Linear algebra and analytical geometry for engineers

Lecture 8: Scalar product. Vector product. Mixed product.

Lecturer: Igor Orlovskyi

Зміст

1. Скалярний добуток векторів, його властивості та застосування

Означення 1

Скалярним добутком двох ненульових векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними (позначається $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $(\vec{a},\vec{b})$), тобто

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi,$$

де $\varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

З властивостей проекції вектора на вісь випливає, що $|\vec{a}|\cdot\cos\varphi = \text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}$, і $|\vec{b}|\cdot\cos\varphi = \text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b}$, а отже

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\cdot\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b},$$

тобто скалярний добуток двох векторів дорівнює модулю одного з них, помноженому на проекцію іншого вектора на вісь співнаправлену з першим вектором.

Властивості скалярного добутку

❶ Комутативність скалярного добутку: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

Доведення

Дійсно, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\widehat{\vec{b}, \vec{a}}) = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

❷ Асоціативність скалярного добутку відносно числового множника: $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Доведення

$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}) = \lambda \cdot |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \lambda \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

③ Дистрибутивність скалярного добутку: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Доведення

Дійсно, $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b} + |\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

④ $\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Доведення

Дійсно, $\vec{a}^{\,2} = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0^\circ = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$.

Зокрема, з властивості ❹ випливає, що для будь-якого вектора $\vec{a}$ скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$. При цьому, $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}=\vec{0}$.

Крім того, з властивості ❹ випливає, що для одиничних векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ортонормованого базису

$$\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1.$$

⑤ Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні, тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Доведення

Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Необхідність. Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ перпендикулярні, тобто $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Достатність. Нехай $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Оскільки $|\vec{a}| \neq 0$, і $|\vec{b}| \neq 0$, то $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Звідси $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{2}$ або $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{3\pi}{2}$, тобто $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Зокрема, з властивості ⑤ випливає, що

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

⑥ Нерівність Коші–Буняковського для скалярного добутку:

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|.$$

Доведення

$|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\cos\varphi| \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|.$

Скалярний добуток векторів, заданих координатами у просторі $\mathbb{R}^3$

Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані своїми координатами, тобто $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, і $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Тоді

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = \\ &= a_x\cdot b_x\cdot\vec{i}\cdot\vec{i} + a_x\cdot b_y\cdot\vec{i}\cdot\vec{j} + a_x\cdot b_z\cdot\vec{i}\cdot\vec{k} + \\ &\quad + a_y\cdot b_x\cdot\vec{j}\cdot\vec{i} + a_y\cdot b_y\cdot\vec{j}\cdot\vec{j} + a_y\cdot b_z\cdot\vec{j}\cdot\vec{k} + \\ &\qquad + a_z\cdot b_x\cdot\vec{k}\cdot\vec{i} + a_z\cdot b_y\cdot\vec{k}\cdot\vec{j} + a_z\cdot b_z\cdot\vec{k}\cdot\vec{k} = \\ &= a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z.\end{aligned}$$

Отже,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z,$$

тобто скалярний добуток двох векторів, заданих своїми координатами, дорівнює сумі добутків відповідних координат цих векторів.

Деякі застосування скалярного добутку векторів

I. Кут між векторами

Нехай $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$ та $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)^T$ – два ненульових вектора. Тоді

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Зокрема, звідси випливає, що

$$\vec{a} \perp \vec{b} \;\Leftrightarrow\; \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0.$$

II. Проекція вектора на вектор

Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обчислюється за формулою:

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

III. Робота сталої сили

Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно з точки A в точку B під дією сталої сили $\vec{F}$, що утворює кут φ з напрямком $\overrightarrow{AB}$. З фізики відомо, що робота $\mathcal{A}$ сили $\vec{F}$ при переміщенні $\overrightarrow{AB}$ дорівнює

$$\mathcal{A} = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\varphi = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Приклад 1

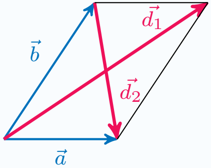
Обчислити довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 4\vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $\varphi = (\widehat{\vec{p}, \vec{q}}) = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. З властивостей додавання й віднімання векторів випливає, що діагоналі паралелограма можна виразити через вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$ наступним чином

$$\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b} = 3\vec{p} + 3\vec{q}, \quad \vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b} = \vec{p} - 5\vec{q}.$$

Тоді,

$$|\vec{d}_1| = 3|\vec{p} + \vec{q}| = 3\sqrt{(\vec{p} + \vec{q}) \cdot (\vec{p} + \vec{q})} = 3\sqrt{\vec{p}^{\,2} + 2\vec{p} \cdot \vec{q} + \vec{q}^{\,2}} =$$
$$= 3\sqrt{|\vec{p}|^2 + 2|\vec{p}||\vec{q}|\cos\varphi + |\vec{q}|^2} = 3\sqrt{7}.$$



Аналогічно,

$$|\vec{d}_2| = |\vec{p} - 5\vec{q}| = \sqrt{|\vec{p}|^2 - 10|\vec{p}||\vec{q}|\cos\varphi + 25|\vec{q}|^2} = \sqrt{91}.$$

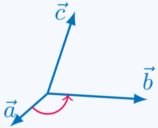
Відповідь: $|\vec{d}_1| = 3\sqrt{7}$, $|\vec{d}_2| = \sqrt{91}$.

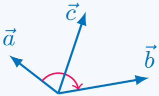
2. Векторний добуток векторів, його властивості та застосування

Означення 2

Відкладемо три некомпланарних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ *та* $\vec{c}$ *від спільного початку.*

Кажуть, що три впорядковані вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ *та* $\vec{c}$ *утворюють праву трійку векторів, якщо з кінця третього вектора* $\vec{c}$ *найкоротший перехід від вектора* $\vec{a}$ *до вектора* $\vec{b}$ *здійснюється проти годинникової стрілки,*





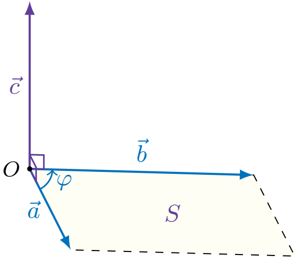
і ліву трійку, якщо найкоротший перехід від вектора $\vec{a}$ *до вектора* $\vec{b}$ *здійснюється за годинниковою стрілкою.*

Впорядковану трійку векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ будемо позначати у фігурних дужках: $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

Означення 3

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (позначається $\vec{a}\times\vec{b}$ або $[\vec{a},\vec{b}]$) називається вектор $\vec{c}$ такий, що

1. *$\vec{c}$ перепендикулярний векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$ ($\vec{c}\perp\vec{a}$ і $\vec{c}\perp\vec{b}$);*
2. *$|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$, де $\varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}})$, тобто вектор $\vec{c}$ має довжину, що дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, як на сторонах;*
3. *вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів.*

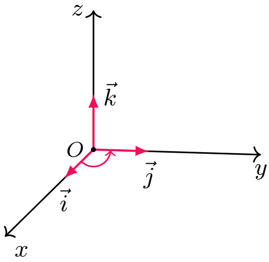


З означення векторного добутку безпосередньо випливають наступні співвідношення для ортів координатних осей:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

Це випливає з того, що

- вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$ утворюють праву трійку векторів;
- $\vec{k} \perp \vec{i}$, $\vec{k} \perp \vec{j}$ і $\vec{i} \perp \vec{j}$;
- $|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 1,$
  $|\vec{j} \times \vec{k}| = |\vec{j}| \cdot |\vec{k}| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 1,$
  $|\vec{k} \times \vec{i}| = |\vec{k}| \cdot |\vec{i}| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 1.$

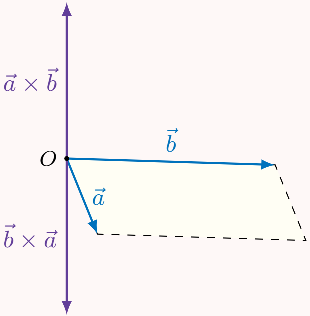


Властивості векторного добутку

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Доведення

Очевидно, що вектори $\vec{a} \times \vec{b}$ і $\vec{b} \times \vec{a}$ колінеарні та мають однакову довжину. Але трійки векторів $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ та $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{b} \times \vec{a}\}$ є протилежними. Одна з них є правою, а інша лівою. Таким чином, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.



② $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$.

Доведення

Доведемо, що $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$. Рівність $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$ доводиться аналогічно. Розглянемо випадок $\lambda > 0$. Вектор $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Вектор $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$ також перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Звідси випливає, що вектори $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ та $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$ колінеарні. Крім того, зрозуміло, що вони співнаправлені, оскільки $\lambda > 0$. Нарешті, ці вектори мають однакові довжини, оскільки

$$|\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})| = \lambda \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| = \lambda \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}),$$

і

$$|(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda \vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\lambda \vec{a}, \vec{b}}) = \lambda \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}).$$

Отже, ми довели, що для $\lambda > 0$, $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$.
Для $\lambda < 0$ доведення аналогічне.

③ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Доведення

Необхідність. Якщо $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$, то кут φ між векторами $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$ або дорівнює 0 або дорівнює π. Тоді $\sin\varphi = 0$. Таким чином, $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot 0 = 0$, а отже $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$.

Достатність. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що вектори $\overrightarrow{a}$ та $\overrightarrow{b}$ ненульові. Якщо $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, то $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \sin\varphi = 0$. Тому з останнього співвідношення випливає, що $\sin\varphi = 0$, звідки $\varphi = 0$ або $\varphi = \pi$. Таким чином, $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$.

④ $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Приймемо цю властивість без доведення.

Векторний добуток векторів, заданих координатами у просторі $\mathbb{R}^3$

Нехай вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані своїми координатами, тобто $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, і $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Тоді

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = \\
&= a_x \cdot b_x \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x \cdot b_y \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x \cdot b_z \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + \\
&\quad + a_y \cdot b_x \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y \cdot b_y \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y \cdot b_z \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + \\
&\qquad + a_z \cdot b_x \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z \cdot b_y \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + a_z \cdot b_z \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) = \\
&= \vec{0} + a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} - a_x \cdot b_z \cdot \vec{j} - a_y \cdot b_x \cdot \vec{k} + \vec{0} + a_y \cdot b_z \cdot \vec{i} + a_z \cdot b_x \cdot \vec{j} - a_z \cdot b_y \cdot \vec{i} + \vec{0} = \\
&= (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \cdot)\vec{i} - (a_x \cdot b_z - a_z \cdot b_x) \cdot \vec{j} + (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \cdot \vec{k} = \\
&= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.
\end{aligned}$$

Таким чином,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Цю рівність зручно записувати у наступній операторній формі, яка легко запам'ятовується:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Деякі застосування векторного добутку векторів

I. Встановлення колінеарності векторів

З властивості ❸ випливає, що $\vec{a} \parallel \vec{b}$ тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, тобто

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

II. Знаходження площ паралелограма та трикутника, побудованих на двох векторах

Згідно з означенням векторного добутку для двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, модуль їх векторного добутку дорівнює $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, тобто

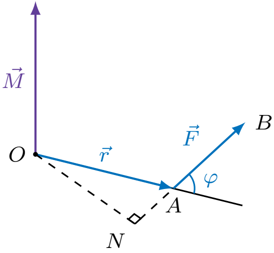
$$S_{\text{паралелограма}} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Зокрема, звідси випливає, що

$$S_{\text{трикутника}} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|.$$

III. Визначення момента сили відносно точки

Нехай у точці A прикладена деяка сила $\vec{F} = \overrightarrow{AB}$, і нехай O — деяка точка простору. З фізики відомо, що моментом сили $\vec{F}$ відносно точки O називається вектор $\vec{M}$ (див. Рис.), який проходить через точку O і задовольняє такі умови:

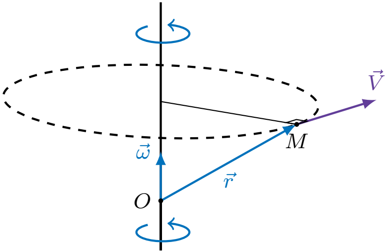


1. перпендикулярний площині, у якій лежать точки O, A, B;
2. чисельно дорівнює добутку сили на плече, тобто $|\vec{M}| = |\vec{F}| \cdot |ON| = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\varphi = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot \sin(\widehat{\vec{F}, \overrightarrow{OA}})$;
3. утворює праву трійку з векторами $\overrightarrow{OA}$ та $\overrightarrow{AB}$.

Таким чином, $\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$.

IV. Знаходження лінійної швидкості обертання

Швидкість $\vec{V}$ точки M твердого тіла, що обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо нерухомої осі, визначається формулою Ейлера $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, де $\vec{r} = \vec{OM}$, а O — деяка нерухома точка осі (див. Рис.).



Подвійний векторний добуток

Означення 4

*Нехай дано три довільних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$. Розглянемо векторний добуток векторів $\vec{b}$ та $\vec{c}$: $\vec{b} \times \vec{c}$. Векторний добуток вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} \times \vec{c}$ (позначається: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$) називається **подвійним векториним добутком** векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$.*

Для довільних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ подвійний векторний добуток $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ є вектором, компланарним з векторами $\vec{b}$ та $\vec{c}$ і знаходиться за формулою:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

3. Мішаний добуток векторів, його властивості та застосування

Означення 5

Нехай дано три довільних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$. Розглянемо векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$: $\vec{a} \times \vec{b}$. Скалярний добуток вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ називається векторно-скалярним або мішаним добутком векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Мішаний добуток позначається: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ або $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, або $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

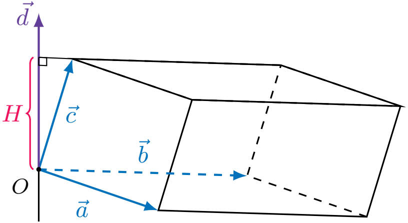
З означення зрозуміло, що мішаний добуток трьох векторів – це число.

Геометричний зміст мішаного добутку

З'ясуємо геометричний зміст мішаного добутку. Побудуємо паралелепіпед, ребрами якого є задані вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$. Побудуємо також вектор $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$. Тоді

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \cdot \text{пр}_{\vec{d}}\vec{c},$$

причому $|\vec{d}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = S$, де S – площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Крім того, $\text{пр}_{\vec{d}}\vec{c} = H$ для правої трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$, і $\text{пр}_{\vec{d}}\vec{c} = -H$ для лівої трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$, де H – висота паралелепіпеда.

Таким чином,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = S \cdot (\pm H),$$

тобто

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \pm V,$$

де V — об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Отже, **мішаний добуток трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, взятого зі знаком "$+$", якщо вектори утворюють праву трійку, і зі знаком "$-$", якщо вектори утворюють ліву трійку**.

Зауважимо, що з трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ можна скласти шість впорядкованих трійок, при цьому три трійки утворюють ліву трійку і три праву. А саме, трійки $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$, $\{\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\}$, $\{\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\}$ є однаково орієнтованими, тобто одночасно утворюють праву трійку або ліву. Інші трійки, а саме $\{\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\}$, $\{\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\}$, $\{\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\}$ також є однаково орієнтованими, тобто одночасно утворюють праву або ліву трійку.

Властивості мішаного добутку

① Мішаний добуток не змінюється при циклічній перестановці множників, тобто

$$(\vec{a}\times\ \vec{b})\cdot\ \vec{c}=(\vec{b}\times\ \vec{c})\cdot\ \vec{a}=(\vec{c}\times\ \vec{a})\cdot\ \vec{b}.$$

Доведення

Властивість ❶ очевидна, оскільки в цьому випадку не змінюється ні об'єм паралелепіпеда, ні орієнтація векторів в просторі (знак).

② Мішаний добуток не змінюється при перестановці місцями знаків векторного і скалярного множення, тобто

$$(\vec{a}\times\ \vec{b})\cdot\ \vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Доведення

Випливає з властивості ❶ та того, що для скалярного добутку двох векторів виконується властивість комутативності.

③ Мішаний добуток змінює знак при перестановці місцями будь-яких двох векторів, тобто

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b},$$
$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c},$$
$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}.$$

Доведення

Випливає з властивості ❶ та того, що при перестановці множників у векторному добутку цей добуток змінює знак на протилежний (див. властивість ❶ векторного добутку).

4. Мішаний добуток трьох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори компланарні.

Доведення

Необхідність. Нехай $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$. Припустимо, що $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – не компланарні. Тоді можна побудувати паралелепіпед на цих векторах з об'ємом, не рівним нулю. А це протирічить умові бо об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, дорівнює мішаному добутку, тобто нулю.

Достатність. Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – компланарні, тобто лежать в одній площині. Тоді вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярний вектору $\vec{c}$, а отже $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$.

Мішаний добуток векторів, заданих координатами у просторі $\mathbb{R}^3$

Нехай вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ задані своїми координатами, тобто $\vec{a} = a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$. Тоді

$$(\vec{a} \times \ \vec{b}) \cdot \ \vec{c} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} \right) \cdot (c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

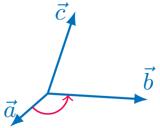
Отже,

$$(\vec{a} \times \ \vec{b}) \cdot \ \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$

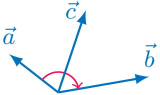
тобто мішаний добуток трьох векторів дорівнює значенню визначника, складеного з координат векторів зі збереженням порядка.

Деякі застосування мішаного добутку векторів

I. Визначення орієнтації векторів у просторі



Для трьох заданих векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо $(\vec{a}\times\ \vec{b})\cdot\ \vec{c} > 0$, то ці вектори утворюють праву трійку.



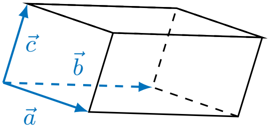
Якщо $(\vec{a}\times\ \vec{b})\cdot\ \vec{c} < 0$, то ці вектори утворюють ліву трійку.

II. Встановлення компланарності векторів

Три ненульових вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = 0$, тобто

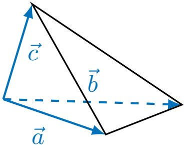
$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

III. Знаходження об'ємів паралелепіпеда та трикутної піраміди



Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$V_{\text{паралелепіпеда}} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$



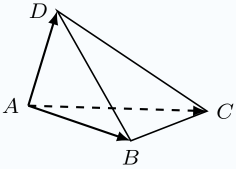
Об'єм трикутної піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Приклад 2

Знайти площу основи ABC, о'бєм та довжину висоти трикутної піраміди, вершинами якої є точки $A(1,2,3)$, $B(0,-1,1)$, $C(2,5,2)$, $D(3,0,-2)$.

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок. Обчислимо координати векторів



$$\overrightarrow{AB} = -\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k},\ \overrightarrow{AC} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k},\ \overrightarrow{AD} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Для знаходження площі ΔABC, порахуємо

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 9 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} - 0 \cdot \vec{k}.$$

Тоді

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{81+9} = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

Перейдемо до знаходження об'єму піраміди

$$= \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|\left(9\cdot\vec{i}-3\cdot\vec{j}-0\cdot\vec{k}\right)\cdot\left(2\vec{i}-2\vec{j}-5\vec{k}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{6}|9\cdot 2+(-3)\cdot(-2)+0\cdot(-5)| = \frac{1}{6}\cdot 24 = 4.$$

Для обчислення висоти H скористаємося формулою об'єма піраміди

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot H \;\Leftrightarrow\; H = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}}.$$

Підставляючи знайдені значення V_{ABCD} та S_{ABC} в отриману формулу будемо мати

$$H = \frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{3\cdot 4}{\frac{3\sqrt{10}}{2}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$$

Відповідь: $S_{ABC} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$, $V_{ABCD} = 4$, $H = \frac{4\sqrt{10}}{5}$.

Література

[1] Алексєєва, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Федорова, Л. Б. *Математика в технічному університеті.* (Т. 1). К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018

[2] Булдигін, В.В., Алексєєва, І.В., Гайдей, В.О., Диховичний, О.О., Коновалова, Н.Р., Федорова, Л.Б. *Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник.* — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с.

[3] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[4] *Конспект лекцій з аналітичної геометрії та лінійної алгебри для студентів технічних факультетів* // Уклад.: З.П. Ординська, І.В. Орловський, М.К. Руновська. – К.: НТУУ «КПІ», Електронне навчальне видання, свідоцтво № 030513. – 2013. – 131 с.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!