для формування квадратної матриці, заповнюють числове повідомлення наприкінці нулями):
$$M = \begin{pmatrix} 12 & 14 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Обираємо довільну невироджену матрицю, наприклад

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

і множимо її на матрицю M. Дістаємо криптограму

$$C = A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & 14 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. Отже, закодоване повідомлення буде мати вигляд

$$3,\ 6,\ 9,\ -4.$$

Розкодування повідомлення

Розкодуємо одержане повідомлення.

1. Знаходимо матрицю A^{-1}, яка є оберненою до кодувальної матриці A, тобто дістаємо розкодувальну матрицю:
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Множачи розкодувальну матрицю A^{-1} на закодовану матрицю C, дістаємо матрицю повідомлення:
$$M = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 14 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}.$$
3. Записуємо початкове числове повідомлення
$$12, 9, 14, 5.$$
і його літерний оригінал LINE.

Література

[1] Алєксєєва, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Федорова, Л. Б. *Математика в технічному університеті.* (Т. 1). К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018

[2] Булдигін, В.В., Алєксєєва, І.В., Гайдей, В.О., Диховичний, О.О., Коновалова, Н.Р., Федорова, Л.Б. *Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник.* — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с.

[3] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[4] *Конспект лекцій з аналітичної геометрії та лінійної алгебри для студентів технічних факультетів* // Уклад.: З.П. Ординська, І.В. Орловський, М.К. Руновська. – К.: НТУУ «КПІ», Електронне навчальне видання, свідоцтво № 030513. – 2013. – 131 с.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!