Linear algebra and analytical geometry for engineers

Lecture 10: Lines on a plane. Different forms of the equation of the line

Lecturer: Igor Orlovskyi

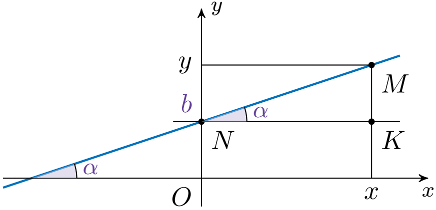
Зміст

1. Пряма на площині. Різні види її рівняння

I. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай на площині Oxy задана пряма, не паралельна осі Oy. Її положення на площині однозначно визначається двома параметрами: ординатою точки $N(0,b)$ перетину з віссю Oy та кутом α між віссю Ox та прямою.

Розглянемо на прямій довільну точку $M(x,y)$. Проведемо через точку N пряму, паралельну осі Ox, а через точку M пряму, паралельну осі Oy. Позначимо через K – точку перетину побудованих прямих. Очевидно, що $\angle MNK = \alpha$. Тоді, оскільки ΔMNK прямокутний, а катети рівні $|NK| = x$ та $|MK| = y - b$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y-b}{x}$,



тобто $y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x + b$. Позначимо $\operatorname{tg}\alpha = k$. Таким чином, ми отримали рівняння

$$y = kx + b, \qquad (1)$$

якому задовольняють всі точки $M(x,y)$ прямої.

Число $\operatorname{tg}\alpha = k$ називається кутовим коефіцієнтом прямої, а рівняння (1) – рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.

Розглянемо частині випадки:

- якщо пряма проходить через початок координат, то $b = 0$, тобто рівняння прямої прийме вигляд $y = kx$;
- якщо пряма проходить паралельно осі Ox, то $\alpha = 0$, а отже $k = 0$, і рівняння прямої прийме вигляд $y = b$;
- якщо пряма паралельна осі Oy, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$, і кутовий коефіцієнт k не існує. В цьому випадку рівняння прямої буде мати вигляд $x = a$, де a – точка перетину прямої з віссю Ox.

II. Рівняння прямої, яка проходить через задану точку із заданим кутовим коефіцієнтом

Нехай пряма на площині проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k. Рівняння цієї прямої запишемо, як рівняння з кутовим коефіцієнтом: $y = kx + b$. Знайдемо коефіцієнт b з умови, що пряма проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$.
Підставляючи координати точки M_0 у рівняння прямої, матимемо $y_0 = kx_0 + b$, звідки $b = y_0 - kx_0$. Підставляючи значення b у рівняння $y = kx + b$, отримаємо $y = kx + y_0 - kx_0$, тобто

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{2}$$

Рівняння (2) називають рівнянням прямої, яка проходить через задану точку із заданим кутовим коефіцієнтом.

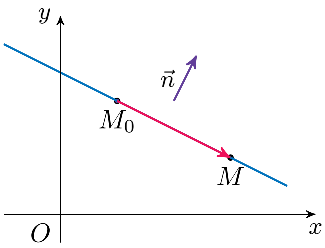
III. Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно даному вектору

Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно даному ненульовому вектору $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}^T$.

Для цього розглянемо на прямій довільну точку $M(x, y)$ і складемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{pmatrix}^T$.

Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M}$ та $\overrightarrow{n}$ перепендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (3)$$



Рівняння (3) називається рівнянням прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно даному (ненульовому) вектору.

Вектор $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}^T$ називається нормальним вектором прямої.

Покладемо у рівнянні (3) $C = -Ax_0 - By_0$, отримаємо рівняння

$$Ax + By + C = 0, \tag{4}$$

яке називається загальним рівнянням прямої.

Теорема 1

Нехай на площині введено прямокутну декартову систему координат. Тоді:

- *будь-яку пряму на площині можна задати лінійним рівнянням вигляду* (4);
- *будь-яке лінійне рівняння вигляду* (4) *визначає деяку пряму на площині.*

Доведення

Доведемо першу частину. Нехай на площині задано деяку пряму. Якщо вона паралельна осі Oy, то перетинає вісь Ox в деякій точці x_0. Тоді її рівняння буде мати вигляд $x = x_0$ або $x - x_0 = 0$, яке є лінійним, вигляду (4) з $A = 1$, $B = 0$, $C = -x_0$. Нехай пряма не паралельна осі Oy. Тоді вона буде перетинати вісь Oy у деякій точці $(0, b)$ та утворювати кут $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ з віссю Ox. Тоді, рівняння прийме вигляд (Див. (1)) $y = kx + b$ з $k = \operatorname{tg} \alpha$ або $kx - y + b = 0$, тобто вигляду (4) з $A = k$, $B = -1$, $C = b$.

Доведемо другу частину. Від загального рівняння (4) легко перейти до рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Дійсно, якщо $B \neq 0$, то рівняння (4) можна переписати наступним чином: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. А це рівняння є рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом $k = -\frac{A}{B}$, яка перетинає вісь Oy у точці $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$. Якщо ж $B = 0$, то рівняння (4) набуває вигляду: $Ax + C = 0$, причому $A \neq 0$, звідки $x = -\frac{C}{A}$. Останнє рівняння є рівнянням прямої, що паралельна осі Oy і проходить через точку $(-\frac{C}{A}, 0)$.

Розглянемо, частині випадки загального рівняння

- якщо $A = 0$, то пряма $By + C = 0$ паралельна осі Ox та перетинає вісь Oy в точці $(0, -\frac{C}{B})$;
- якщо $B = 0$, то пряма $Ax + C = 0$ паралельна осі Oy та перетинає вісь Ox в точці $(-\frac{C}{A}, 0)$;
- якщо $C = 0$, то пряма $Ax + By = 0$ проходить через початок координат;
- якщо $A = C = 0$, то пряма $By = 0$ співпадає з віссю Ox. Отже, вісь Ox має рівняння $y = 0$;
- якщо $B = C = 0$, то пряма $Ax = 0$ співпадає з віссю Oy. Отже, вісь Oy має рівняння $x = 0$.

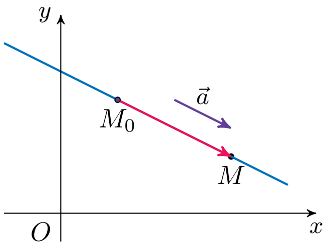
V. Канонічне рівняння прямої

Нехай відомо, що пряма проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ у напрямку вектора $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x & a_y \end{pmatrix}^T$.

Розглянемо довільну точку $M(x, y)$ прямої. Складемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{pmatrix}^T$.

Зрозуміло, що вектор $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}$. Звідси впливає, що координати векторів $\overrightarrow{M_0M}$ та $\vec{a}$ пропорційні. Тому

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}. \qquad (5)$$



Таким чином, ми отримали рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно вектору $\vec{a}$. Це рівняння називається канонічним рівнянням прямої, а вектор $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x & a_y \end{pmatrix}^T$ називається напрямним вектором прямої.

Розглянемо два частинних випадки.

- Якщо $a_x = 0$, то вектор $\vec{a}$ паралельний осі Oy, звідки випливає, що пряма паралельна цій осі. Отже, рівняння прямої буде мати вигляд: $x = x_0$.
- Якщо $a_y = 0$, то вектор $\vec{a}$ паралельний осі Ox, звідки випливає, що пряма паралельна цій осі. Отже, рівняння прямої буде мати вигляд: $y = y_0$.

V. Параметричне рівняння прямої

З канонічного рівняння випливає, що

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = t.$$

Виражаючи з цього рівняння змінні x та y, отримаємо рівняння прямої

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t, \\ y = y_0 + a_y t, \end{cases}$$

яке називається параметричним рівнянням прямої.

VII. Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай пряма проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$. Помітимо, що у якості напрямного вектора можна взяти вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{pmatrix}^T$. Тоді, підставляючи координати цього вектора у канонічне рівняння (5) та взявши у якості точки, через яку проходить пряма, M_1, отримаємо рівняння

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{6}$$

яке називається рівнянням прямої, що проходить через дві точки.
Розглянемо частині випадки:

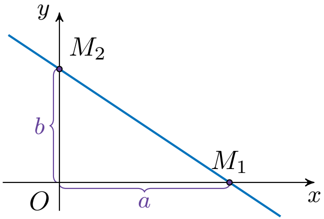
- якщо $x_2 = x_1$, то пряма паралельна осі Oy і її рівняння має вигляд $x = x_1$;
- якщо $y_2 = y_1$, то пряма паралельна осі Ox і її рівняння має вигляд $y = y_1$.

Нехай пряма перетинає вісь Ox у точці $M_1(a, 0)$, а вісь Oy — у точці $M_2(0, b)$. Тоді рівняння (6) приймає вигляд:

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0},$$

тобто

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \tag{7}$$

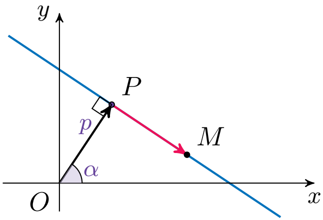


Рівняння (7) називається рівнянням прямої "у відрізках", оскільки числа a та b показують, які відрізки відтинає пряма від координатних осей.

IX. Нормальне рівняння прямої

Нехай на площині задано пряму. Припустимо, що відомий кут α, який утворює перпендикуляр, опущений з початку координат $O(0,0)$ на цю пряму, з віссю Ox та довжина цього перпендикуляра p ($p \geq 0$), тобто відстань від початку координат до прямої. Ці два параметри однозначно визначають розташування прямої на площині. Знайдемо її рівняння.

Нехай точка P є основою перпендикуляра, опущеного з точки $O(0,0)$ на пряму. Тоді $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p\cos\alpha & p\sin\alpha \end{pmatrix}^T$, і точка P має координати $P(p\cos\alpha, p\sin\alpha)$. Розглянемо довільну точку $M(x,y)$ на прямій і складемо вектор $\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} x - p\cos\alpha & y - p\sin\alpha \end{pmatrix}^T$. Помітимо, що вектор $\overrightarrow{PM}$ перпендикулярний вектору $\overrightarrow{OP}$, звідки випливає, що їх скалярний добуток дорівнює нулю. Отже,



$$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{OP} = (x - p\cos\alpha)p\cos\alpha + (y - p\sin\alpha)p\sin\alpha = 0.$$

Таким чином, отримали рівняння

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0, \tag{8}$$

яке називається нормальним (або нормованим) рівнянням прямої.

Розглянемо, як із загального рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ можна перейти до її нормального рівняння (8). Помножимо рівняння $Ax + By + C = 0$ на $\lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, якщо $C < 0$, і на $\lambda = \frac{-1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, якщо $C > 0$. Покладаючи $\lambda C = -p$, отримаємо рівняння

$$(\lambda A)x + (\lambda B)y - p = 0,$$

де $p > 0$.
Оскільки $(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 = 1$, то числа λA та λB є відповідно косинусом та синусом одного і того самого кута. Покладемо $\lambda A = \cos\alpha$ і $\lambda B = \sin\alpha$. Тоді рівняння нашої прямої набуває вигляду:

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0.$$

Отже, ми звели загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ до нормального вигляду.
Множник $\lambda = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ називається нормуючим множником.

Приклад 1

Нехай дано дві точки $M(6, -4)$ та $N(10, -1)$. Знайти

1) Загальне рівняння прямої L_1, яка проходить через точки M та N.

Розв'язання. Для знаходження рівняння прямої L_1 скористаємося рівнянням (6) прямої, яка проходить через дві точки M та N

$$\frac{x-6}{10-6} = \frac{y+4}{-1+4} \Leftrightarrow \frac{x-6}{4} = \frac{y+4}{3} \Leftrightarrow 3x - 4y - 34 = 0.$$

Відповідь: загальне рівняння $L_1 : 3x - 4y - 34 = 0$.

2) Канонічне рівняння прямої L_2, яка проходить через точки M перпендикулярно прямій L_1.

Розв'язання. Із загального рівняння прямої $L_1 : 3x - 4y - 34 = 0$ можемо знайти нормальний вектор цієї прямої $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \end{pmatrix}^T$. Оскільки $L_2 \perp L_1$, то $L_2 \parallel \vec{n}_1$, а тому можемо взяти вектор $\vec{n}_1$ у якості напрямного вектора L_2 й скористатися канонічним рівнянням прямої (5):

$$\frac{x-6}{3} = \frac{y+4}{-4}.$$

Відповідь: канонічне рівняння $L_2 : \dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y+4}{-4}$.

3) Параметричне рівняння прямої L_2.

Розв'язання. Запишемо канонічне рівняння у наступному вигляді:

$$\frac{x-6}{3} = \frac{y+4}{-4} = t \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 6 + 3t; \\ y = -4 - 4t. \end{cases}$$

Відповідь: параметричне рівняння $L_2 : \begin{cases} x = 6 + 3t; \\ y = -4 - 4t. \end{cases}$

4) Загальне рівняння прямої L_2.

Розв'язання. Розглянемо канонічне рівняння прямої L_2:

$$\frac{x-6}{3} = \frac{y+4}{-4} \Leftrightarrow 4(x-6) = -3(y+4) \Leftrightarrow 4x+3y-12=0.$$

Відповідь: загальне рівняння $L_2 : 4x+3y-12=0$.

5) Рівняння прямої L_2 з кутовим коефіцієнтом.

Розв'язання. Розглянемо загальне рівняння прямої L_2:

$$4x+3y-12=0 \Leftrightarrow 3y=-4x+12 \Leftrightarrow y=-\frac{4}{3}x+4.$$

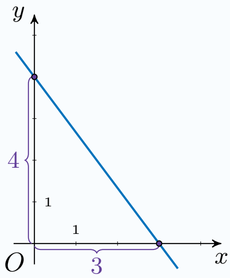
Відповідь: рівняння прямої L_2 з кутовим коефіцієнтом $y=-\dfrac{4}{3}x+4$.

6) Рівняння прямої L_2 у "відрізках".

Розв'язання. Розглянемо загальне рівняння прямої L_2:

$$4x+3y-12=0 \;\Leftrightarrow\; 4x+3y=12 \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1.$$

Відповідь: рівняння у "відрізках" $L_2 \, : \, \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}=1.$



7) Нормальне рівняння прямої L_2.

Розв'язання. Розглянемо загальне рівняння прямої $L_2 : 4x + 3y - 12 = 0$. Оскільки $C = -12 < 0$, то нормуючим множником буде число

$$\lambda = +\frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{1}{5}.$$

Помноживши загальне рівняння L_2 на нормуючий множник λ, отримаємо шукане рівняння:

$$\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{12}{5} = 0.$$

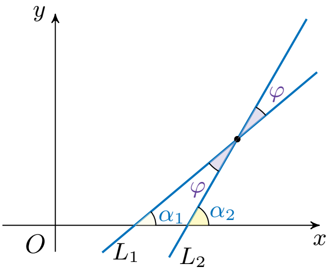
Отже, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, тобто перпендикуляр опущений з початку координат O на пряму L_2 утворює з віссю Ox кут $\alpha = \arcsin\frac{3}{5} = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. Відстань від початку координат до прямої дорівнює $p = \frac{12}{5}$.

Відповідь: нормальне рівняння $L_2 : \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{12}{5} = 0$.

2. Основні задачі для прямої на площині

Нехай прямі L_1 та L_2 задано рівняннями з кутовим коефіцієнтом $y = k_1x + b_1$, та $y = k_2x + b_2$, відповідно. Якщо ці дві прямі перетинаються, то вони утворюють два суміжних кути. Знайдемо один з цих кутів.

Позначимо через α_1 та α_2 кути, що утворюють прямі L_1 та L_2 з віссю Ox відповідно, тобто $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$ і $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$. Кут $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ буде одним з кутів, що утворюють ці прямі. Знайдемо формулу його обчислення. Якщо $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то



$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Для того, щоб знайти гострий кут між прямими, праву частину останньої рівності беруть по модулю, тобто

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

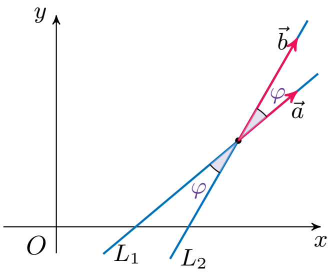
Знайдемо формулу знаходження кута між прямими L_1 та L_2, заданими канонічними рівняннями

$$\frac{x-x_1}{a_x}=\frac{y-y_1}{a_y} \text{ та } \frac{x-x_2}{b_x}=\frac{y-y_2}{b_y},$$

відповідно.

Помітимо, що кут φ між напрямними векторами $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x & a_y\end{pmatrix}^T$ і $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x & b_y\end{pmatrix}^T$ прямих L_1 та L_2 буде співпадати з одним із кутів, що утворюють самі прямі. Тоді цей кут можна знайти за формулою знаходження кута між векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2}}.$$



Для того, щоб знайти гострий кут між прямими, праву частину останньої рівності беруть по модулю, тобто

$$\cos\varphi=\frac{|a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y|}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2}}.$$

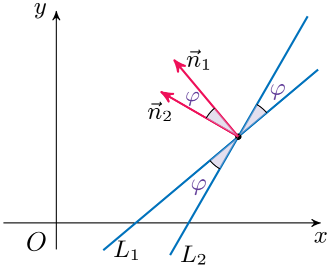
Знайдемо формулу знаходження кута між прямими L_1 та L_2, заданими загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ та } A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

відповідно.

Помітимо, що кут φ між нормальними векторами $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \end{pmatrix}^T$ і $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \end{pmatrix}^T$ прямих L_1 та L_2 буде співпадати з одним із кутів, що утворюють самі прямі. Тоді цей кут можна знайти за формулою знаходження кута між векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$



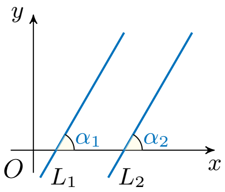
Для того, щоб знайти гострий кут між прямими, праву частину останньої рівності беруть по модулю, тобто

$$\cos\varphi = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

II. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай дві прямі задано рівняннями з кутовим коефіцієнтом

$$L_1 : y = k_1 x + b_1, \ L_2 : y = k_2 x + b_2.$$



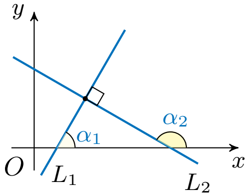
Очевидно, прямі L_1 та L_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли $\varphi = 0$, тобто $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = 0.$
З останньої рівності випливає, що

$$L_1 \parallel L_2 \ \Leftrightarrow \ k_1 = k_2 \quad \big(\Leftrightarrow \ \alpha_1 = \alpha_2 \ \big).$$

Якщо $k_1 = k_2$ і при цьому $b_1 \neq b_2$, то прямі L_1 та L_2 паралельні різні (не мають спільних точок), а при $b_1 = b_2$ – співпадають.

Прямі L_1 та L_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тобто $\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0$. З останньої рівності випливає, що

$$L_1 \perp L_2 \ \Leftrightarrow \ k_1 \cdot k_2 = -1 \quad \left(\Leftrightarrow \ \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2} \right).$$

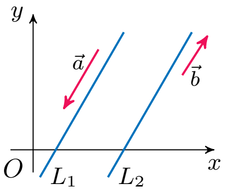


Нехай дві прямі задано канонічними рівняннями

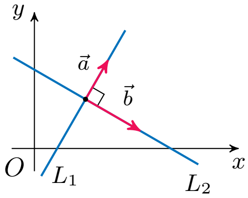
$$L_1 : \frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y} \quad L_2 : \frac{x - x_2}{b_x} = \frac{y - y_2}{b_y},$$

Очевидно, прямі L_1 та L_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли їх напрямні вектори $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x & a_y \end{pmatrix}^T$ і $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x & b_y \end{pmatrix}^T$ колінеарні, тобто

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} \quad \left(\Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \right).$$



Якщо $\vec{a} \parallel \vec{b} \nparallel \overrightarrow{M_1M_2}$, де $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ – точки, які лежать на прямих L_1 та L_2 відповідно, то прямі L_1 та L_2 паралельні різні, а при $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$ – співпадають.



Прямі L_1 та L_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли перпендикулярні напрямні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто

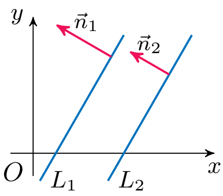
$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \right).$$

Нехай дві прямі задано загальними рівняннями

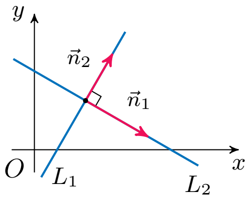
$$L_1 \,:\, A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad L_2 \,:\, A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

Очевидно, прямі L_1 та L_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли їх нормальні вектори $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \end{pmatrix}^T$ і $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \end{pmatrix}^T$ колінеарні, тобто

$$L_1 \parallel L_2 \;\Leftrightarrow\; \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad \left(\Leftrightarrow \; \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \right).$$



Якщо $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямі L_1 та L_2 паралельні різні, а при $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ – співпадають.



Прямі L_1 та L_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли перпендикулярні нормальні вектори $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$, тобто

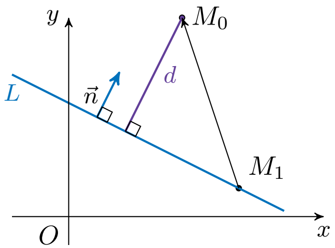
$$L_1 \perp L_2 \;\Leftrightarrow\; A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \quad \left(\Leftrightarrow \; \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \right).$$

III. Відстань від точки до прямої

Нехай пряма L задана своїм загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, і задана деяка точка площини $M_0(x_0, y_0)$. Знайдемо відстань від точки M_0 до прямої L.

Відстань d від точки M_0 до прямої L дорівнює модулю проекції вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$, де точка $M_1(x_1, y_1)$ – довільна точки прямої L, на напрям нормального вектора $\vec{n} = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}^T$ прямої L. Таким чином,

$$d = |\,\text{пр}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{M_1M_0}| = \left|\frac{\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \left|\frac{(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \frac{\left|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



Оскільки точка $M_1(x_1, y_1)$ належить прямій L, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, звідки $-Ax_1 - By_1 = C$. Тому

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Остання формула є формулою відстані від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$.

Література

[1] Алєксєєва, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Федорова, Л. Б. *Математика в технічному університеті.* (Т. 1). К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018

[2] Булдигін, В.В., Алєксєєва, І.В., Гайдей, В.О., Диховичний, О.О., Коновалова, Н.Р., Федорова, Л.Б. *Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник.* — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с.

[3] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[4] *Конспект лекцій з аналітичної геометрії та лінійної алгебри для студентів технічних факультетів* // Уклад.: З.П. Ординська, І.В. Орловський, М.К. Руновська. – К.: НТУУ «КПІ», Електронне навчальне видання, свідоцтво № 030513. – 2013. – 131 с.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!