Linear algebra and analytical geometry for engineers

Lecture 13: Second order curves and their classification. Ellipse

Lecturer: Igor Orlovskyi

Зміст

1. Загальне рівняння кривої другого порядка

Означення 1

Кривою другого порядка на площині називається сукупність точок (геометричне місце точок), які в деякій декартовій системі координат Oxy задовольняють алгебраїчне рівняння другого порядка:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1}$$

де A, B, C, D, E, F – дійсні числа, причому принаймні одне з чисел A, B, C не дорівнює нулю. ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$).

Рівняння (1) називається загальним рівнянням кривої другого порядку.

Теорема 1

Загальне рівняння (1) кривої другого порядка, задане у декартовій системі координат Oxy, за допомогою перетворення системи координат можна звести до одного з наступних виглядів:

I $\widehat{A}x_2^2 + \widehat{C}y_2^2 + \widehat{F} = 0, \quad \widehat{A}\cdot\widehat{C} \neq 0;$

II $\widehat{C}y_2^2 + 2\widehat{D}x_2 = 0, \quad \widehat{C}\cdot\widehat{D} \neq 0,$ *або* $\widehat{A}x_2^2 + 2\widehat{E}y_2 = 0, \quad \widehat{A}\cdot\widehat{E} \neq 0;$

III $\widehat{A}x_2^2 + \widehat{F} = 0, \quad \widehat{A} \neq 0,$ *або* $\widehat{C}y_2^2 + \widehat{F} = 0, \quad \widehat{C} \neq 0,$

де x_2 і y_2 — змінні у новій декартовій системі координат Ox_2y_2.

Рівняння **I**, **II**, **III**, наведені у теоремі 1, називаються найпростішими рівняннями кривих другого порядка.

Класифікація кривих другого порядка

Відповідно до теореми 1 рівняння (1) задає у деякій декартовій системі координат одну з наступних 9 ліній:

I

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — еліпс
2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ — уявний еліпс
3. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — дві уявні прямі, що перетинаються
4. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — гіпербола
5. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — пара прямих, що перетинаються

II

6. $x^2 = 2py$ — парабола

III

7. $x^2 = a^2$ — пара паралельних прямих
8. $x^2 = -a^2$ — пара уявних паралельних прямих
9. $x^2 = 0$ — дві прямі, що співпадають

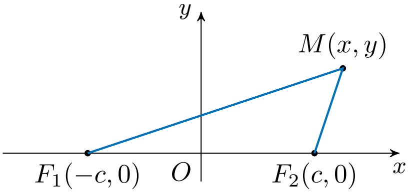
2. Еліпс, його канонічне рівняння

Означення 2

Еліпсом називається геометричне місце точок площини таких, що сума відстаней від кожної з них до двох фіксованих точок площини, які називаються фокусами, є величиною сталою і більшою за відстань між фокусами.

Канонічне рівняння еліпса

Зафіксуємо дві точки площини — фокуси F_1 і F_2. Розглянемо на площині таку декартову систему координат Oxy, що вісь Ox проходить через фокуси F_1 і F_2 у напрямі від F_1 до F_2, а точка O є серединою відрізка F_1F_2. Вісь Oy проведемо через точку O, перпендикулярно осі Ox.



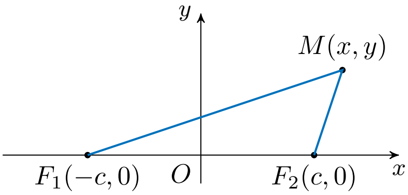
Таким чином, $F_1(-c,0)$ і $F_2(c,0)$, де c — відоме додатне дійсне число.
Нехай $M(x,y)$ — довільна точка еліпса, та сума відстаней від точки $M(x,y)$ до фокусів дорівнює $2a$, тобто

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a.$$

Відрізки $|MF_1|$ і $|MF_2|$ називаються фокальними радіусами.

Оскільки

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad |MF_2| = \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$



то

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a \quad \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2((x-c)^2+y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

За означенням еліпса $a > c$. Тому, покладаючи $a^2 - c^2 = b^2$, отримаємо рівняння

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

звідки

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (2)$$

Рівняння (2) називається канонічним рівнянням еліпса. Зауважимо, що у випадку, коли $a = b$, рівняння (2) описує на площині коло з центром у початку координат та радіуса $R = a$. Отже, довільна точка, що належить еліпсу, у деякій декартовій системі координат задовольняє рівняння (2).

Зауважимо, що у деяких задачах від канонічного рівняння еліпса зручно переходити до його параметричного рівняння:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Форма та характеристики еліпса

Дослідимо за рівнянням (2) форму та розташування еліпса.

1. Змінні x та y входять у рівняння (2) у парних степенях. Тому, якщо точка (x, y) належить еліпсу, то і точки $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ також належать еліпсу. Отже, фігура симетрична відносно осей Ox та Oy, а також точки $O(0, 0)$, яку називають центром еліпса.
2. Знайдемо точки перетину еліпса з осями координат. Підставивши у рівняння (2) $y = 0$, отримаємо, що вісь Ox еліпс перетинає у точках $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$. Поклавши $x = 0$, отримаємо дві точки $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$, в яких еліпс перетинає вісь Oy. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 називають вершинами еліпса.
   Відрізки A_1A_2 та B_1B_2, а також їх довжини $2a$ і $2b$ називають відповідно великою та малою осями еліпса. Числа a і b називають відповідно великою та малою півосями еліпса.

3. З рівняння (2) також випливає, що

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1 \text{ і } \frac{y^2}{b^2} \leq 1,$$

звідки

$$-a \leq x \leq a \text{ і } -b \leq y \leq b.$$

Тобто всі точки еліпса знаходяться всередині прямокутника, утвореного прямими

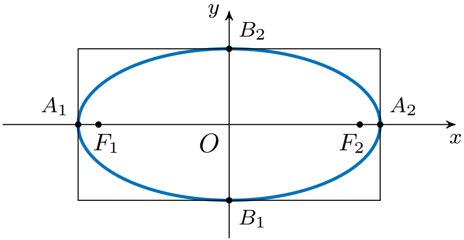
$$x = \pm a \text{ і } y = \pm b.$$

4. Візьмемо на еліпсі точку (x, y) у першій чверті, тобто $x \geq 0$, $y \geq 0$, а тому

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \; 0 \leq x \leq a.$$

Оскільки $y' = -\dfrac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} < 0$, при $0 < x < a$, то функція монотонно спадає при $0 < x < a$.

Аналогічно, оскільки $y'' = -\dfrac{ab}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} < 0$, при $0 < x < a$, то функція є опуклою вгору при $0 < x < a$. Таким чином, еліпс є замкненою овальною кривою. За встановленими характеристиками побудуємо еліпс:



5

Означення 3

Відношення половини відстані між фокусами до більшої півосі $\frac{c}{a}$ називається ***ексцентриситетом*** *еліпса і позначається літерою ε:*

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Зауважимо, що $0 < \varepsilon < 1$.
Перепишемо ексцентриситет наступним чином:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

тобто

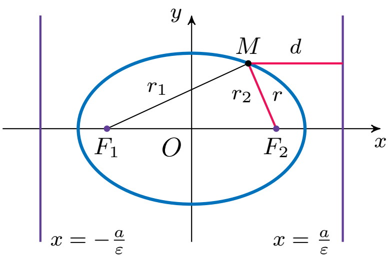
$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Звідси випливає, що чим меншим є ексцентриситет, тим меньше сплющений еліпс.

⑥ Нехай $M(x, y)$ — довільна точка еліпса. Розглянемо фокальні радіуси $|MF_1| = r_1$ і $|MF_2| = r_2$. Тоді $r_1 + r_2 = 2a$, і мають місце рівності:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x.$$

Прямі $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ називаються директрисами еліпса. Значення директрис еліпса міститься у наступній теоремі.



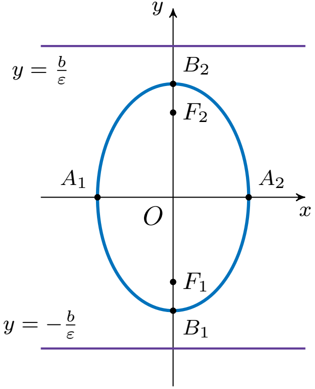
Твердження 1

Якщо r — відстань від довільної точки еліпса до одного з двох фокусів, а d — відстань від цієї ж точки до відповідної цьому фокусу директриси, то відношення $\frac{r}{d}$ є величиною сталою, рівною ексцентриситету ε.

7. Якщо $a < b$, то рівняння (2) описує еліпс, більша вісь якого $2b$ лежить на осі Oy, а мала вісь $2a$ — на осі Ox. При цьому фокуси знаходяться у точках

$$F_1(0, c), \quad F_2(0, -c),$$

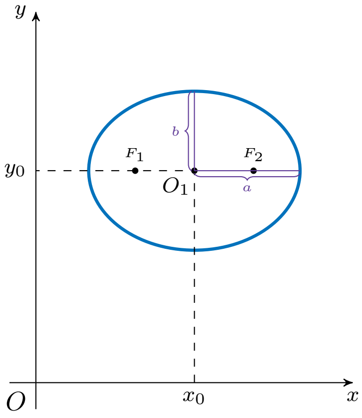
де $c^2 = b^2 - a^2$, $\varepsilon = \frac{c}{b}$, а директриси мають рівняння $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$.



❽ Якщо центр еліпса знаходиться у точці $O_1(x_0, y_0)$, то його канонічне рівняння має вигляд:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

При цьому, якщо $a > b$, то фокуси знаходяться у точках $F_1(x_0 + c, y_0)$ і $F_2(x_0 - c, y_0)$, а директриси задаються рівняннями: $x = x_0 \pm \frac{a}{\varepsilon}$.

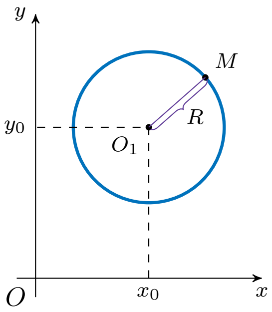


9. Якщо $a = b = R$, то рівняння

$$\frac{(x-x_0)^2}{R^2} + \frac{(y-y_0)^2}{R^2} = 1 \Leftrightarrow$$
$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

задає на площині коло з центром в точці $O_1(x_0, y_0)$ і радіуса R. Останнє рівняння називають канонічним рівнянням кола.

Рівняння кола можна безпосередньо отримати із означення кола як геометричного місця точок площини.



Означення 4

Колом називають геометричне місце точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки площини, яку називають центром кола. Відрізок, який сполучає центр кола з будь-якою його точкою, а також довжину цього відрізка називають радіусом кола.

Приклад 1

Знайти всі характеристики еліпса $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.
Розв'язання. Спочатку зведемо рівняння до канонічного вигляду:

$$4x^2 + 9y^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

З отриманого канонічного рівняння еліпса заключаємо, що центр еліпса буде у початку координат $O(0,0)$, більшою піввіссю еліпса буде$a = 3$, а меншою – $b = 2$. Тоді осями еліпса будуть $2a = 6$, $2b = 4$.
Вершини еліпса

$$A_1(-3,0),\ A_2(0,3),\ B_1(0,-2),\ B_2(0,2).$$

Для визначення координат фокусів знайдемо

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}.$$

Отже, фокуси

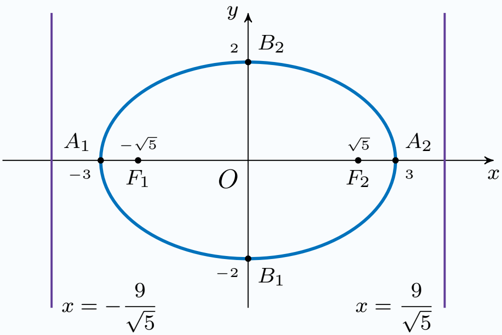
$$F_1\left(-\sqrt{5}, 0\right), \; F_2\left(\sqrt{5}, 0\right),$$

а ексцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Залишилось знайти рівняння директрис

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} \;\Leftrightarrow\; x = \pm\frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \;\Leftrightarrow\; x = \pm\frac{9}{\sqrt{5}}.$$



Література

[1] Алєксєєва, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Федорова, Л. Б. *Математика в технічному університеті.* (Т. 1). К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018

[2] Булдигін, В.В., Алєксєєва, І.В., Гайдей, В.О., Диховичний, О.О., Коновалова, Н.Р., Федорова, Л.Б. *Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник.* — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с.

[3] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.

[4] *Конспект лекцій з аналітичної геометрії та лінійної алгебри для студентів технічних факультетів* // Уклад.: З.П. Ординська, І.В. Орловський, М.К. Руновська. – К.: НТУУ «КПІ», Електронне навчальне видання, свідоцтво № 030513. – 2013. – 131 с.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!