

Linear algebra and analytical geometry for engineers

Lecture 11: Planes in a three-dimensional space. Different forms of the equation of the plane

Lecturer: Igor Orlovskiy

- 1 Площина в просторі, різні види її рівняння
- 2 Основні задачі для площини у просторі

1. Площина в просторі, різні види її рівняння

I. Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

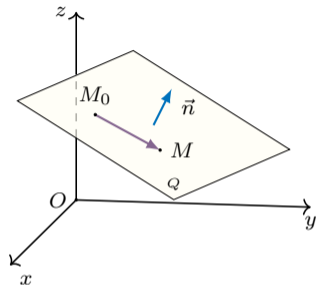
Нехай у просторі з введеною прямокутною системою координат $Oxyz$ задано площину Q . Нехай відомо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, через яку проходить площина, та вектор $\vec{n} = (A \ B \ C)^T$, перпендикулярний до площини.

Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка площини. Складемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0 \ y - y_0 \ z - z_0)^T$. Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і \vec{n} перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$.

Звідси отримуємо **рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A \ B \ C)^T$:**

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (1)$$

Вектор \vec{n} називають **нормальним вектором площини**.



II. Загальне рівняння площини

Перепишемо рівняння площини (1) наступним чином:

$$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0.$$

Покладемо $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$. Отримаємо рівняння першого порядку відносно змінних x, y, z :

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2)$$

яке називають **загальним рівнянням площини**.

Теорема 1

Нехай у просторі введено прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Тоді:

- *будь-яку площину у просторі $Oxyz$ можна задати лінійним рівнянням вигляду (2);*
- *будь-яке лінійне рівняння вигляду (2) визначає деяку площину у просторі $Oxyz$.*

Доведення

Перша частина впливає безпосередньо з пункту 1 та отримання (2) на початку пункту.

Доведемо другу частину. В рівнянні (2) хоча б один із коефіцієнтів A , B або C має бути відмінним від нуля. Не обмежуючи загальності припустимо, що $A \neq 0$, тоді рівняння (2) може бути переписано у вигляді

$$A \left(x - \left(-\frac{D}{A} \right) \right) + B(y - 0) + C(z - 0) = 0,$$

яке є рівнянням площини, яка проходить через точку $M_0 \left(-\frac{D}{A}, 0, 0 \right)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A \ B \ C)^T$.

Розглянемо частинні випадки рівняння (2):

- 1 • Якщо $A = 0$, то рівняння (2) матиме вигляд $By + Cz + D = 0$. Вектор $\vec{n} = (0 \ B \ C)^T$ є нормальним вектором цієї площини. Він перпендикулярний осі Ox . Таким чином, площина паралельна осі Ox .
- Якщо $B = 0$, то рівняння (2) матиме вигляд $Ax + Cz + D = 0$. Вектор $\vec{n} = (A \ 0 \ C)^T$ є нормальним вектором цієї площини. Він перпендикулярний осі Oy . Таким чином, площина паралельна осі Oy .
- Якщо $C = 0$, то рівняння (2) матиме вигляд $Ax + By + D = 0$. Вектор $\vec{n} = (A \ B \ 0)^T$ є нормальним вектором цієї площини. Він перпендикулярний осі Oz . Таким чином, площина паралельна осі Oz .
- Якщо $D = 0$, то рівняння (2) матиме вигляд $Ax + By + Cz = 0$. Цьому рівнянню задовольняє точка $O(0, 0, 0)$. Таким чином, площина проходить через початок координат O .

- ②
- Якщо $A = D = 0$, то площина $By + Cz = 0$ проходить через початок координат і паралельна осі Ox , тобто площина проходить через вісь Ox .
 - Якщо $B = D = 0$, то площина $Ax + Cz = 0$ проходить через початок координат і паралельна осі Oy , тобто площина проходить через вісь Oy .
 - Якщо $C = D = 0$, то площина $Ax + By = 0$ проходить через початок координат і паралельна осі Oz , тобто площина проходить через вісь Oz .
- ③
- Якщо $A = B = 0$, то рівняння (2) матиме вигляд $Cz + D = 0$, тобто $z = -\frac{D}{C}$. В цьому випадку площина паралельна координатній площині Oxy .
 - Якщо $A = C = 0$, то площина $By + D = 0$ паралельна координатній площині Oxz .
 - Якщо $B = C = 0$, то площина $Ax + D = 0$ паралельна координатній площині Oyz .
- ④
- Якщо $A = B = D = 0$, рівняння можна записати, як $z = 0$, тобто площина співпадає з координатною площиною Oxy .
 - Якщо $A = C = D = 0$, рівняння можна записати, як $y = 0$, тобто площина співпадає з координатною площиною Oxz .
 - Якщо $B = C = D = 0$, рівняння можна записати, як $x = 0$, тобто площина співпадає з координатною площиною Oyz .

III. Рівняння площини, яка паралельна двом векторам

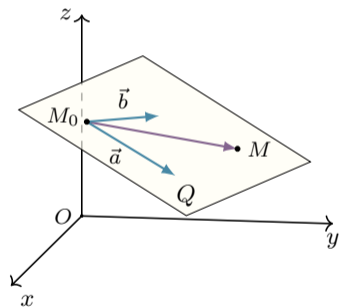
Нехай задано точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і два неколінерні вектори $\vec{a} = (a_x \ a_y \ a_z)^T$ та $\vec{b} = (b_x \ b_y \ b_z)^T$. Знайдемо рівняння площини, яка проходить через точку M_0 паралельно векторам \vec{a} та \vec{b} . Відкладемо вектори \vec{a} та \vec{b} від точки M_0 . Точка та два неколінерні вектори будуть задавати єдину площину.

Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка площини. Складемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0 \ y - y_0 \ z - z_0)^T$.

Вектори $\overrightarrow{M_0M}$, \vec{a} та \vec{b} лежать в одній площині, а тому вони компланарні. Звідси випливає, що їх мішаний добуток дорівнює нулю, тобто $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$. Таким чином,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Рівняння (3) називають **рівнянням площини, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно двом векторам.**



IV. Рівняння площини, що проходить через три точки

Три точки, що не належать одній прямій однозначно визначають площину. Знайдемо рівняння площини Q , що проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, що не належать одній прямій.

Нехай $M(x, y, z)$ – довільна точка площини. Складемо три вектори

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M} &= (x - x_1 \quad y - y_1 \quad z - z_1)^T, \quad \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1 \quad y_2 - y_1 \quad z_2 - z_1)^T, \\ \overrightarrow{M_1M_3} &= (x_3 - x_1 \quad y_3 - y_1 \quad z_3 - z_1)^T.\end{aligned}$$

Ці вектори лежать в одній площині, а отже вони компланарні. Звідси випливає, що їх мішаний добуток дорівнює нулю, тобто $(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$. Таким чином,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Рівняння (4) називають **рівнянням площини, що проходить через три точки**.

V. Рівняння площини "у відрізках"

Нехай площина Q відтинає від координатних осей відрізки a , b , c відповідно, тобто проходить через точки $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$.

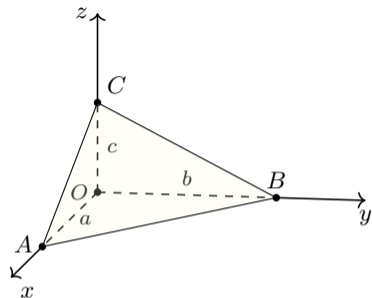
Підставляючи координати цих точок у рівняння (4), отримаємо

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник за першим рядком, матимемо, $bc(x - a) + acy + abz = 0$, звідки

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (5)$$

Рівняння (5) називають **рівнянням площини "у відрізках"**.



VI. Нормальне рівняння площини

Розташування площини Q у просторі цілком визначається одиничним вектором \vec{e} направленим по перпендикуляру OK , який опущено з початку координат $O(0, 0, 0)$ на площину Q , та довжиною p цього перпендикуляру.

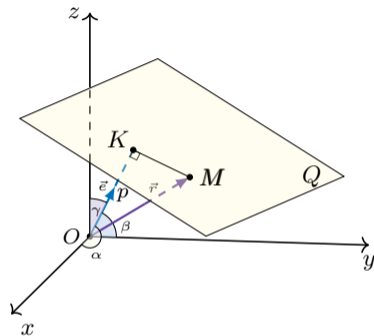
Нехай $OK = p$, а α, β, γ — кути, утворені одиничним вектором \vec{e} з осями координат. Тоді

$$\vec{e} = (\cos \alpha \quad \cos \beta \quad \cos \gamma)^T.$$

Нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка площини. Складемо вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x \quad y \quad z)^T$. При довільному

розташуванні точки M на площині Q проекція радіус-вектора \vec{r} на напрямок вектора \vec{e} завжди дорівнює p , тобто $\text{pr}_{\vec{e}} \vec{r} = p$, звідки $\vec{e} \cdot \vec{r} = p$. Тому

$$\vec{e} \cdot \vec{r} - p = 0.$$



Перепишемо це рівняння через координати векторів \vec{r} та \vec{e} :

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma - p = 0. \quad (6)$$

Рівняння (6) називають **нормальним рівнянням площини**.

Загальне рівняння площини (2) можна звести до нормального рівняння. Для цього загальне рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$ помножимо на $\lambda = +\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, якщо $D < 0$,

і на $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, якщо $D > 0$. Тоді, за аналогією до нормального рівняння прямої на площині, отримане рівняння $\lambda Ax + \lambda By + \lambda Cz + \lambda D = 0$ буде нормальним рівнянням площини оскільки в ньому

$$\lambda A = \cos \alpha, \quad \lambda B = \cos \beta, \quad \lambda C = \cos \gamma, \quad p = -\lambda D.$$

Множник $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ називають **нормуючим множником**.

Приклад 1

Нехай дано три точки $A(2, 3, 2)$, $B(-1, 6, -2)$ та $C(5, -3, 4)$. Знайти

а) Рівняння площини Q_1 , яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC} .

Розв'язання. Знайдемо координати вектора

$$\overrightarrow{BC} = (6 \quad -9 \quad 6)^T.$$

Скористаємося рівнянням (1) площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \overrightarrow{BC}

$$6(x - 2) - 9(y - 3) + 6(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 6x - 9y + 6z + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + 2z + 1 = 0.$$

Відповідь: $Q_1 : 2x - 3y + 2z + 1 = 0$.

b) Рівняння площини Q_2 , яка проходить через точки A , B та C .

Розв'язання. Для знаходження рівняння площини Q_2 , застосуємо рівняння (4) площини, яка проходить через три точки:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-2 \\ -3 & 3 & -4 \\ 3 & -6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -18(x-2) - 6(y-3) + 9(z-2) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -18x - 6y + 9z + 36 = 0 \Leftrightarrow 6x + 2y - 3z - 12 = 0.$$

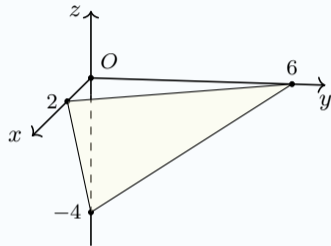
Відповідь: $Q_2 : 6x + 2y - 3z - 12 = 0$.

с) Рівняння площини Q_2 у "відрезках".

Розв'язання. Розглянемо загальне рівняння площини Q_2 :

$$\begin{aligned}6x + 2y - 3z - 12 = 0 &\Leftrightarrow 6x + 2y - 3z = 12 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{6} + \frac{z}{-4} = 1.\end{aligned}$$

Відповідь: $Q_2 : \frac{x}{2} + \frac{y}{6} + \frac{z}{-4} = 1.$



d) Нормальне рівняння площини Q_2 та відстань від початку координат до площини Q_2 .

Розв'язання. Розглянемо загальне рівняння площини $Q_2 : 6x + 2y - 3z - 12 = 0$. Оскільки $D = -12 < 0$, то нормуючим множником буде число

$$\lambda = + \frac{1}{\sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{1}{7}.$$

Помноживши загальне рівняння Q_2 на нормуючий множник $\lambda = \frac{1}{7}$, отримаємо шукане рівняння:

$$\frac{6}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}z - \frac{12}{7} = 0.$$

Отже, відстань від початку координат до площини дорівнює $p = \frac{12}{7}$.

Відповідь: нормальне рівняння $Q_2 : \frac{6}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{3}{7}z - \frac{12}{7} = 0$, відстань від початку координат $p = \frac{12}{7}$.

е) Рівняння площини Q_3 , яка проходить через точку A перпендикулярно до площин $Q_1 : 2x - 3y + 2z + 1 = 0$ та $Q_2 : 6x + 2y - 3z - 12 = 0$.

Розв'язання. Оскільки Q_3 перпендикулярна до площин Q_1 та Q_2 , тоді вона буде паралельна їхнім нормальним векторам $\vec{n}_1 = (2 \ -3 \ 2)^T$ та $\vec{n}_2 = (6 \ 2 \ -3)^T$. З останнього випливає, що у якості нормального вектора площини Q_3 можна взяти

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 18\vec{j} + 22\vec{k}$$

Використовуючи рівнянням (1) площини, яка проходить через точку A перпендикулярно вектору \rightarrow :

$$5(x - 2) + 18(y - 3) + 22(z - 2) = 0 \Leftrightarrow 5x + 18y + 22z - 108 = 0.$$

Відповідь: $Q_3 : 5x + 18y + 22z - 108 = 0$.

2. Основні задачі для площини у просторі

I. Кут між площинами

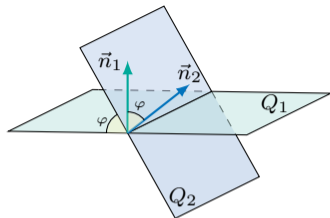
Розглянемо дві площини Q_1 та Q_2 , задані загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ відповідно.

Кутом між двома площинами Q_1 та Q_2 називають один з двогранних кутів, утворених цими площинами. Зрозуміло, що кут φ між нормальними векторами $\vec{n}_1 = (A_1 \ B_1 \ C_1)^T$ та $\vec{n}_2 = (A_2 \ B_2 \ C_2)^T$ площин Q_1 та Q_2 дорівнює одному з цих двогранних кутів. Таким чином,

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Для того, щоб знайти величину гострого кута, необхідно у правій частині останньої рівності взяти модуль:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$



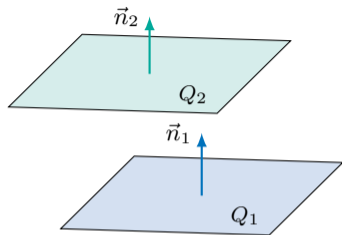
II. Умови паралельності та перпендикулярності площин

З'ясуємо умову паралельності площин Q_1 та Q_2 , заданих загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ відповідно.

Дві площини Q_1 та Q_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли колінеарні їх нормальні вектори $\vec{n}_1 = (A_1 \ B_1 \ C_1)^T$ і $\vec{n}_2 = (A_2 \ B_2 \ C_2)^T$. Таким чином, **площини Q_1 та Q_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли**

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Якщо $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, то площини Q_1 та Q_2 паралельні різні, а при $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ – співпадають.

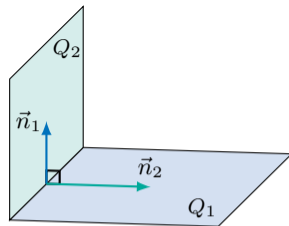


З'ясуємо умову перпендикулярності площин Q_1 та Q_2 , заданих загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ відповідно.

Очевидно, площини Q_1 та Q_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли перпендикулярні їх нормальні вектори $\vec{n}_1 = (A_1 \ B_1 \ C_1)^T$ та $\vec{n}_2 = (A_2 \ B_2 \ C_2)^T$, тобто тоді і тільки тоді, коли скалярний добуток нормальних векторів \vec{n}_1 і \vec{n}_2 дорівнює нулю: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

З цих міркувань випливає, що **площини Q_1 та Q_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли**

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$



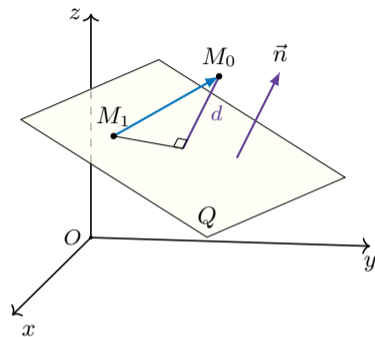
III. Відстань від точки до площини

Нехай у просторі $Oxyz$ задана площина Q загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$ і точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Знайдемо відстань від точки M_0 до площини Q .

Відстань d від точки M_0 до площини Q дорівнює модулю проекції вектора

$$\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1 \quad y_0 - y_1 \quad z_0 - z_1)^T,$$

де $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – довільна точка площини Q , на напрямок нормального вектора $\vec{n} = (A \ B \ C)^T$.



Тому

$$\begin{aligned}d &= |\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1 M_0}| = \left| \frac{\overrightarrow{M_1 M_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.\end{aligned}$$

Але точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ належить площині Q , а отже $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Звідси $-Ax_1 - By_1 - Cz_1 = D$, і

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

- [1] Алексеева, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Федорова, Л. Б. *Математика в технічному університеті*. (Т. 1). К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018
- [2] Булдигін, В.В., Алексеева, І.В., Гайдей, В.О., Диховичний, О.О., Коновалова, Н.Р., Федорова, Л.Б. *Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник*. — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с.
- [3] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.
- [4] *Конспект лекцій з аналітичної геометрії та лінійної алгебри для студентів технічних факультетів* // Уклад.: З.П. Ординська, І.В. Орловський, М.К. Руновська. – К.: НТУУ «КПІ», Електронне навчальне видання, свідоцтво № 030513. – 2013. – 131 с.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!