Linear algebra and analytical geometry for engineers

Lecture 5: Systems of linear equations

Lecturer: Igor Orlovskyi

Зміст

1. Основні поняття

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), що містять m рівнянь та n невідомих, називають систему вигляду

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array}\right. \quad . \tag{1}$$

де числа a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ називають коефіцієнтами системи, числа b_i, $i = \overline{1,m}$ – вільними членами.

Рівняння системи (1) називають алгебраїчними тому, що ліва частина кожного з них є многочленом від n змінних $x_1, \ldots, x_n$, а лінійними тому, що кожен з многочленів має перший степінь.

Означення 1

Систему (1) *називають* ***квадратною***, *якщо* $m = n$.

Означення 2

Систему (1) *називають* ***однорідною***, *якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, тобто* $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$. *В протилежному випадку систему називають* ***неоднорідною***.

Матрицю коефіцієнтів системи

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{pmatrix},$$

називають основною матрицею системи. Також позначимо:

$$X = [\vec{x}] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – стовпець невідомих; } B = [\vec{b}] = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ – стовпець вільних членів.}$$

Розширеною матрицею $A|B$ $(\overline{A})$ системи називають основну матрицю системи, яку доповнено стовпцем вільних членів

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n & \vec{b} \end{array}\right).$$

Форми запису СЛАР

Можна помітити, що (1), тобто

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases},$$

можна розглядати, як матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

або, використовуючи введені позначення, записати у вигляді

$$\boxed{A \cdot X = B} \text{ (або } A \cdot \vec{x} = \vec{b}), \tag{2}$$

який називають матричною формою запису.

Якщо ж СЛАР (1), тобто

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases},$$

переписати у вигляді

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

використовуючи представлення основної матриці системи A через стовпці, отримаємо векторну форму запису:

$$\boxed{x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}.} \qquad (3)$$

Розв'язки СЛАР

Означення 3

Розв'язком системи називають n значень невідомих $x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ \ldots,\ x_n = c_n$, при підстановці яких всі рівняння системи перетворюються у вірні рівності. Будь який розв'язок системи можна записати у вигляді вектора-стовпця

$$C = \left[\ \vec{c}\ \right] = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Означення 4

Систему рівнянь називають сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок, і несумісною, якщо вона не має жодного розв'язку.

Означення 5

Сумісну систему називають визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок, і невизначеною, якщо вона має більше одного розв'язка. В останньому випадку, кожен її розв'язок називають частинним розв'язком системи. Сукупність всіх частинних розв'язків називають загальним розв'язком системи.

Розв'язати систему — означає з'ясувати сумісна вона чи ні, і у разі сумісності, знайти її загальний розв'язок.

Означення 6

Дві системи називаються еквівалентними (рівносильними), якщо вони мають один і той самий загальний розв'язок. Іншими словами, системи еквівалентні, якщо кожний розв'язок однієї з них є розв'язком іншої, і навпаки.

Елементарні перетворення СЛАР

Елементарними перетвореннями СЛАР називають:

1. переставляння рівнянь;
2. множення обох частин одного з рівнянь на число, відмінне від нуля;
3. додавання до одного з рівнянь інше рівняння, помножене на деяке число.

Зауваження

Елементарні перетворення СЛАР приводять до відповідних елементарних перетворень рядків основної та розширеної матриць системи. І навпаки елементарні перетворення над рядками розширеної матриці системи приводять до відповідних елементарних перетворень СЛАР.

Зауваження

Еквівалентні системи отримуються, зокрема, за допомогою елементарних перетворень СЛАР.

2. Критерій сумісності СЛАР

Нехай дана довільна система m лінійних рівнянь з n невідомими (1), тобто

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} .$$

Теорема 1 (Кронекера-Капеллі)

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (1) *сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу основної матриці системи:* $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A|B)$.

Наслідок 1

Для сумісної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1)*:*

1. *якщо* $\mathrm{rang}\, A = \mathrm{rang}(A|B) = n$, *то система є визначеною (має єдиний розв'язок);*
2. *якщо* $\mathrm{rang}\, A = \mathrm{rang}(A|B) < n$, *то система є невизначеною (має безліч розв'язків).*

Схема дослідження СЛАР на сумісність та визначеність

Крок 1. Знайти $\operatorname{rang} A$ та $\operatorname{rang}(A|B)$.

- Якщо $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang}(A|B)$, то система не сумісна.
- Якщо $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B)$, то система сумісна, переходимо до 2-го кроку.

Крок 2.

- Якщо $\operatorname{rang} A = n$, то система визначена;
- Якщо $\operatorname{rang} A < n$, то система не визначена.

3. Методи розв'язання невироджених СЛАР

Нехай дана система n лінійних рівнянь з n невідомими (квадратна)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

або в матричній формі $AX = B$.
Основна матриця такої системи квадратна. Визначник такої матриці

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називають визначником системи. Якщо визначник системи не дорівнює нулю, то систему називають невиродженою. В цьому випадку система має єдиний розв'язок.
В цьому пункті ми будемо розглядати випадок, коли визначник системи $\Delta \neq 0$.

Знайдемо розв'язок даної системи використовуючи матричну форму запису СЛАР (2), тобто у вигляді

$$A \cdot X = B.$$

Оскільки ми розглядаємо квадратну невироджену СЛАР ($\det A \neq 0$), то до основної матриці системи A (квадратна), існує обернена матриця A^{-1}. Помноживши обидві частини рівняння $A \cdot X = B$ зліва на матрицю A^{-1}, будемо мати

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \;\Leftrightarrow\; \left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\Leftrightarrow\; E \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

звідки отримуємо розв'язок системи у наступному вигляді

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B.} \tag{4}$$

Пошук розв'язку системи за формулою (4) називають матричним методом розв'язання системи.

Приклад 1

Розв'язати матричним методом СЛАР $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

Розв'язання. Основна матриця системи та стовпець вільних членів мають вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо, чи є матриця A невиродженою:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 2 - \big(0 \cdot (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot 2\big) =$$

$$= 3 + 0 + 0 - (0 + 2 + 6) = 3 - 8 = -5 \neq 0.$$

Оскільки $\Delta = -5 \neq 0$, то система є невиродженою і має єдиний розв'язок, який будемо шукати матричним методом, тобто у вигляді $X = A^{-1} \cdot B$.
Для знаходження розв'язку слід обчислити спочатку обернену матрицю. Знайдемо всі алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

В результаті будемо мати $A^{-1} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

Знайдемо розв'язок

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$

II. Формули Крамера

Запишемо формулу (4) у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ x_2 = \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{cases}.$$

Але $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n$ є розкладом визначника

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

за елементами першого стовпця. Визначник Δ_1 отримується з визначника системи шляхом заміни першого стовпчика коефіцієнтів стовпчиком вільних членів.

Таким чином, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$.

Аналогічно, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$, де визначник Δ_k отримується з визначника системи шляхом заміни k-го стовпця стовпцем вільних членів.

Формули

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \ i = \overline{1,n}}$$

називають формулами Крамера.

Приклад 2

Розв'язати, за формулами Крамера, СЛАР з прикладу 1, тобто $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

Розв'язання. Основна матриця системи та стовпець вільних членів

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Визначник системи $\Delta = -5 \neq 0$ (див. приклад 1). Знайдемо

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) + (-2)\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 2\cdot 2 - \big(0\cdot(-1)\cdot 1 + (-2)\cdot 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 1\cdot 2\big) =$$

$$= -1 - 2 + 0 - (0 + 4 - 2) = -3 - 2 = -5.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1 - \big(0 \cdot 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot 1\big) =$$

$$= -6 + 0 + 0 - (0 + 1 + 3) = -6 - 4 = -10.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 - \big((-1) \cdot (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 2\big) =$$

$$= -3 + 0 - 2 - (0 - 2 + 12) = -5 - 10 = -15.$$

Використовуючи формули Крамера: $\boxed{x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}}$, отримаємо

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$

4. Метод Гаусса розв'язання довільних СЛАР

Метод Гаусса є найбільш універсальним методом розвязання СЛАР. Він дозволяє одночасно дослідити довільну СЛАР на сумісність та визначеність, і у разі сумісності системи, знайти її загальний розв'язок. Цей метод полягає у послідовному виключенні невідомих з рівнянь системи.

Розглянемо загальну СЛАР, що містить m рівнянь та n невідомих:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Прямий хід метода Гаусса

Випишемо розширену матрицю системи:

$$A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Вважатимемо, що елемент $a_{11} \neq 0$ (якщо $a_{11} = 0$, то першим в системі запишемо рівняння, в якому коефіцієнт при x_1 відмінний від нуля, і запишемо розширену матрицю отриманої системи).
Далі обнулимо всі елементи першого стовпця розширеної матриці, окрім першого (використовуючи елементарні перетворення над рядками матриці). Для цього:

- до елементів 2-го рядка додамо відповідні елементи 1-го рядка помножені на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$;
- до елементів 3-го рядка додамо відповідні елементи 1-го рядка помножені на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$;

Продовжуємо процедуру.

- до елементів m-го рядка додамо відповідні елементи 1-го рядка, помножені на $-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$.

Таким чином, розширена матриця системи $A|B$ еквівалентна наступній

$$A|B \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right),$$

де a'_{ij}, та b'_i, $i = \overline{2, m}$, $j = \overline{2, n}$ – нові коефіцієнти системи.
Далі переписуємо перший рядок без змін і повторюємо алгоритм для останніх $(m-1)$ рядків. Потім описаний алгоритм застосовуємо до останніх $(m-2)$ рядків, і т.д. поки не зведемо матрицю $A|B$ до східчастого вигляду.

Зауваження

Якщо в результаті елементарних перетворень у розширеної матриці утвориться принаймні один рядок вигляду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \widehat{b_l} \end{array}\right),$$

де $\widehat{b_l} \neq 0$. В цьому випадку $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang}(A|B)$ і СЛАР є несумісною.

Припустимо, що система сумісна, і ранг її основної матриці дорівнює r, тобто

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B) = r \leq n.$$

Тоді в результаті елементарних перетворень отримаємо східчасту матрицю (Не обмежуючи загальності можна вважати, що перші r стовпців містять крайні елементи отриманої східчастої матриці):

$$A|B \sim \left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \widetilde{a}_{22} & \dots & \widetilde{a}_{2r} & \widetilde{a}_{2,r+1} & \dots & \widetilde{a}_{2n} & \widetilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{a}_{rr} & \widetilde{a}_{r,r+1} & \dots & \widetilde{a}_{rn} & \widetilde{b}_r \end{array}\right), \tag{5}$$

де $\widetilde{a}_{ij}$, та $\widetilde{b}_i$, $i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1,n}$ — нові коефіцієнти системи.
Зауважимо, що оскільки $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B) = r$, то, за наших припущень, перші r рядків та r стовпців розширеної матриці утворюють базисний мінор.

Зауваження

Головним критерієм вибору базисного мінору отриманої східчастої матриці в методі Гаусса є те, що він **обов'язково** має бути від верхньої трикутної матриці. Тому, в загальному випадку, доцільно у якості стовпців такого мінору обирати ті, що містять крайні елементи кожного ненульового рядка.

Невідомі, коефіцієнти яких входять до базисного мінору, називаються головними або базисними (їх r штук), а інші $(n-r)$ невідомих називаються вільними.

Запишемо перетворену систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad\quad \widetilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \widetilde{a}_{2r}x_r + \widetilde{a}_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + \widetilde{a}_{2n}x_n = \widetilde{b}_2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \widetilde{a}_{rr}x_r + \widetilde{a}_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + \widetilde{a}_{rn}x_n = \widetilde{b}_r. \end{cases}$$

Зворотній хід метода Гаусса

Полягає у послідовному відшуканні всіх невідомих системи, підіймаючись від останнього рівняння системи до першого. А саме, залишаємо головні невідомі $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ системи у лівих частинах рівнянь, а вільні невідомі $(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n)$ переносимо у праві частини рівнянь системи:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r & = & b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \widetilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \widetilde{a}_{2r}x_r & = & \widetilde{b}_2 - \widetilde{a}_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - \widetilde{a}_{2n}x_n \\ \ldots & & \ldots\ldots \\ \widetilde{a}_{rr}x_r & = & \widetilde{b}_r - \widetilde{a}_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - \widetilde{a}_{rn}x_n. \end{array}\right.$$

Далі, з останнього рівняння виражаємо значення x_r через вільні невідомі $(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n)$. Підставляємо у передостаннє рівняння і знаходимо з нього значення x_{r-1} через вільні невідомі. Продовжуючи цей алгоритм знаходимо всі невідомі системи $x_r, x_{r-1}, \ldots, x_2, x_1$. Задаючи вільним невідомим довільні значення, отримаємо незліченну множину розв'язків системи.

Зауваження

Зазначимо особливості застосування методу Гаусса до невироджених квадратних СЛАР:

1. Прямий хід методу Гаусса виконується так само, але східчаста матриця (5) буде мати вигляд
$$A|B \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \widetilde{a}_{22} & \dots & \widetilde{a}_{2n} & \widetilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{a}_{nn} & \widetilde{b}_n \end{array}\right),$$
тобто основна матриця отриманої, еквівалентної системи, є верхньою трикутною.
2. Для невироджених квадратних СЛАР всі змінні будуть базисними (вільних змінних немає), а тому, при отриманні в кінці прямого ходу метода Гаусса основної матриці, у вигляді верхньої трикутної матриці, можна одразу переходити до зворотнього ходу.

Приклад 3

Розв'язати методом Гаусса СЛАР з прикладу 1, тобто $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$

Розв'язання. ***Прямий хід.*** Запишемо розширену матрицю даної системи та зведемо її до трикутного вигляду

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \leftarrow II\text{р.} - 3 \cdot I\text{р.} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \leftarrow III\text{р.} - 2 \cdot II\text{р.} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right)$$

Оскільки, в еквівалентній системі (в кінці прямого ходу), основна матриця є верхньою трикутною, то дана система є невиродженою, а значить сумісною і визначеною (має єдиний розв'язок), тому переходимо до зворотного ходу.

Зворотній хід. Виконаємо зворотній хід:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - 3x_3 = -7 \\ 5x_3 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - 3 \cdot 3 = -7 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 + 3 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}.$$

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3.$

Приклад 4

Розв'язати систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1; \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3; \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Розв'язання. ***Прямий хід.*** Зведемо розширену матрицю до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow II\text{р.} - 2\cdot I\text{р.} \\ \leftarrow III\text{р.} - 3\cdot I\text{р.} \\ \leftarrow IV\text{р.} - 7\cdot I\text{р.} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow III\text{р.} - II\text{р.} \\ \leftarrow IV\text{р.} - 2\cdot II\text{р.} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \end{array}\right).$$

Дослідимо на сумісність: $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A|B) = 2 < 4$. Отже система сумісна й невизначена.

Оберемо базисний мінор (враховуючи зауваження): $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Він має трикутний вигляд. Тоді базисними змінними будуть x_1, x_2, а інші змінні x_3, x_4 – вільними. Покладемо $x_3 = s$, $x_4 = t$.

Зворотній хід. Запишемо систему, яка відповідає отриманій східчастій матриці

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5s = 2; \\ x_2 + 13s - 5t = -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + x_2 + 5s; \\ x_2 = -3 - 13s + 5t; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + (-3 - 13s + 5t) + 5s; \\ x_2 = -3 - 13s + 5t; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - 8s + 5t; \\ x_2 = -3 - 13s + 5t. \end{cases}$$

Отримаємо загальний розв'язок системи:

$$x_1 = -1 - 8s + 5t;\ x_2 = -3 - 13s + 5t;\ x_3 = s;\ x_4 = t, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що частині розв'язки системи можна отримати, якщо надати вільним змінним конкретних значень. Наприклад, якщо покласти $s = t = 0$, тоді отримаємо частинний розв'язок системи $x_1 = -1,\ x_2 = -3,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$.

Відповідь. Представимо різні форми запису відповіді:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 8s + 5t; \\ x_2 = -3 - 13s + 5t; \\ x_3 = s; \\ x_4 = t, \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 8s + 5t \\ -3 - 13s + 5t \\ s \\ t \end{pmatrix} s, t \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Література

[1] Алєксєєва, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Федорова, Л. Б. *Математика в технічному університеті.* (Т. 1). К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018

[2] Булдигін, В.В., Алєксєєва, І.В., Гайдей, В.О., Диховичний, О.О., Коновалова, Н.Р., Федорова, Л.Б. *Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник.* — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с.

[3] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[4] *Конспект лекцій з аналітичної геометрії та лінійної алгебри для студентів технічних факультетів* // Уклад.: З.П. Ординська, І.В. Орловський, М.К. Руновська. – К.: НТУУ «КПІ», Електронне навчальне видання, свідоцтво № 030513. – 2013. – 131 с.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!