Linear algebra and analytical geometry for engineers

Lecture 6: Vectors and linear operations with them. Components of a vector

Lecturer: Igor Orlovskyi

Зміст

1. Основні поняття

Величини, які повністю визначаються своїм чисельним значенням, називають скалярними. Наприклад, площа, об'єм, температура, маса.
Інші величини, наприклад, сила, швидкість, прискорення, визначаються не тільки своїм чисельним значенням, але й напрямом. Такі величини називають векторними. Векторна величина геометрично зображується за допомогою вектора

Означення 1

Вектор – це напрямний прямолінійний відрізок, тобто відрізок, який має певну довжину і певний напрямок.

Якщо, A – початок вектора, а B – його кінець, тоді вектор позначають символом $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$.

Означення 2

Вектор $\overrightarrow{BA}$ (його початок в т. B, а кінець в т. A) називають протилежним вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначають $-\vec{a}$.

Означення 3

Довжиною або *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка від точки A до точки B, і позначають $|\overrightarrow{AB}|$.

Означення 4

Вектор, довжина якого дорівнює нулю, називають *нульовим вектором* і позначають $\vec{0}$. Нульовий вектор напряму не має.

Означення 5

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називають *одиничним вектором* і позначають $\vec{e}$. Одиничний вектор, напрям якого співпадає з напрямом вектора $\vec{a}$, називають *ортом* вектора $\vec{a}$ і позначають $\vec{a}^o$

Означення 6

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, називають ***колінеарними****, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих; записується $\vec{a}||\vec{b}$.*
Якщо колінеарні вектори мають один напрям, тоді їх називають ***співнаправленими*** *і позначають $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$; якщо вектори мають протилежні напрями, то їх називають* ***протилежно направленими*** *і позначають $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$*

Зауваження

Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору.

Означення 7

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, називають рівними, якщо вони колінеарні, однаково направлені і мають однакові довжини. Записують $\vec{a} = \vec{b}$.

З означення рівності векторів випливає, що вектор можна переносити паралельно самому собі, а початок вектора поміщати в будь яку точку O простору. Рівні вектори називають також вільними.

Означення 8

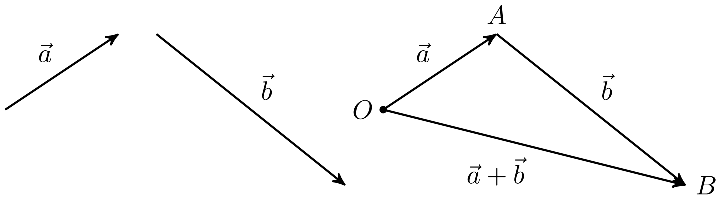
Три вектори називають компланарними, якщо вони лежать в одній площині або в паралельних площинах.

Якщо серед трьох векторів хоча б один нульовий або два вектори колінеарні, то такі вектори компланарні.

2. Лінійні операції над векторами

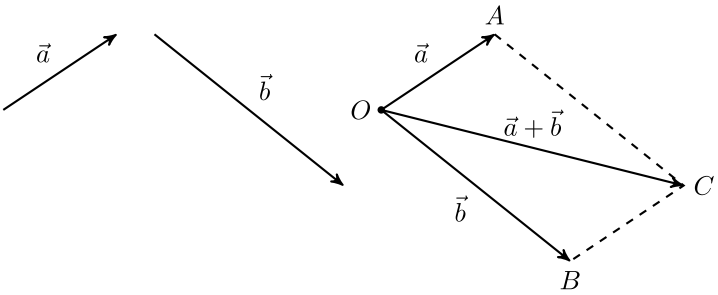
Під лінійними операціями над векторами розуміють операції додавання та віднімання веторів, а також множення вектора на число.

Нехай $\vec{a}$ та $\vec{b}$ — два довільних вектори. Візьмемо довільну точку O та побудуємо вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Відкладемо від точки A вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{OB}$, що з'єднує початок вектора $\vec{a}$ та кінець вектора $\vec{b}$, називають сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$: $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$.

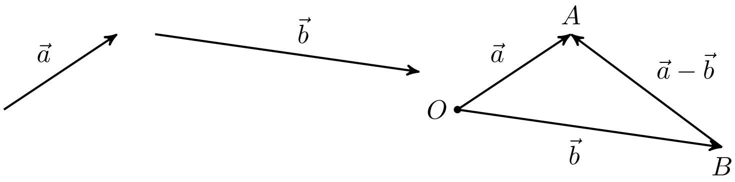


Це правило додавання векторів називають правилом трикутника.

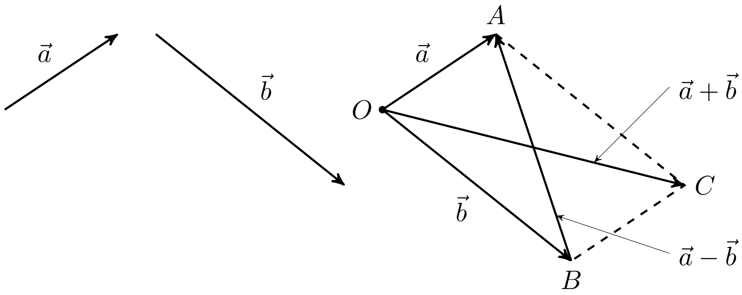
Суму двох векторів можна побудувати також за правилом паралелограма: нехай $\vec{a}$ та $\vec{b}$ — два довільних вектори. Візьмемо довільну т. O і побудуємо вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ та $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Побудуємо на цих векторах, як на сторонах, паралелограм. Вектор $\overrightarrow{OC}$, що є діагоналлю побудованого паралелограма з початком в початку відкладених векторів, називають сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$



Під різницею векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ розуміють вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ такий, що $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.



Зауважимо, що у паралелограмі, побудованому на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ одна направлена діагональ є сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, а інша — різницею.



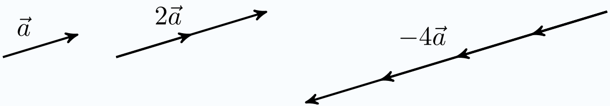
Означення 9

Добутком вектора $\vec{a}$ на скаляр (число) λ *називають вектор* $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, *який має наступні властивості:*

1. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, *якщо* $\lambda \geq 0$,
   $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, *якщо* $\lambda < 0$;
2. $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$.

Приклад 1

Для вектора $\vec{a}$ на малюнку зображено вектори $2\vec{a}$ та $-4\vec{a}$.



З означення добутку вектора на число випливають наступні властивості:

1. Якщо $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, тоді $\vec{b} || \vec{a}$. Навпаки, якщо $\vec{b} || \vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$), тоді знайдеться таке λ, що є вірною рівність $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$;
2. Завжди $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^o$, тобто кожен вектор дорівнює добутку його модуля на орт.

Лінійні операції над векторами мають наступні властивості:

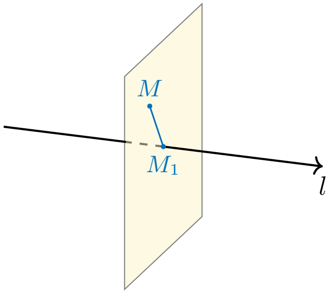
1. Комутативність додавання: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. Асоціативність додавання: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$;
3. Властивість нульового вектора: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
4. Властивість протилежного вектора: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;
5. Властивість одиниці: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$;
6. Дистрибутивність щодо додавання векторів: $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;
7. Дистрибутивність щодо додавання чисел: $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;
8. Асоціативніть множення вектора на число: $\alpha \cdot (\beta\vec{a}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{a}$.

3. Проекція вектора на вісь

Нехай у просторі задана вісь l, тобто напрямна пряма.

Означення 10

Проекцією т. M на вісь l називають основу M_1 перпендикуляру MM_1, який опущено з точки на вісь.



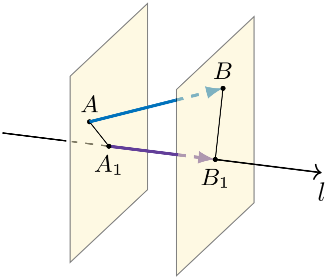
Зауважимо, що т.M_1 є точкою перетину осі l з площиною, яка проходить через т.M перпендикулярно осі.

Якщо т.M лежить на осі l, тоді проекція т.M на вісь співпадає з M.

Нехай $\overrightarrow{AB}$ – довільний вектор ($\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$). Позначимо через A_1 і B_1 проекції на вісь l відповідно початку A і кінця B вектору $\overrightarrow{AB}$ і розглянемо вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$.

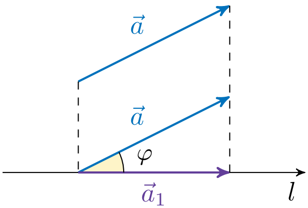
Означення 11

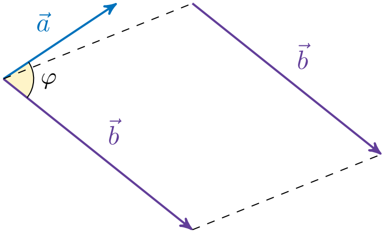
Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l називають додатне число $|\overrightarrow{A_1B_1}|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow l$ і від'ємне число $-|\overrightarrow{A_1B_1}|$, якщо вектор $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow l$. Якщо точки A_1 і B_1 співпадають ($\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{0}$), тоді проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ дорівнює нулю.



Проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l позначають так: $\text{пр}_l\, \overrightarrow{AB}$. Якщо $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ або $\overrightarrow{AB} \perp l$, тоді $\text{пр}_l\, \overrightarrow{AB} = 0$.

Кут φ між вектором $\vec{a}$ і віссю l (або кут між двома векторами) зображено нижче.





Очевидно, $0 \leq \varphi \leq \pi$

Основні властивості проекцій:

1. Проекція вектора $\vec{a}$ і вісь l дорівнює добутку модуля вектора $\vec{a}$ на косинус кута φ між вектором $\vec{a}$ та віссю l, тобто $\text{пр}_l\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$.

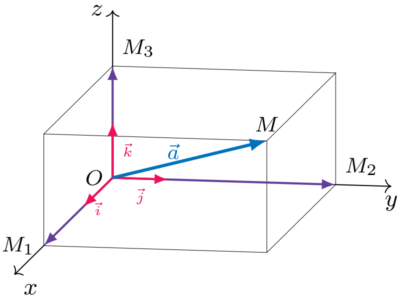
Наслідок 1 Проекція вектора на вісь додатня (від'ємна), якщо вектор утворює з віссю гострий (тупий) кут, і дорівнює нулю, якщо цей кут – прямий.

Наслідок 2 Проекції рівних векторів на одну і ту саму вісь є рівними між собою.

2. Проекція суми векторів на одну і ту ж саму вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю вісь, тобто $\text{пр}_l(\vec{a}+\vec{b}) = \text{пр}_l\,\vec{a} + \text{пр}_l\,\vec{b}$.
3. При множенні вектора $\vec{a}$ на число λ його проекція на вісь також множиться на це число, тобто $\text{пр}_l\,\lambda\vec{a} = \lambda\,\text{пр}_l\,\vec{a}$.

Таким чином, лінійні операції над векторами приводять до відповідних лінійних операцій над проекціями цих векторів.

4. Розклад вектора по ортах координатних осей. Модуль вектора. Напрямні косинуси



Розглянемо у просторі $\mathbb{R}^3$ прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Виділимо на осях Ox, Oy, Oz одиничні вектори (орти), які позначаються $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ відповідно. Виберемо довільний вектор $\vec{a}$ простору та перенесемо його початок у початок координат: $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$.

Знайдемо проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі. Для цього проведемо через кінець M вектора $\overrightarrow{OM}$ площини, паралельні координатним площинам. Точки перетину цих площин з координатними осями позначимо M_1, M_2 та M_3 відповідно. Розглянемо також, вектори $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$.

Отримаємо прямокутний паралелепіпед, однією з діагоналей якого є вектор $\overrightarrow{OM}$. Тоді $\text{пр}_{Ox}\,\vec{a} = |\overrightarrow{OM_1}|$, $\text{пр}_{Oy}\,\vec{a} = |\overrightarrow{OM_2}|$ та $\text{пр}_{Oz}\,\vec{a} = |\overrightarrow{OM_3}|$. Крім того,

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}.$$

Але

$$\overrightarrow{OM_1} = |\overrightarrow{OM_1}| \cdot \vec{i} = \text{пр}_{Ox}\, \vec{a} \cdot \vec{i},$$
$$\overrightarrow{OM_2} = |\overrightarrow{OM_2}| \cdot \vec{j} = \text{пр}_{Oy}\, \vec{a} \cdot \vec{j},$$
$$\overrightarrow{OM_3} = |\overrightarrow{OM_3}| \cdot \vec{k} = \text{пр}_{Oz}\, \vec{a} \cdot \vec{k}.$$

Позначимо $a_x = \text{пр}_{Ox}\, \vec{a}$, $a_y = \text{пр}_{Oy}\, \vec{a}$ та $a_z = \text{пр}_{Oz}\, \vec{a}$. Тоді

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \tag{1}$$

Рівність (1) називають розкладом вектора по ортах координатних осей, а числа a_x, a_y, a_z – координатами вектора. Таким чином, координати вектора є його проекції на відповідні координатні осі.

Рівність (1) часто записують у скороченій формі наступним чином: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$.

(Також використовується позначення у вигляді вектора-рядка $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$)

За відомими координатами вектора легко знайти його модуль. Оскільки вектор $\vec{a}$ є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда, то

$$|\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_3}|^2,$$

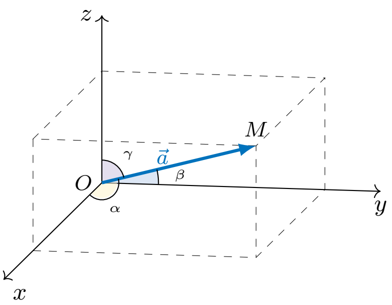
тобто

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2,$$

звідки

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Отже, модуль вектора дорівнює квадратному кореню з суми квадратів його проекцій на координатна осі.



Нехай кути вектора $\vec{a}$ з осями Ox, Oy та Oz відповідно дорівнюють α, β та γ. З властивості 1 проекції вектора на вісь, маємо

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha, \quad a_y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta, \quad a_z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma.$$

Звідси випливає, що

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називають напрямними косинусами вектора $\vec{a}$. Напрямні косинуси вектора задавольняють співвідношення:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Підкреслимо, що координатами орта $\vec{a}^0$ вектора $\vec{a}$ є напрямні косинуси вектора $\vec{a}$, тобто $\vec{a}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)^T$.

Зауважимо, що згідно з введеним поняттям координат геометричного вектора, орти осей Ox, Oy, Oz відповідно мають координати: $\vec{i} = (1,0,0)^T$, $\vec{j} = (0,1,0)^T$, $\vec{k} = (0,0,1)^T$.

5. Дії над векторами, заданими проекціями

Нехай вектори $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ та $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ задані своїми проекціями на осі координат Ox, Oy, Oz, або що теж саме

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}.$$

Лінійні операції над векторами зводяться до відповідних лінійних операцій над їх проекціями, тобто

1. $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$, або скорочено $\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$;
2. $\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}$, або скорочено $\lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix}$.

Рівність векторів. Два вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ та $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ рівні тоді і тільки тоді, коли

$$a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z.$$

Умова колінеарності векторів. Оскільки $\vec{a}||\vec{b}$, то існує деяке число λ таке, що $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, тобто

$$a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \lambda b_x\vec{i} + \lambda b_y\vec{j} + \lambda b_z\vec{k}.$$

Звідси отримаємо, що $a_x = \lambda b_x, \quad a_y = \lambda b_y, \quad a_z = \lambda b_z$, а отже

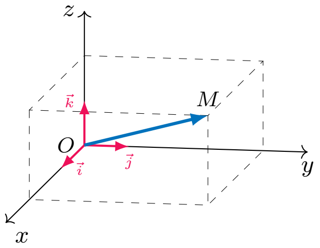
$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda.$$

Таким чином, проекції колінеарних векторів пропорційні. Обернене твердження також вірне: якщо вектори мають пропорційні координати, то вони колінеарні.

6. Координати точки та вектора

Координати точки

Розглянемо у просторі прямокутну систему координат $Oxyz$. Для будь-якої точки M простору координати вектора $\overrightarrow{OM}$ називають координатами точки M. Вектор $\overrightarrow{OM}$ називають радіус-вектором точки M та позначають $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$. Таким чином, координати точки — це координати її радіус-вектора $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Координати точки M записуються у вигляді: $M(x, y, z)$.

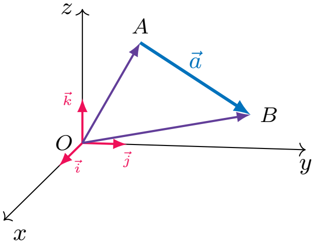
Координати вектора

Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо відомі координати точок $A(x_A, y_A, z_A)$ та $B(x_B, y_B, z_B)$. Маємо

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \left(x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}\right) - \left(x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}\right) =$$
$$= (x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j} + (z_B - z_A)\,\vec{k}.$$

Таким чином, координати вектора дорівнюють різниці відповідних координат його кінця та початку:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$



Література

[1] Алєксєєва, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Федорова, Л. Б. *Математика в технічному університеті*. (Т. 1). К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018

[2] Булдигін, В.В., Алєксєєва, І.В., Гайдей, В.О., Диховичний, О.О., Коновалова, Н.Р., Федорова, Л.Б. *Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник.* — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с.

[3] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[4] *Конспект лекцій з аналітичної геометрії та лінійної алгебри для студентів технічних факультетів* // Уклад.: З.П. Ординська, І.В. Орловський, М.К. Руновська. – К.: НТУУ «КПІ», Електронне навчальне видання, свідоцтво № 030513. – 2013. – 131 с.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!