

Linear algebra and analytical geometry for engineers

Lecture 9: Cartesian coordinate system on a plane and in a three-dimensional space

Lecturer: Igor Orlovskiy

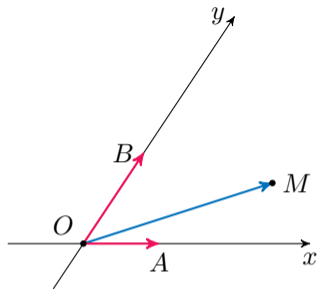
- ① Системи координат на площині
- ② Перетворення системи координат
- ③ Рівняння лінії (кривої) на площині
- ④ Система координат у просторі
- ⑤ Рівняння поверхні і лінії у просторі

1. Системи координат на площині

Розглянемо два неколінеарні вектори \vec{OA} , \vec{OB} , які прикладені до спільного початку – точки O . Будь-якій точці M площини AOB поставимо у відповідність вектор \vec{OM} , який називають **радіусом-вектором точки M** .

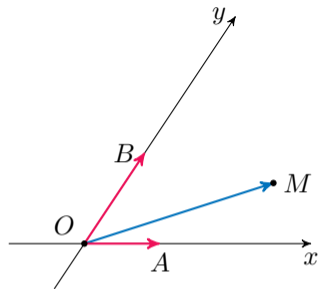
Оскільки вектори \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OM} компланарні, то існує єдина пара чисел (x, y) така, що

$$\vec{OM} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB}. \quad (1)$$



Сукупність точки і двох неколінеарних прикладених до неї векторів дають змогу ввести систему координат на площині: кожній точці M площини ставиться у відповідність єдина пара (x, y) така, що (1). Числа x та y при цьому називають **координатами точки M** . І навпаки, для кожної пари чисел (x, y) існує єдина точка площини з такими координатами.

Вектори \vec{OA} і \vec{OB} задають орієнтовані прямі (прямі з вибраним напрямом), які називають **осьми координат**, а точку їх перетину O – **початком координат**. Якщо вектори \vec{OA} і \vec{OB} мають різну довжину, або \vec{OA} не перпендикулярний до \vec{OB} , то таку систему координат називають **загальною афінною**.



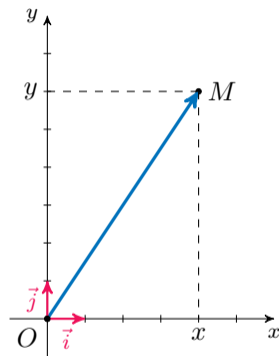
Площина, в якій задано систему координат, називають **координатної площиною**.

Прямокутна (декартова) система координат на площині

Прямокутна система координат задається точкою O — початок координат, та двома взаємно перпендикулярними одиничними векторами \vec{i} та \vec{j} , які визначають осі координат — **вісь абсцис** Ox , та **вісь ординат** Oy .

Зазвичай вісь абсцис розташована горизонтально і направлена зліва направо, а вісь ординат вертикально і направлена знизу вгору. Осі координат поділяють площину на чотири області, що називаються **чвертями** або **квадрантами**.

Розглянемо довільну точку M площини Oxy . Координатами точки M у системі координат Oxy називаються координати її радіус-вектора \overrightarrow{OM} . Якщо $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$, то координати точки M записують $M(x, y)$, причому число x називається **абсцисою** точки M , а число y — **ординатою** точки M . Ці два числа x і y повністю визначають положення точки на площині.



Деякі застосування прямокутної системи координат

Відстань між двома точками у декартовій системі координат

Відстань d між точками $A(x_A, y_A)$ та $B(x_B, y_B)$ на площині дорівнює довжині відрізка AB та довжині вектора

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix},$$

тобто

$$d = |AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Поділ відрізка у заданому відношенні у декартовій системі координат

Нехай відрізок AB , що з'єднує точки $A(x_A, y_A)$ і $B(x_B, y_B)$, потрібно поділити у заданому відношенні $\lambda > 0$, тобто знайти координати точки $M(x_M, y_M)$ відрізка AB такої, що

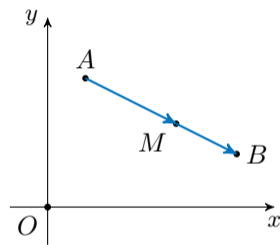
$$\frac{|AM|}{|MB|} = \lambda. \quad (2)$$

Розглянемо вектори \overrightarrow{AM} і \overrightarrow{MB} . Оскільки точка M ділить відрізок AB у відношенні λ , то

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}. \quad (3)$$

Але $\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A)\vec{i} + (y_M - y_A)\vec{j}$, $\overrightarrow{MB} = (x_B - x_M)\vec{i} + (y_B - y_M)\vec{j}$. Тому

$$(x_M - x_A)\vec{i} + (y_M - y_A)\vec{j} = \lambda(x_B - x_M)\vec{i} + \lambda(y_B - y_M)\vec{j}.$$



Звідси випливає, що

$$x_M - x_A = \lambda(x_B - x_A) \quad \text{і} \quad y_M - y_A = \lambda(y_B - y_A),$$

звідки

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda} \quad \text{і} \quad y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}. \quad (4)$$

Формули (4) називаються **формулами поділу відрізка у заданому відношенні**.

Розглянемо окремі випадки та узагальнення на $\lambda \leq 0$ ($\lambda \neq -1$):

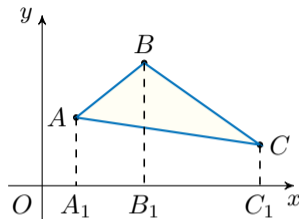
- якщо $\lambda = 1$, то M є серединою відрізка AB (співвідношення (2) прийме вигляд $|AM| = |MB|$), і формули (4) перепишуться у вигляді:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

- якщо $\lambda = 0$ точки A та M співпадають;
- якщо $\lambda < 0$, то поділ відрізка розуміється в сенсі рівності (3), а тому точка M буде лежати зовні відрізка AB . При цьому кажуть, що точка M ділить відрізок зовнішнім чином.

Площа трикутника у декартовій системі координат

Нехай на координатній площині задано три точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Знайдемо площу S трикутника ABC . Для цього проведемо з вершин A , B та C трикутника ABC перпендикуляри AA_1 , BB_1 і CC_1 на вісь Ox відповідно. Очевидно, $S_{ABC} = S_{AA_1B_1B} + S_{B_1BCC_1} - S_{A_1ACC_1}$. Тому



$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot (x_2 - x_1) + \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot (x_3 - x_2) - \frac{y_1 + y_3}{2} \cdot (x_3 - x_1) = \\ &= \frac{1}{2} \left((y_2 - y_1)(x_3 - x_1) - (y_3 - y_1)(x_2 - x_1) \right) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Отже,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} \right|,$$

Зауважимо, що випадок $S_{ABC} = 0$ означає, що точки A , B та C лежать на одній прямій.

2. Перетворення системи координат

Перехід від однієї системи координат до іншої називається **перетворенням системи координат**.

Паралельний перенос системи координат

Нехай на площині задана прямокутна декартова система координат Oxy . Під **паралельним переносом осей координат** розуміють перехід від системи координат Oxy до системи координат $Ox'y'$, при якому змінюється положення початку координат, а напрям та масштаб осей залишається незмінним.

Нехай новий початок координат — точка O' має у старій системі координат Oxy координати (x_0, y_0) , тобто $O'(x_0, y_0)$.

Нехай (x, y) — координати довільної точки M у старій системі координат Oxy , а (x', y') — координати цієї точки у новій системі координат $Ox'y'$.

Розглянемо вектори $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\overrightarrow{OO'} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$, і $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$.

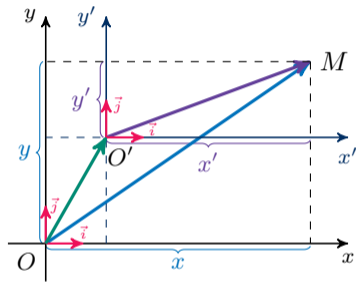
Оскільки $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, то

$$x\vec{i} + y\vec{j} = (x_0 + x')\vec{i} + (y_0 + y')\vec{j}.$$

Звідси

$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases}$$

Отримані формули дозволяють знаходити старі координати x, y за новими x', y' , і навпаки.



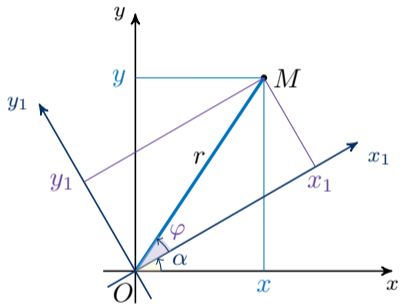
Поворот системи координат

Під **поворотом осей координат** розуміють таке перетворення координат, при якому обидві осі повертаються на один і той самий кут, а початок координат та масштаб залишаються незмінними.

Нехай нова система координат Ox_1y_1 отримується поворотом системи координат Oxy на кут α . Нехай (x, y) – координати довільної точки M у старій системі координат Oxy , а (x_1, y_1) – координати цієї точки у новій системі координат Ox_1y_1 . Позначимо довжину відрізка $|OM| = r$. Зауважимо, що вона є однаковою для обох систем координат. Нехай також φ – кут, який утворює вектор \overrightarrow{OM} з віссю Ox_1 (у новій системі координат).

Тоді

$$\begin{cases} x = r \cos(\alpha + \varphi), \\ y = r \sin(\alpha + \varphi), \end{cases}$$



тобто

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \cos \varphi - r \sin \alpha \sin \varphi, \\ y = r \sin \alpha \cos \varphi + r \cos \alpha \sin \varphi. \end{cases}$$

Але $r \cos \varphi = x_1$, а $r \sin \varphi = y_1$. Тому

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, \\ y = x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha. \end{cases}$$

Отримані формули називаються **формулами повороту осей**. Вони дозволяють визначити старі координати (x, y) точки M за новими координатами (x_1, y_1) цієї ж точки M , і навпаки.

3. Рівняння лінії (кривої) на площині

Лінії (кривою) на площині називається сукупність точок (геометричне місце точок), які мають певну спільну властивість.

Нехай на площині введена прямокутна система координат Oxy .

Означення 1

Рівнянням кривої на площині називається рівняння з двома змінними $F(x, y) = 0$, яке задовольняють всі точки $M(x, y)$ кривої, і не задовольняє жодна точка, що не належить цій кривій.

Якщо у заданій системі координат рівняння кривої відоме, то це дає можливість досліджувати геометричні властивості кривої та її форму.

Для того, щоб з'ясувати, чи лежить точка $A(x_0, y_0)$ на кривій, достатньо підставити координати цієї точки у рівняння кривої $F(x, y) = 0$. Якщо при цьому рівняння перетвориться на тотожність, тобто $F(x_0, y_0) = 0$, то точка A належить кривій, інакше ($F(x_0, y_0) \neq 0$) точка A не належить кривій.

Для того, щоб знайти точки перетину двох кривих, заданих своїми рівняннями $F_1(x, y) = 0$ і $F_2(x, y) = 0$, необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Якщо ця система не має розв'язків, то криві не перетинаються.

Криву на площині можна задавати за допомогою двох рівнянь:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in T, \end{cases} \quad (5)$$

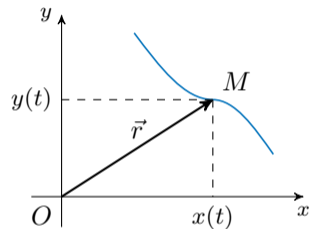
де x та y — координати довільної точки $M(x, y)$ кривої, а t — змінна, що називається **параметром** і пробігає множину значень T . Параметр t визначає положення кожної точки $M(x, y)$ кривої на площині Oxy .

Таке задання кривої на площині називається **параметричним**. Для того, щоб перейти від параметричного задання кривої до рівняння типу $F(x, y) = 0$, потрібно з якогось із двох рівнянь виключити змінну t . Проте, не завжди це доцільно робити, і не завжди це можна зробити.

Лінію на площині можна задати також **векторним рівнянням** $\vec{r} = \vec{r}(t)$, де t — скалярний параметр. Кожному значенню параметра t_0 відповідає радіус-вектор $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$. При зміні значення параметра t , кінець радіус-вектора буде описувати на площині криву.

Векторному рівнянню лінії $\vec{r} = \vec{r}(t)$ у системі координат Oxy відповідають два скалярних рівняння (5), тобто рівняння проєкцій на осі координат векторного рівняння лінії є її параметричні рівняння.

Векторне рівняння кривої та її параметричні рівняння мають механічний зміст. Якщо точка рухається по площині, то вказані рівняння називаються **рівняннями руху**, а крива — **траєкторією руху точки**. При цьому параметр t — це час.



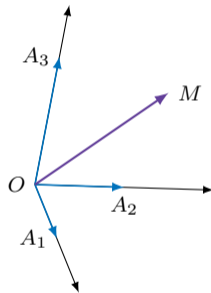
4. Система координат у просторі

Зафіксуємо впорядковану трійку некомпланарних векторів, прикладених до спільної точки O : $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$.

Будь-якій точці M простору поставимо у відповідність вектор \overrightarrow{OM} . Оскільки вектори $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$ утворюють базис, то існує єдина трійка чисел (x, y, z) така, що

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA_1} + y\overrightarrow{OA_2} + z\overrightarrow{OA_3}. \quad (6)$$

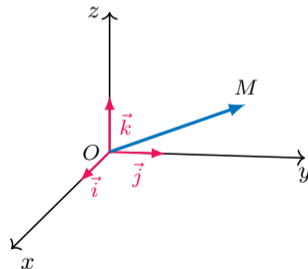
Сукупність точки та трьох некомпланарних векторів задає систему координат у просторі: кожній точці M простору ставиться у відповідність єдина трійка чисел (x, y, z) така, що (6). Числа x , y та z називають **координатами точки M** . І навпаки, для кожної трійки чисел (x, y, z) існує єдина точка простору з такими координатами. Вектори $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$ задають орієнтовані прямі – осі, які називають **осьми координат**.



Прямокутна (декартова) система координат у просторі

Прямокутна система координат у просторі задається точкою O — початком координат, та трьома взаємно перпендикулярними одиничними векторами \vec{i} , \vec{j} та \vec{k} , які визначають осі координат – **вісь абсцис** Ox , **вісь ординат** Oy , та **вісь аплікат** Oz . Площини Oxy , Oxz та Oyz , які проходять через координатні осі називаються **координатними площинами**. Вони поділяють простір на вісім областей, що називаються **октантами**.

Розглянемо довільну точку M простору із заданою прямокутною системою координат $Oxyz$. Координатами точки M у системі координат $Oxyz$ називаються координати її радіус-вектора \vec{OM} . Якщо $\vec{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$, то координати точки M записують $M(x, y, z)$, число x називається **абсцисою** точки M , число y — **ординатою** точки M , z — **аплікатою** точки M . Три числа x, y, z повністю визначають положення точки у просторі.



Основні задачі прямокутної системи координат в просторі

Відстань між двома точками у декартовій системі координат

Відстань d між точками $A(x_A, y_A, z_A)$ та $B(x_B, y_B, z_B)$ у просторі дорівнює довжині відрізка AB та довжині вектора

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix},$$

тобто

$$d = |AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Поділ відрізка у заданому відношенні у декартовій системі координат

Нехай відрізок AB , що з'єднує точки $A(x_A, y_A, z_A)$ і $B(x_B, y_B, z_B)$ потрібно поділити у заданому відношенні $\lambda > 0$, тобто знайти координати точки $M(x_M, y_M, z_M)$ відрізка AB такої, що $\frac{|AM|}{|MB|} = \lambda$.

Розглянемо вектори \overrightarrow{AM} і \overrightarrow{MB} . Оскільки точка M ділить відрізок AB у відношенні λ , то

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}.$$

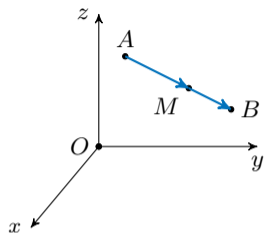
Але

$$\overrightarrow{AM} = (x_M - x_A)\vec{i} + (y_M - y_A)\vec{j} + (z_M - z_A)\vec{k},$$

$$\overrightarrow{MB} = (x_B - x_M)\vec{i} + (y_B - y_M)\vec{j} + (z_B - z_M)\vec{k}.$$

Тому

$$(x_M - x_A)\vec{i} + (y_M - y_A)\vec{j} + (z_M - z_A)\vec{k} = \lambda(x_B - x_M)\vec{i} + \lambda(y_B - y_M)\vec{j} + \lambda(z_B - z_M)\vec{k}.$$



Звідси випливає, що

$$x_M - x_A = \lambda(x_B - x_M), \quad y_M - y_A = \lambda(y_B - y_M), \quad z_M - z_A = \lambda(z_B - z_M),$$

тобто

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}, \quad z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda}. \quad (7)$$

Формули (7) називаються **формулами поділу відрізка у заданому відношенні**.

Зокрема, якщо $\lambda = 1$, тобто $|AM| = |MB|$, то формули (7) набувають вигляду:

$$x_M = \frac{x_A + x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_2}{2}, \quad z_M = \frac{z_A + z_2}{2}.$$

В цьому випадку точка M є серединою відрізка AB .

Приклад 1

Нехай дано дві вершини $A(1, 3, 5)$, $B(-1, 2, 1)$ паралелограма $ABCD$ і точку перетину його діагоналей $E(1, 0, 1)$. Знайти дві інші вершини паралелограма.

Розв'язання. Оскільки

$$1 = x_E \neq \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 - 1}{2} = 0,$$

то точка E – не є серединою відрізка AB , а тому A та B – суміжні вершини.

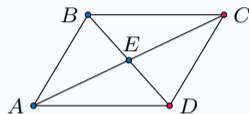
Точка E – середина відрізка AC , а тому:

$$x_E = \frac{x_A + x_C}{2}, \quad \Rightarrow x_C = 2x_E - x_A = 1;$$

$$y_E = \frac{y_A + y_C}{2}, \quad \Rightarrow y_C = 2y_E - y_A = -3;$$

$$z_E = \frac{z_A + z_C}{2}, \quad \Rightarrow z_C = 2z_E - z_A = -3.$$

Таким чином, $C(1, -3, -3)$.



Точка E буде також серединою відрізка BD , тому координати точки D , за аналогією до точки C , будуть шукатися за формулами:

$$x_D = 2x_E - x_B = 3, \quad y_D = 2y_E - y_B = -2, \quad z_D = 2z_E - z_B = 1.$$

Отже, $D(3, -2, 1)$. **Відповідь:** $C(1, -3, -3)$, $D(3, -2, 1)$.

5. Рівняння поверхні і лінії у просторі

Рівняння поверхні у просторі

Поверхні у просторі, як правило, можна розглядати як геометричне місце точок, які задовольняють деякій умові.

Прямокутна система координат $Oxyz$ дозволяє встановити взаємно однозначну відповідність між точками простору і трійками чисел x, y, z — їх координатами. Властивість, спільна для всіх точок поверхні, можна записати у вигляді рівняння, яке зв'язує координати всіх точок поверхні.

Означення 2

Рівнянням даної поверхні в прямокутній системі координат $Oxyz$ називається таке рівняння $F(x, y, z) = 0$ з трьома невідомими x, y, z , якому задовольняють координати кожної точки, що лежить на поверхні, і не задовольняють координати точок, що не лежать на поверхні.

Рівняння поверхні дозволяє вивчення геометричних властивостей поверхонь замінити дослідженням її рівняння. Наприклад, для того, щоб дізнатися, чи лежить точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на даній поверхні, достатньо підставити координати точки M_1 у рівняння поверхні замість змінних: якщо координати задовольняють рівняння, то точка лежить на поверхні, в протилежному випадку — точка не лежить на поверхні.

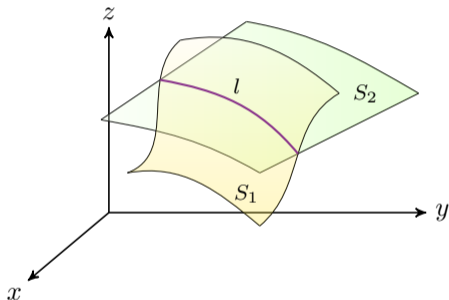
Рівняння лінії (кривої) у просторі

Лінію у просторі можна розглядати, як лінію перетину двох поверхонь або як геометричне місце точок, спільних для двох поверхонь.

Якщо $F_1(x, y, z) = 0$ і $F_2(x, y, z) = 0$ – рівняння двох поверхонь S_1 та S_2 , які визначають лінію l , то координати точок цієї лінії задовольняють системі двох рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Ці рівняння називають **рівнянням лінії у просторі**. Наприклад, $\begin{cases} y = 0, \\ z = 0, \end{cases}$ – рівняння осі Ox .

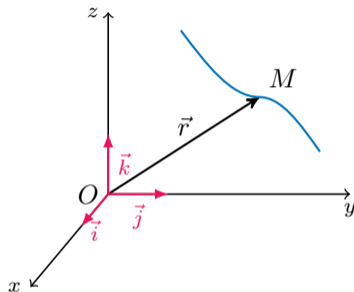


Лінію у просторі можна розглядати як траєкторію руху точки. В цьому випадку її задають **векторним рівнянням** $\vec{r} = \vec{r}(t)$, де t — скалярний параметр. Кожному значенню параметра t_0 відповідає радіус-вектор $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$. При зміні значення параметра t , кінець радіус-вектора буде описувати у просторі криву.

Криву у просторі можна задавати за допомогою трьох рівнянь:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \quad t \in T, \end{cases}$$

де x , y та z — координати довільної точки $M(x, y, z)$ кривої, а t — змінна, що називається **параметром**. Параметр t визначає положення кожної точки $M(x, y, z)$ кривої у просторі $Oxyz$. Таке задання кривої у просторі називається **параметричним**.



- [1] Алексеева, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Федорова, Л. Б. *Математика в технічному університеті*. (Т. 1). К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018
- [2] Булдигін, В.В., Алексеева, І.В., Гайдей, В.О., Диховичний, О.О., Коновалова, Н.Р., Федорова, Л.Б. *Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник*. — К. : ТВиМС, 2011. — 224 с.
- [3] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.
- [4] *Конспект лекцій з аналітичної геометрії та лінійної алгебри для студентів технічних факультетів* // Уклад.: З.П. Ординська, І.В. Орловський, М.К. Руновська. – К.: НТУУ «КПІ», Електронне навчальне видання, свідоцтво № 030513. – 2013. – 131 с.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!