

Linear algebra and analytical geometry for engineers

Lecture 12: Lines in a three-dimensional space. Different forms of the equation of the line

Lecturer: Igor Orlovskiy

- 1 Пряма в просторі, різні види її рівняння
- 2 Основні задачі для прямої у просторі
- 3 Основні задачі на пряму і площину у просторі

1. Пряма в просторі, різні види її рівняння

I. Канонічне рівняння прямої

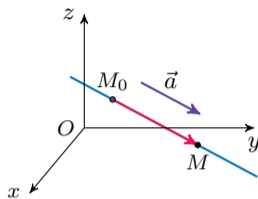
Складемо рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору $\vec{a} = (a_x \ a_y \ a_z)^T$.

Розглянемо довільну точку $M(x, y, z)$ прямої. Складемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0 \ y - y_0 \ z - z_0)^T$.

Зрозуміло, що вектор $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарний вектору \vec{a} . Звідси випливає, що координати векторів $\overrightarrow{M_0M}$ та \vec{a} пропорційні. Тому

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}. \quad (1)$$

Таким чином, ми отримали рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ паралельно вектору \vec{a} . Це рівняння називають **канонічним рівнянням прямої**, а вектор $\vec{a} = (a_x \ a_y \ a_z)^T$ називають **напрямним вектором** прямої.



Розглянемо деякі частинні випадки:

- 1 Якщо $a_x = 0$, то пряма перпендикулярна осі Ox і лежить у площині $x = x_0$;
- 2 Якщо $a_y = 0$, то пряма перпендикулярна осі Oy і лежить у площині $y = y_0$;
- 3 Якщо $a_z = 0$, то пряма перпендикулярна осі Oz і лежить у площині $z = z_0$;
- 4 Якщо $a_x = 0$ і $a_y = 0$, то пряма перпендикулярна площині Oxy , і перетинає цю площину в точці $(x_0, y_0, 0)$. Таким чином, пряма паралельна осі Oz ;
- 5 Якщо $a_x = 0$ і $a_z = 0$, то пряма перпендикулярна площині Oxz , і перетинає цю площину в точці $(x_0, 0, z_0)$. Таким чином, пряма паралельна осі Oy ;
- 6 Якщо $a_y = 0$ і $a_z = 0$, то пряма перпендикулярна площині Oyz , і перетинає цю площину в точці $(0, y_0, z_0)$. Таким чином, пряма паралельна осі Ox .

II. Параметричне рівняння прямої

З канонічного рівняння випливає, що

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z} = t.$$

Виражаючи з цього рівняння змінні x , y та z отримаємо рівняння прямої

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t, \\ y = y_0 + a_y t, \\ z = z_0 + a_z t, \end{cases}$$

яке називають **параметричним рівнянням**.

III. Рівняння прямої, яка проходить через дві точки

Нехай пряма L проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Знайдемо її рівняння.

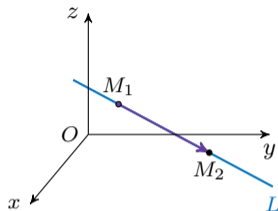
Помітимо, що вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1 \quad y_2 - y_1 \quad z_2 - z_1)^T$$

паралельний прямій L , а тому його можна взяти у якості напрямного вектора. Тоді, використовуючи канонічне рівняння (1) з точкою M_1 та напрямним вектором $\overrightarrow{M_1M_2}$, отримаємо

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

яке називають **рівнянням прямої, яка проходить через дві точки**.



IV. Загальне рівняння прямої

Пряму L у просторі можна задавати як лінію перетину двох площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Кожне рівняння системи є рівнянням площини. Якщо площини не паралельні, тобто координати нормальних векторів $\vec{n}_1 = (A_1 \ B_1 \ C_1)^T$ і $\vec{n}_2 = (A_2 \ B_2 \ C_2)^T$ не пропорційні, то система (2) визначає пряму як геометричне місце точок простору, координати яких задовольняють кожному з рівнянь системи. Рівняння (2) називають **загальним рівнянням прямої**.

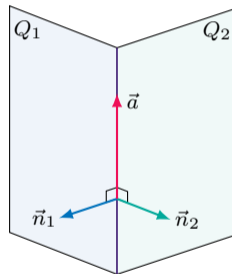
Розглянемо, як від загального рівняння (2) прямої перейти до її канонічного рівняння. Знайдемо деяку точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що задовольняє обом рівнянням системи. Для цього, наприклад, можна покласти $z_0 = 0$, а координати x_0 і y_0 знайти з системи

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + D_1 = 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + D_2 = 0. \end{cases}$$

Оскільки пряма L перпендикулярна векторам $\vec{n}_1 = (A_1 \ B_1 \ C_1)^T$ і $\vec{n}_2 = (A_2 \ B_2 \ C_2)^T$, то її напрямний вектор \vec{a} колінеарний їх векторному добутку. Таким чином, можна взяти у якості напрямного вектора прямої L

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Далі, підставляючи координати точки M_0 та координати вектора \vec{a} у рівняння (1), отримаємо канонічний вигляд рівняння прямої.



Зауваження

Від загального рівняння прямої до її канонічного рівняння можна перейти, вибравши дві різні точки, що задовольняють систему (2), тобто лежать на прямій, та скориставшись рівнянням прямої, яка проходить через дві точки.

Приклад 1

Нехай пряму L задано загальним рівнянням $L : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y - 3z + 5 = 0. \end{cases}$ Записати канонічне та параметричне рівняння прямої L .

Розв'язання. Для отримання канонічного рівняння L , знайдемо спочатку координати деякої точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що лежить на прямій. Для цього покладемо $z_0 = 0$ і підставимо це значення в загальне рівняння L . Отримаємо систему

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + 1 = 0 \\ 2x_0 - y_0 + 5 = 0 \end{cases} \leftarrow IIr. + Ir. \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 + 1 = 0 \\ 3x_0 + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 1 \\ x_0 = -2 \end{cases},$$

звідки $M_0(-2, 1, 0)$. Для отримання канонічного залишилось знайти координати напрямного вектора прямої. Використовуючи (3):

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}.$$

Отже, канонічне рівняння прямої має вигляд: $\frac{x + 2}{-4} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z}{-3}$.

Перейдемо до знаходження параметричного рівняння прямої L . Запишемо канонічне рівняння у наступному вигляді:

$$\frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-3} = t \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - 4t; \\ y = 1 + t; \\ z = -3t. \end{cases}$$

Відповідь: канонічне рівняння L : $\frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-3}$,

параметричне рівняння L : $\begin{cases} x = -2 - 4t; \\ y = 1 + t; \\ z = -3t. \end{cases}$

2. Основні задачі для прямої у просторі

I. Кут між прямими

Нехай у просторі прямі L_1 і L_2 задані канонічними рівняннями

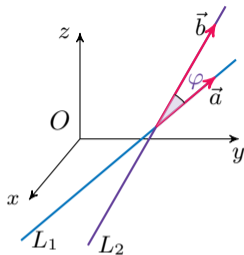
$$\frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y} = \frac{z - z_1}{a_z}, \quad \frac{x - x_2}{b_x} = \frac{y - y_2}{b_y} = \frac{z - z_2}{b_z}$$

відповідно. Під кутом між прямими L_1 і L_2 розуміють кут між напрямними векторами $\vec{a} = (a_x \ a_y \ a_z)^T$ та $\vec{b} = (b_x \ b_y \ b_z)^T$ прямих L_1 і L_2 . Тому

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Для знаходження гострого кута між прямими L_1 і L_2 у правій частині останньої рівності чисельник необхідно взяти по модулю:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{|a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$



II. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай дві прямі задано канонічними рівняннями

$$L_1 : \frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y} = \frac{z - z_1}{a_z}, \quad L_2 : \frac{x - x_2}{b_x} = \frac{y - y_2}{b_y} = \frac{z - z_2}{b_z}.$$

Прямі L_1 і L_2 паралельні тоді і тільки тоді, коли колінеарні їх напрямні вектори $\vec{a} = (a_x \ a_y \ a_z)^T$ та $\vec{b} = (b_x \ b_y \ b_z)^T$. Таким чином, дві прямі у просторі паралельні тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Якщо $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$, де $M_1(x_1, y_1, z_1)$ та $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – точки, які лежать на прямих L_1 та L_2 відповідно, то прямі L_1 та L_2 паралельні різні, а при $\vec{a} \parallel \vec{b} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$ – співпадають.

Прямі L_1 і L_2 перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли перпендикулярні їх напрямні вектори, тобто $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. В свою чергу, ця умова рівносильна тому, що

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

III. Умова, при якій дві прямі лежать в одній площині

Нехай дві прямі задано канонічними рівняннями

$$L_1 : \frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y} = \frac{z - z_1}{a_z}, \quad L_2 : \frac{x - x_2}{b_x} = \frac{y - y_2}{b_y} = \frac{z - z_2}{b_z}.$$

З'ясуємо, за якої умови прямі L_1 і L_2 лежать в одній площині.

Напрямними векторами прямих L_1 і L_2 є вектори $\vec{a} = (a_x \ a_y \ a_z)^T$ та $\vec{b} = (b_x \ b_y \ b_z)^T$, відповідно. Точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ належить прямій L_1 , а точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – прямій L_2 .

Прямі L_1 і L_2 лежать в одній площині тоді і тільки тоді,

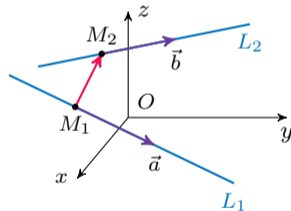
коли вектори $\vec{a} = (a_x \ a_y \ a_z)^T$, $\vec{b} = (b_x \ b_y \ b_z)^T$

та $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1 \ y_2 - y_1 \ z_2 - z_1)^T$ компланарні,

тобто $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$, або

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0.$$

Якщо при цьому $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то прямі паралельні, а при $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ – перетинаються.



IV. Умова мимобіжності прямих

Нехай дві прямі задано канонічними рівняннями

$$L_1 : \frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y} = \frac{z - z_1}{a_z}, \quad L_2 : \frac{x - x_2}{b_x} = \frac{y - y_2}{b_y} = \frac{z - z_2}{b_z}.$$

З попереднього пункту випливає, що прямі L_1 і L_2 мимобіжними тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a} = (a_x \ a_y \ a_z)^T$, $\vec{b} = (b_x \ b_y \ b_z)^T$ та $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1 \ y_2 - y_1 \ z_2 - z_1)^T$ не компланарні, тобто $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}, \vec{b}) \neq 0$, або

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \neq 0.$$

V. Відстань від точки до прямої у просторі

Нехай у просторі задано пряму L канонічним рівнянням

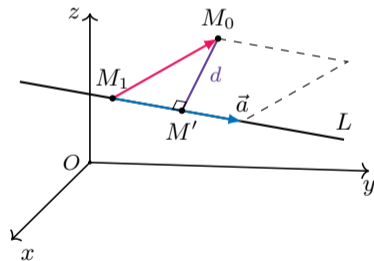
$$\frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y} = \frac{z - z_1}{a_z}.$$

і точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Знайдемо відстань d від точки M_0 до прямої L .

Від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ прямої L відкладемо напрямний вектор $\vec{a} = (a_x \ a_y \ a_z)^T$ та вектор $\overrightarrow{M_1M_0} = (x_0 - x_1 \ y_0 - y_1 \ z_0 - z_1)^T$.

Побудуємо на цих векторах, як на сторонах паралелограма. Помітимо, що відстань d від точки M_0 до прямої L буде дорівнювати висоті отриманого паралелограма. Оскільки площа паралелограма S , з одного боку, дорівнює $S = |\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{a}|$, а з іншого $S = |\vec{a}| \cdot d$, де $|\vec{a}|$ - довжина сторони паралелограма, а d - висота, то

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|} \quad (4)$$



V. Відстань між паралельними прямими у просторі

Нехай у просторі дві паралельні прямі задано канонічним рівнянням

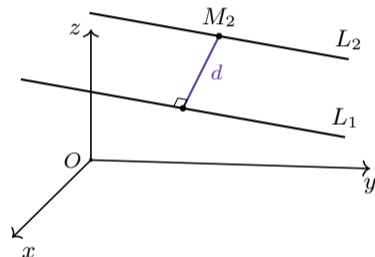
$$L_1 : \frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y} = \frac{z - z_1}{a_z}, \quad L_2 : \frac{x - x_2}{b_x} = \frac{y - y_2}{b_y} = \frac{z - z_2}{b_z} \quad (\vec{a} \parallel \vec{b}).$$

Знайдемо відстань d між цими прямими.

В силу паралельності прямих, відстань d між ними буде дорівнювати відстані від будь-якої точки прямої L_1 до прямої L_2 (або від будь-якої точки прямої L_2 до L_1).

Тоді, оберемо на прямій L_2 точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$ та скористаємося формулою (4) відстані від точки M_2 до прямої L_1 :

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1 M_2} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$



VI. Відстань між мимобіжними прямими у просторі

Нехай у просторі дві мимобіжні прямі задано канонічним рівнянням

$$L_1 : \frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y} = \frac{z - z_1}{a_z}, \quad L_2 : \frac{x - x_2}{b_x} = \frac{y - y_2}{b_y} = \frac{z - z_2}{b_z}.$$

Спільним перпендикуляром до мимобіжних прямих L_1 та L_2 називають пряму L , яка перетинає обидві прямі, та $L \perp L_1$ і $L \perp L_2$.

Зауважимо, що для прямих L_1 та L_2 існує єдина пара точок N_1 на прямій L_1 та N_2 на прямій L_2 така, що пряма N_1N_2 є спільним перпендикуляром до прямих L_1 та L_2 .

Знайдемо відстань $d = |N_1N_2|$ від цими прямими. Для цього проведемо через пряму L_1 площину Q , яка буде паралельна обом прямим. Тоді Q паралельна напрямним векторам $\vec{a} = (a_x \ a_y \ a_z)^T$ і $\vec{b} = (b_x \ b_y \ b_z)^T$ прямих L_1 та L_2 , відповідно, і у якості нормального вектора площини можна взяти вектор $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = (A \ B \ C)^T$. Таким чином, отримуємо рівняння площини Q , як рівняння площини, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, перпендикулярно вектору \vec{n} :

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

В силу побудови площина Q містить пряму L_1 та паралельна прямій L_2 . З останнього випливає, що відстань між прямими L_1 та L_2 буде співпадати з відстанню між прямою L_2 та площиною Q , що в свою чергу дорівнює відстані від будь-якої точки прямої L_2 до площини Q . Взявши у якості такої точки M_2 , та скориставшись формулою відстані від точки до площини, отримаємо

$$d = \frac{|A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Помітимо, що $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}, \vec{b})$, а $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = |\vec{n}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Остаточно отримуємо, що

$$d = \frac{|(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}, \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$

Зауваження

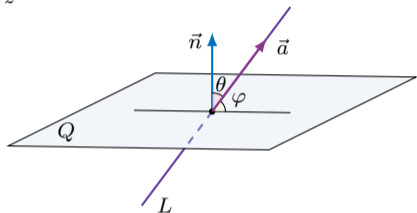
З геометричного змісту мішаного та векторного добутків випливає, що відстань $d = |N_1 N_2|$ між мимобіжними прямими буде дорівнювати висоті паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_1 M_2}$, \vec{a} , \vec{b} як на сторонах.

3. Основні задачі на пряму і площину у просторі

I. Кут між прямою і площиною

Нехай у просторі площина Q задана загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$ і пряма L задана канонічним рівнянням $\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$.

Кутом між прямою і площиною називають кут між прямою та проекцією цієї прямої на площину. Нехай φ – кут між прямою L і площиною Q , а θ – кут між напрямним вектором прямої $\vec{a} = (a_x \ a_y \ a_z)^T$ і нормальним вектором площини $\vec{n} = (A \ B \ C)^T$.



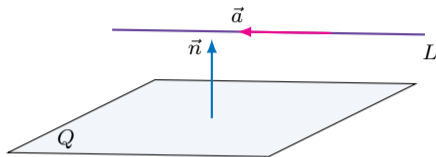
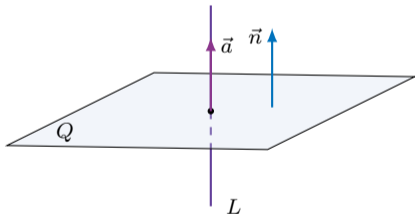
Тоді $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}$. Але $\theta = \frac{\pi}{2} \pm \varphi$. Оскільки $\sin \varphi \geq 0$, то $\sin \varphi = |\cos \theta|$, а тому

$$\sin \varphi = |\cos \theta| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|Aa_x + Ba_y + Ca_z|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

II. Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини

Пряма L паралельна площині Q тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a} = (a_x \ a_y \ a_z)^T$ і $\vec{n} = (A \ B \ C)^T$ перпендикулярні, тобто $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$. Таким чином, пряма паралельна площині тоді і тільки тоді, коли

$$Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0.$$



Пряма L перпендикулярна площині Q тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a} = (a_x \ a_y \ a_z)^T$ і $\vec{n} = (A \ B \ C)^T$ колінеарні, тобто

$$\frac{A}{a_x} = \frac{B}{a_y} = \frac{C}{a_z}.$$

III. Перетин прямої і площини. Умова, при якій пряма лежить у площині

Знайдемо точку перетину прямої:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$$

з площиною $Q : Ax + By + Cz + D = 0$.

Для цього необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z} \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}.$$

Найпростіше це зробити, записавши рівняння прямої у параметричному вигляді. В результаті остання система набуває вигляду:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t \\ y = y_0 + a_y t \\ z = z_0 + a_z t \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Звідки $A(x_0 + a_x t) + B(y_0 + a_y t) + C(z_0 + a_z t) + D = 0$, або

$$(Aa_x + Ba_y + Ca_z) \cdot t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \quad (5)$$

- Якщо $Aa_x + Ba_y + Ca_z \neq 0$, то отримаємо

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Aa_x + Ba_y + Ca_z}.$$

Далі, підставляючи значення параметра t у координати прямої

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t; \\ y = y_0 + a_y t; \\ z = z_0 + a_z t, \end{cases}$$

отримаємо точку перетину $M(x, y, z)$ прямої L з площиною Q .

- Якщо $Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0$, але $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то рівняння (5) набуває вигляду

$$0 \cdot t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0,$$

тобто рівняння не має розв'язків. В цьому випадку пряма L і площина Q не мають спільних точок, тобто пряма L паралельна площині Q .

- Якщо $Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то рівняння (5) набуває вигляду

$$0 \cdot t + 0 = 0,$$

тобто має безліч розв'язків. В цьому випадку пряма і площина мають безліч спільних точок, тобто пряма L лежить у площині Q . Отже, умова

$$\begin{cases} Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \end{cases}$$

є умовою, при якій пряма L лежить у площині Q .

- [1] Алексеева, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Федорова, Л. Б. *Математика в технічному університеті*. (Т. 1). К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018
- [2] Булдигін, В.В., Алексеева, І.В., Гайдей, В.О., Диховичний, О.О., Коновалова, Н.Р., Федорова, Л.Б. *Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник*. — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с.
- [3] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика*, – К.: Вища школа, 1998.
- [4] *Конспект лекцій з аналітичної геометрії та лінійної алгебри для студентів технічних факультетів* // Уклад.: З.П. Ординська, І.В. Орловський, М.К. Руновська. – К.: НТУУ «КПІ», Електронне навчальне видання, свідоцтво № 030513. – 2013. – 131 с.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!