Linear algebra and analytical geometry for engineers

Lecture 4: The rank of a matrix, its properties, ways of finding the rank

Lecturer: Igor Orlovskyi

Зміст

1. Лінійна залежність і незалежність стовпців(рядків) матриці

Нехай задано матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо позначити i-й рядок матриці, як

$$\overleftarrow{a}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}, \ i = \overline{1, m},$$

а j-стовпець, як

$$\vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \ j = \overline{1, n},$$

то матрицю можна представити наступним чином:

$$A = \begin{pmatrix} \overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{a}_2 \\ \cdots \\ \overleftarrow{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix}.$$

Стовпці та рядки матриці при цьому можна розглядати, як матриці-рядки та матриці-стовпці, а тому над ними, як і над будь-якими іншими матрицями, можна виконувати лінійні операції, причому ці операції завжди будуть коректно визначені для рядків(стовпців) однієї матриці (можливі обмеження відносяться до операції додавання матриць), оскільки всі рядки(стовпці) матриці завжди мають однакові розміри.
Лінійні операції над стовпцями(рядками) дозволяють складати стовпці(рядки) у вигляді виразів

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k \quad \left(\lambda_1\overleftarrow{a}_1 + \lambda_2\overleftarrow{a}_2 + \ldots + \lambda_k\overleftarrow{a}_k \right),$$

де $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k$ ($\overleftarrow{a}_1, \ldots, \overleftarrow{a}_k$) – довільний набір стовпців (рядків) однакового розміру, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – дійсні числа, які називають лінійними комбінаціями стовпців (рядків).

Приклад 1

Нехай $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Записати рядки і стовпці матриці, та знайти $\overleftarrow{a}_1 + 2\overleftarrow{a}_2 - 7\overleftarrow{a}_3$, $3\vec{a}_2 - 2\vec{a}_1$.

Розв'язання. Матриця A має розмір 3×2, тому вона утворює три матриці-рядка та дві матриці-стовпця:

$$\overleftarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix}, \overleftarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix}, \overleftarrow{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо тепер вказані лінійні комбінації

$$\overleftarrow{a}_1 + 2\overleftarrow{a}_2 - 7\overleftarrow{a}_3 = \begin{pmatrix} 6 & 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$3\vec{a}_2 - 2\vec{a}_1 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Означення 1

Стовпці $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ називають лінійно залежними, *якщо існують такі дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, хоча б одне з яких не дорівнює нулю ($\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_k^2 \neq 0$), що*

$$\boxed{\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0}.} \qquad (1)$$

Якщо рівність (1) виконується лише у випадку, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$, то стовпці $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s$ називають лінійно незалежними.

Приклад 2

Покажемо, що стовпці одиничної матриці n-го порядку:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{pmatrix}.$$

є лінійно незалежними (для рядків показується аналогічно). Дійсно,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + ... + \lambda_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + ... + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

яке може виконуватись, використовуючи означення рівності матриць, лише при $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Приклад 3

Зауважимо, ще одну особливість отриманої лінійно незалежної сукупності стовпців: довільний стовпець $\vec{a}$ розміру $n \times 1$, має єдине представлення у вигляді лінійної комбінації векторів $\vec{e}_i,\ i = \overline{1, n}$:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n.$$

Перенесенням стовпця $\vec{a}$ у праву частину отримаємо

$$\vec{0} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n - \vec{a}.$$

Останнє означає, що система стовпців стане вже лінійно залежною.

Теорема 1 (Критерій лінійної залежності стовпців)

Для того, щоб стовпці $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$ були лінійно залежними, необхідно і достатньо, щоб один з них був лінійною комбінацією інших векторів системи.

Доведення

Необхідність. Нехай вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_k$ – лінійно залежні. Тоді, за означенням, існують такі числа λ_1, λ_2,...,λ_k, серед яких хоча б одне не рівне нулю, що

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0}.$$

Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $\lambda_k \neq 0$. Тоді

$$\vec{a}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\vec{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\vec{a}_{k-1} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_{k-1}\vec{a}_{k-1},$$

де $\alpha_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_k}$, $i = \overline{1, k-1}$. Тобто вектор $\vec{a}_k$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,...,$\vec{a}_{k-1}$.

Достатність. Нехай вектор $\vec{a}_k$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_{k-1}$, тобто

$$\vec{a}_k = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_{k-1}\vec{a}_{k-1},$$

для деяких дійсних чисел α_1, α_2, ..., α_{k-1}. Але тоді

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_{k-1}\vec{a}_{k-1} - \vec{a}_k = \vec{0},$$

звідки випливає, що вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$,...,$\vec{a}_k$ – лінійно залежні з

$$\lambda_i = \begin{cases} \alpha_i, & i = \overline{1, k-1}; \\ -1, & i = k, \end{cases}$$

і, принаймні, $\lambda_k = -1 \neq 0$. ■

Зауваження

Для рядків поняття лінійної залежності та незалежності, а також критерій лінійної залежності, задаються повністю аналогічно.

2. Ранг матриці

Розглянемо матрицю A розміру $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Означення 2

Мінором k-го порядку матриці $A_{m\times n}$ називають визначник, який складається з елементів матриці, що стоять на перетині довільно обраних k рядків та k стовпців ($k \le \min\{m, n\}$), зі збереженням порядку цих рядків та стовпців.

Якщо обрано рядки з номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$, та стовпці з номерами $j_1, j_2, \dots, j_k$, то відповідний мінор будемо позначати $M_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k}$. При цьому кажуть, що мінор *розташовано на перетині цих рядків та стовпців*, або його *утворено цими рядками та стовпцями.*

Зауваження

Всього мінорів k-го порядку можна скласти $C_m^k \cdot C_n^k$.

Приклад 4

Нехай задано матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

Знайти M_2^3, $M_{1,3}^{2,4}$, $M_{1,2,3}^{1,2,4}$.

Розв'язання.

$$M_2^3 = |a_{23}|, \quad M_{1,3}^{2,4} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}, \quad M_{1,2,3}^{1,2,4} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

Зауваження

Прийнято вважати, що позначення $M_{i_1, i_2, \ldots, i_k}^{j_1, j_2, \ldots, j_k}$ відповідає мінору матриці, якщо верхні та нижні індекси впорядковані за зростанням. В протилежному випадку, якщо порядок індексів інших, позначення відповідає визначнику, який отримано з відповідного мінора перестановкою рядків та стовпців.

Означення 3

Рангом матриці A, *називають найбільший із порядків відмінних від нуля мінорів матриці. Позначається* r, $r(A)$ *або* $\operatorname{rang} A$.

Ранг нульової матриці вважають рівним нулю.

Означення 4

Нехай $\operatorname{rang} A > 0$. *Мінор матриці, порядок якого дорівнює ранг матриці, називають базисним, а рядки та стовпці, які утворюють цей мінор базисними рядками та стовпцями.*

Зауваження

У матриці може бути декілька базисних мінорів.

Приклад 5

Знайти ранг матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки мінор $M_1^1 = |1| \neq 0$, то $\operatorname{rang} A \geq 1$. Також

$$M_{1,3}^{1,3} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2 \neq 0,$$

то $\operatorname{rang} A \geq 2$. Помітимо, що будь який з мінорів 3-го порядку має містити 2-й або 4-й стовпець, що складається з нулів, а тому дорівнює нулю. Таким чином, $\operatorname{rang} A = 2$.
Базисний мінор

$$M_{1,3}^{1,3} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}, \quad M_{2,3}^{1,3} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

Основні властивості ранга матриці

1. $0 \le \operatorname{rang} A_{m\times n} \le \min\{m,n\}$, де $\min\{m,n\}$ – найменше з чисел m та n.
2. Якщо $\operatorname{rang} A = r$, то матриця A має хоча б один мінор порядку r, не рівний нулю (базисний мінор), а всі її мінори порядків, вищих за r, рівні нулю.
3. При транспонуванні матриці її ранг не змінюється, тобто $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^T$.
4. Ранг матриці не змінюється при елементарних перетвореннях матриці.
5. Якщо викреслити з матриці нульовий рядок (або стовпець), то ранг матриці не зміниться.
6. Якщо до матриці дописати ще один рядок (або стовпець), то ранг матриці може або збільшитися на одиницю, або залишитися без змін.
7. Ранг східчастої матриці дорівнює кількості не нульових рядків.

8. (**Теорема про базисний мінор**)
   1. Базисні рядки (стовпці) матриці A, які відповідають будь-якому її базисному мінору, є лінійно незалежними.
   2. Будь-який рядок(стовпець) матриці A є лінійною комбінацією базисних рядків(стовпців).
9. Нехай A – квадратна матриця n-го порядку. Наступні твердження еквівалентні:
   1. $\operatorname{rang} A = n$;
   2. $\det A \neq 0$;
   3. A – невироджена;
   4. рядки (стовпці) матриці A є лінійно незалежними.
10. Нехай A – квадратна матриця n-го порядку. Наступні твердження еквівалентні:
    1. $\operatorname{rang} A < n$;
    2. $\det A = 0$;
    3. A – вироджена;
    4. рядки (стовпці) матриці A є лінійно залежними.

11. Лінійно незалежні рядки (стовпці) матриці, кількість яких співпадає з рангом матриці, є базисними рядками (стовпцями).
12. Для будь якої матриці найбільша кількість її лінійно незалежних рядків співпадає з найбільшою кількістю її лінійно незалежних стовпців і дорівнює рангу матриці.
13. $\operatorname{rang}(A+B) \le \operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B$.
14. $\operatorname{rang}(A \cdot B) \le \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}$.

3. Методи обчислення ранга матриці

І. Метод обвідних мінорів

Означення 5

Обвідним мінором до мінора порядка k матриці $A_{m\times n}$ називається мінор $(k+1)$-го порядка цієї матриці, який цілком містить даний мінор порядка k.

Теорема 2

Якщо для деякого ненульового мінора матриця всі його обвідні мінори рівні нулю, то він є базисним.

Алгоритм методу обвідних мінорів

Крок 1. Якщо матриця нульова, то $r(A) = 0$, інакше $r(A) \geq 1$, і переходимо до наступного кроку.

Крок 2. Знаходимо у матриці мінор 2-го порядка M_2, відмінний від нуля. Якщо такого мінора немає, то $r(A) = 1$, і пошук припиняємо. Інакше $r(A) \geq 2$, і переходимо до наступного кроку.

Крок 3. Обчислюємо всі мінори 3-го порядка, обвідні до M_2. Якщо серед них немає мінорів відмінних від нуля, то $r(A) = 2$, і пошук припиняємо. Інакше, існує мінор M_3 не рівний нулю. В цьому випадку $r(A) \geq 3$, і процедуру продовжуємо.

Продовжуємо процедуру.

Крок k. Нехай знайдено мінор $(k-1)$-го порядка M_{k-1}, відмінний від нуля, тобто $r(A) \geq k-1$. Обчислимо всі мінори k-го порядку, обвідні до M_{k-1}. Якщо серед них немає мінорів відмінних від нуля, то $r(A) = k-1$. Інакше існує мінор M_k, відмінний від нуля, а отже $r(A) \geq k$, і процедуру пошуку продовжуємо.

Приклад 6

Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ методом обвідних мінорів.

Розв'язання. Оскільки матриця A не нульова, тому $\operatorname{rang} A \geq 1$. Також не важко помітити, що у матриці є мінор 2-го порядка, відмінний від нуля. Наприклад,

$$M_{1,2}^{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Останнє означає, що $\operatorname{rang} A \geq 2$. Будемо шукати мінори 3-го порядку, обвідні до $M_{1,2}^{1,2}$. Помітимо, що таких мінорів лише два: $M_{1,2,3}^{1,2,3}$ та $M_{1,2,3}^{1,2,4}$.

Обчислюємо їх:

$$M_{1,2,3}^{1,2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-5) \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot (-1) - \big(3 \cdot (-5) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \cdot (-1)\big) =$$

$$= -25 + 2 - 3 - (-30 + 5 - 1) = -26 + 26 = 0;$$

$$M_{1,2,3}^{1,2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -5 & -3 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -5 & -3 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-5) \cdot 6 + 1 \cdot (-3) \cdot 2 + 5 \cdot 1 \cdot (-1) - \big(5 \cdot (-5) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 6 + 1 \cdot (-3) \cdot (-1)\big) =$$

$$= -30 - 6 - 5 - (-50 + 6 + 3) = -41 + 41 = 0.$$

Оскільки обидва мінори, обвідні до $M_{1,2}^{1,2}$, рівні нулю, то цей мінор є базисним, а тому $r(A) = 2$.

II. Метод елементарних перетворень

Оскільки, згідно з властивістю 4, елементарні перетворення не змінюють ранг матриці, то за їх допомогою матрицю можна звести до східчастого вигляду, а ранг східчастої матриці, згідно з 7, дорівнює кількості ненульових рядків. В цьому є суть методу елементарних перетворень

Зауваження

Для побудови базисного мінора східчастої матриці, достатньо обрати ненульові рядки, а у якості стовпців обрати ті, що містять крайні елементи кожного рядка.

Зауваження

Використовуючи метод елементарних перетворень на практиці, при появі нульових рядків, їх доцільно викреслювати із матриці, оскільки згідно з 5, це не змінює ранг матриці.

Приклад 7

Знайти ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ методом елементарних перетворень.

Розв'язання.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow II\text{р.} - I\text{р.} \\ \leftarrow III\text{р.} - 2I\text{р.} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow III\text{р.} - \frac{1}{2}II\text{р.} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Маємо два ненульові рядки, тому $\operatorname{rang} A = 2$. У якості базисного мінора, враховуючи зауваження, візьмемо $M_{1,2}^{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$.

Література

[1] Алєксєєва, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Федорова, Л. Б. *Математика в технічному університеті.* (Т. 1). К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018

[2] Булдигін, В.В., Алєксєєва, І.В., Гайдей, В.О., Диховичний, О.О., Коновалова, Н.Р., Федорова, Л.Б. *Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник.* — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с.

[3] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[4] *Конспект лекцій з аналітичної геометрії та лінійної алгебри для студентів технічних факультетів* // Уклад.: З.П. Ординська, І.В. Орловський, М.К. Руновська. – К.: НТУУ «КПІ», Електронне навчальне видання, свідоцтво № 030513. – 2013. – 131 с.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!