Linear algebra and analytical geometry for engineers

Lecture 7: Linear dependence and independence of a system of vectors. The basis of the system of vectors

Lecturer: Igor Orlovskyi

Зміст

1. n–вимірний векторний простір

У попередній лекції розглядалися геометричні вектори на площині та у просторі. Для таких векторів було встановлено, що вектор однозначно задається своїми проекціями (координатами) у введеній системі координат. Таким чином, можна вважати, що вектор у тривимірному просторі – це впорядкований набір трьох чисел, записаних у вигляді стовпця:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}.$$

Узагальнимо поняття вектора.

Означення 1

Під n-вимірним вектором будемо розуміти впорядкований набір n чисел (координат), записаних у вигляді стовпця (або рядка):

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Означення 2

*Два n-вимірних вектори $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}^T$ та $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}^T$ називають **рівними** (позначають $\vec{a} = \vec{b}$), якщо рівні їх відповідні координати, тобто*

$$a_k = b_k, \ k = \overline{1, n}.$$

Означення 3

Сумою двох n-вимірних векторів $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}^T$ та $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}^T$ називають вектор $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}^T$ (позначають $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$), для якого

$$c_k = a_k + b_k, \ k = \overline{1, n}.$$

Означення 4

Добутком вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}^T$ на дійсне число λ називають вектор $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}^T$ (позначають $\vec{b} = \lambda\vec{a}$), для якого

$$b_k = \lambda a_k, \ k = \overline{1, n}.$$

Операції додавання векторів та добутку вектора на число називаються лінійними.

Лінійні операції над векторами мають наступні властивості:

1. Комутативність додавання: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. Асоціативність додавання: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;
3. Властивість нульового вектора: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
4. Властивість протилежного вектора: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;
5. Властивість одиниці: $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$;
6. Дистрибутивність щодо додавання векторів: $\alpha\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$;
7. Дистрибутивність щодо додавання чисел: $(\alpha+\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$;
8. Асоціативніть множення вектора на число: $\alpha\cdot(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\cdot\vec{a}$.

Означення 5

Вектор $\vec{b}$ *називають* *лінійною комбінацією векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$, *якщо існують числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, *що*

$$\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_m\vec{a}_m.$$

Означення 6

Множину всіх n*–вимірних векторів з дійсними координатами, в якій визначено операції додавання векторів і множення вектора на число, називають* n*–вимірним векторним простором. Позначають* $\mathbb{R}^n$.

2. Лінійна залежність і незалежність системи векторів

Нехай у деякому n-вимірному просторі із введеною системою координат задано вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$.

Означення 7

Систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ називають лінійно залежною, якщо існують такі дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, хоча б одне з яких не дорівнює нулю, що

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m\vec{a}_m = \vec{0}. \tag{1}$$

Якщо рівність (1) виконується тільки при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$, то систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ називають лінійно незалежною.

Властивості лінійної залежності і незалежності векторів

1. Якщо серед векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ є нульовий вектор, то система векторів є лінійно залежною.

Доведення

Нехай, не втрачаючи загальності, вектор $\vec{a}_m = \vec{0}$. Тоді покладемо $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{m-1} = 0$, $\lambda_m = 1 \neq 0$. В результаті отримаємо, що

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_{m-1}\vec{a}_{m-1} + \lambda_m \cdot \vec{a}_m =$$
$$= 0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{a}_{m-1} + 1 \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Отже, вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ – лінійно залежні.

2. Якщо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$, $(k \leq m)$ системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ є лінійно залежними, то і всі вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ цієї системи є лінійно залежними.

Доведення

Нехай вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ — лінійно залежні. Тоді, за означенням, існують такі дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, серед яких є принаймні одне число не рівне нулю, що

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0}.$$

Покладемо $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \ldots = \lambda_m = 0$. Отримаємо, що

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k + 0\vec{a}_{k+1} + 0\vec{a}_{k+2} + \ldots + 0\vec{a}_m = \vec{0}.$$

Таким чином, система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ — лінійно залежна.

2'. Якщо система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ є лінійно незалежною, тоді будь яка її підсистема також буде лінійно незалежною.

Теорема 1

Для того, щоб вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ були лінійно залежними, необхідно і достатньо, щоб один з них був лінійною комбінацією інших векторів системи.

Доведення

Необхідність. Нехай вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ – лінійно залежні. Тоді за означенням існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, серед яких хоча б одне не рівне нулю, що

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_m\vec{a}_m = \vec{0}.$$

Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $\lambda_m \neq 0$. Тоді

$$\vec{a}_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\vec{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\vec{a}_{m-1} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_{m-1}\vec{a}_{m-1},$$

де $\alpha_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda_m}$, $k = \overline{1, m-1}$. Тобто вектор $\vec{a}_m$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{m-1}$.

Достатність. Нехай вектор $\vec{a}_m$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{m-1}$, тобто

$$\vec{a}_m = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_{m-1}\vec{a}_{m-1},$$

для деяких дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$. Але тоді

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_{m-1}\vec{a}_{m-1} - \vec{a}_m = \vec{0},$$

звідки випливає, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ – лінійно залежні.

Наслідок 1

Система, що складається з одного вектора, лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли цей вектор — нульовий.

Доведення

Необхідність. Нехай система з одного вектора $\vec{a}$ лінійно залежна. Тоді для деякого $\lambda \neq 0$ $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$. З останнього випливає, що $\vec{a} = \vec{0}$.

Достатність. Якщо $\vec{a} = \vec{0}$, тоді за властивістю 1 система є лінійно залежна.

Наслідок 2

Система двох векторів є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли ці вектори – колінеарні.

Доведення

Безпосередньо випливає з теореми 1, оскільки два ненульових вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні $(\vec{a}||\vec{b})$ тоді і тільки тоді, коли існує деяке дійсне число $\lambda \neq 0$ таке, що $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

Наслідок 3

Система трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ *та* $\vec{c}$ *є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли ці вектори компланарні. При цьому, якщо два з них неколінеарні (наприклад,* $\vec{a}$, $\vec{b}$*), то третій вектор (*$\vec{c}$*) буде їх лінійною комбінацією, причому таке представлення буде єдиним, тобто* $\exists!\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *такі, що* $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Доведення

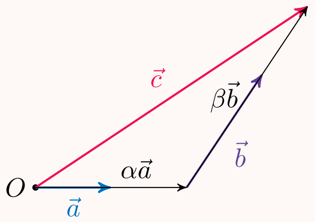
Необхідність. Нехай три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ — лінійно залежні. Тоді

$$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = \vec{0},$$

для деяких дійсних чисел λ_1, λ_2, λ_3, серед яких хоча б одне не рівне нулю. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $\lambda_3 \neq 0$. Звідси випливає, що

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b},$$

де $\alpha = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}$, $\beta = -\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$. Отже, вектор $\vec{c}$ розкладається за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто можна побудувати трикутник (див. Рис.), сторони якого будуть паралельні векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$, а тому ці вектори компланарні.

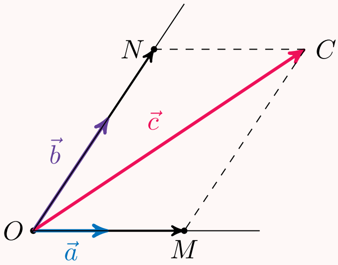


Достатність. Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ компланарні. Якщо серед трьох векторів є принаймні два колінеарних, то з наслідку 2 та властивості ❷ випливає випливає, що всі три вектори є лінійно залежними. Тому будемо припускати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ не є попарно колінеарними.

Помістимо початки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ у спільну точку O площини.

Проведемо через кінець C вектора $\vec{c}$ пряму, паралельну вектору $\vec{b}$, до перетину в точці M з прямою, на якій лежить вектор $\vec{a}$. Також, проведемо через C пряму, паралельну вектору $\vec{a}$, до перетину в точці N з прямою, на якій лежить вектор $\vec{b}$. Тоді, за правилом паралелограма, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$, причому вектори $\overrightarrow{OM} || \vec{a}$ і $\overrightarrow{ON} || \vec{b}$. Таким чином, існують числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ такі, що $\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{a}$ и $\overrightarrow{ON} = \beta\vec{b}$. Отже,

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b},$$



тобто вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ — лінійно залежні.

Наслідок 4

Будь-які чотири вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ та $\vec{d}$ простору $\mathbb{R}^3$ є лінійно залежними. При цьому, якщо три з них некомпланарні (наприклад, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$), то четвертий вектор ($\vec{d}$) буде їх лінійною комбінацією, причому таке представлення буде єдиним, тобто $\exists!\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ такі, що

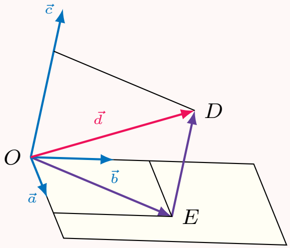
$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Доведення

Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – некомпланарні. Інакше за наслідком 3 вони є лінійно залежними, а значить і всі чотири вектори є лінійно залежними.

Помістимо початки всіх векторів у спільну точку O простору та проведемо через кінець D вектора $\vec{d}$ пряму, паралельну вектору $\vec{c}$, до перетину у точці E з площиною, в якій лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Тоді $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED}$, причому $\overrightarrow{OE}$ компланарний векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а $\overrightarrow{ED}$ колінеарний вектору $\vec{c}$. Але згідно з наслідком 3 вектор $\overrightarrow{OE}$ розкладається за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто існують такі $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, що $\overrightarrow{OE} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Крім того, в силу колінеарності $\overrightarrow{ED}$ та $\vec{c}$ існує $\gamma \in \mathbb{R}$ таке, що $\overrightarrow{ED} = \gamma\vec{c}$.



Таким чином,

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

тобто вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ – лінійно залежні.

3. Базис системи векторів

Означення 8

Базою або *базисом* системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ називають таку її підсистему $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ $(k \leq m)$, що

1. вектори цієї підсистеми є лінійно незалежними;
2. будь-який інший вектор системи є лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$, тобто для всіх $k+1 \leq l \leq m$,

$$\vec{a}_l = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{a}_k, \tag{2}$$

   де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – деякі дійсні числа.

При цьому рівність (2) називають *розкладом вектора* $\vec{a}_l$ *за базисом* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$, числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – *координатами вектора* $\vec{a}_l$ у цьому базисі.

Теорема 2

Система m *векторів*

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \vec{a}_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

містить базис, що складається з k *векторів системи* ($k \leq m$), *якщо ранг матриці, стовпцями якої є координати векторів системи,*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

дорівнює k. *При цьому до базиса входять ті вектори системи, координати яких утворюють базисний мінор матриці* A.

Приклад 1

З'ясувати, які з векторів системи: $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}^T$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix}3 & 6 & 0 & 0\end{pmatrix}^T$ утворюють базис.

Розв'язання. Складемо матрицю з координат векторів системи і зведемо її до східчастого вигляду (на практиці зручніше знаходити ранг матриці транспонованої до матриці з теореми 2):

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 6 & 0 & 0\end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow II\text{р.} - I\text{р.} \\ \leftarrow III\text{р.} - 3 \cdot I\text{р.}\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Ранг матриці $r(A) = 2$, а отже з трьох заданих векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ базис утворюють вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, а вектор $\vec{a}_3$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$. Легко бачити, що

$$\vec{a}_3 = 3 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2,$$

тобто $\alpha = 3$ і $\beta = 0$.

Наслідок 5

Система n *векторів*

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

є лінійно незалежною, тоді і тільки тоді, коли визначник, стовпцями якого є координати векторів системи, не дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Наслідок 6

Будь яка система, що складається з n лінійно незалежних n-вимірних векторів буде утворювати базис у векторному просторі $\mathbb{R}^n$.

З наслідків 1–4 випливає, що

- серед всіх векторів, заданих у одновимірному просторі ($\mathbb{R}^1$ або на прямій), базис складається з одного ненульового вектора;
- серед всіх векторів, заданих на площині ($\mathbb{R}^2$), базис складається з двох неколінеарних векторів;
- серед всіх векторів, заданих у тривимірному просторі ($\mathbb{R}^3$), базис складається з трьох некомпланарних векторів.

Серед найрізноманітніших базисів особливу роль відіграють ті, у яких базисні вектори взаємно перпендикулярні і мають одиничну довжину. Такі базиси називають ортонормованими. На площині – це система двох векторів, яку зазвичай позначають через $\vec{i}$, $\vec{j}$. У просторі $\mathbb{R}^3$ – це система трьох векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Приклад 2

Переконатися, що система векторів $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ утворює базис у множині всіх векторів простору, і знайти розклад вектора $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ у цьому базисі.

Розв'язання. Перевіримо чи утворюють вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ базис. Для цього покажемо, що рівняння $\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c} = \vec{0}$ має єдиний (нульовий) розв'язок. Перепишемо рівняння, підставивши в нього вектори:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Оскільки отримана система є однорідною, вона завжди сумісна і має нульовий розв'язок $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, то нам достатньо показати, що визначник системи $\Delta \neq 0$ (тоді система буде мати єдиний розв'язок).

Покажемо це

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 0\cdot 3 + (-3)\cdot 2\cdot 1 - \big((-3)\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 0\cdot 1\big) =$$

$$= 4 + 0 - 6 - (-18 + 12 + 0) = -2 + 6 = 4 \neq 0.$$

Отже система має лише нульовий розв'язок, а значить вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно незалежні і у просторі $\mathbb{R}^3$ утворюють базис.
Зауважимо, що при доведенні використовувалося означення лінійної незалежності веторів та властивості базису в $\mathbb{R}^3$ (базис складається з 3-х лінійно незалежних (некомпланарних) векторів). Помітимо, що перевірка умови $\Delta \neq 0$ також буде виникати, якщо застосовувати результат наслідку 5. Про ще один спосіб перевірки буде зазначено на наступній лекції.

Перейдемо до знаходження розкладу вектора $\vec{d}$ у базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Для цього потрібно знайти такі числа α, β, γ, що буде виконуватися рівність $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Підставляючи в неї наші вектори, будемо мати

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta - 3\gamma = -3, \\ 2\alpha + 2\beta = 4, \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma = 10. \end{cases}$$

Оскільки дана система має визначник $\Delta = 4 \neq 0$, який ми знайшли раніше, то вона має єдиний розв'язок. Знайдемо її методом Гаусса.
Прямий хід. Запишемо розширену матрицю даної системи та зведемо її до трикутного вигляду

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow II\text{р.} - 2\cdot I\text{р.} \\ \leftarrow III\text{р.} - 3\cdot I\text{р.} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & 6 & 10 \\ 0 & -8 & 11 & 19 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow III\text{р.} - 2\cdot II\text{р.} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow -\frac{1}{2}\cdot II\text{р.} \\ \leftarrow -III\text{р.} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Зворотній хід. Виконаємо зворотній хід:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta - 3\gamma = -3 \\ 2\beta - 3\gamma = -5 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta - 3\gamma = -3 \\ 2\beta - 3 = -5 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 3 - 3 = -3 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

Відповідь: $\vec{d} = 3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Література

[1] Алєксєєва, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Федорова, Л. Б. *Математика в технічному університеті.* (Т. 1). К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018

[2] Булдигін, В.В., Алєксєєва, І.В., Гайдей, В.О., Диховичний, О.О., Коновалова, Н.Р., Федорова, Л.Б. *Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник.* — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с.

[3] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, - К.: Вища школа, 1998.

[4] *Конспект лекцій з аналітичної геометрії та лінійної алгебри для студентів технічних факультетів* // Уклад.: З.П. Ординська, І.В. Орловський, М.К. Руновська. - К.: НТУУ «КПІ», Електронне навчальне видання, свідоцтво № 030513. – 2013. – 131 с.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!