Linear algebra and analytical geometry for engineers

Lecture 14: Second order curves: hyperbola and parabola

Lecturer: Igor Orlovskyi

Зміст

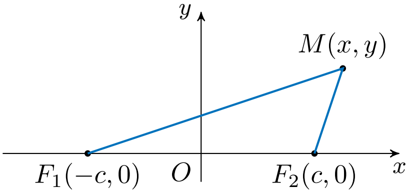
1. Гіпербола, її канонічне рівняння

Означення 1

<u>Гіперболою</u> називають геометричне місце точок площини таких, що модуль різниці відстаней від кожної з них до двох фіксованих точок площини, які називають <u>фокусами</u>, є величиною сталою і меншою за відстань між фокусами.

Канонічне рівняння гіперболи

Зафіксуємо дві точки площини — фокуси F_1 і F_2. Розглянемо на площині таку декартову систему координат Oxy, що вісь Ox проходить через фокуси F_1 і F_2 у напрямі від F_1 до F_2, а точка O є серединою відрізка F_1F_2. Вісь Oy проведемо через точку O, перпендикулярно осі Ox.



Таким чином, $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$, де c — відоме додатне дійсне число. Нехай $M(x, y)$ — довільна точка гіперболи. За означенням гіперболи модуль різниці відстаней від точки $M(x, y)$ до фокусів є сталою величиною, рівною $2a$, тобто

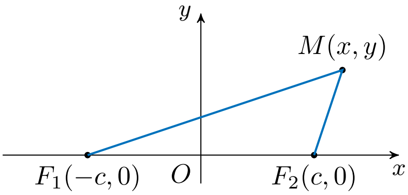
$$\Big| |MF_1| - |MF_2| \Big| = 2a.$$

Відрізки $|MF_1|$ і $|MF_2|$ називаються фокальними радіусами.

Оскільки

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad |MF_2| = \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

то



$$\begin{aligned}
|MF_1| - |MF_2| = \pm 2a \ &\Leftrightarrow\ \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ (x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2 \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ \mp a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ a^2((x-c)^2+y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).
\end{aligned}$$

За означенням гіперболи $a < c$. Тому, покладаючи $c^2 - a^2 = b^2$, отримаємо рівняння

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2,$$

звідки

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Рівняння (1) називають канонічним рівнянням гіперболи.
Отже, довільна точка, що належить гіперболі, у деякій декартовій системі координат задовольняє рівняння (1).

Форма та характеристики гіперболи

Дослідимо за рівнянням (1) форму та розташування гіперболи.

1. Змінні x та y входять у рівняння (1) у парних степенях. Тому, якщо точка (x, y) належить гіперболі, то і точки $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ також належать гіперболі. Отже, фігура симетрична відносно осей Ox та Oy, а також точки $O(0, 0)$, яку називають центром гіперболи.
2. Знайдемо точки перетину гіперболи з осями координат. Підставивши у рівняння (1) $y = 0$, отримаємо, що гіпербола перетинає вісь Ox у точках $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$. Поклавши $x = 0$, отримаємо рівняння $y^2 = -b^2$, яке не має розв'язків. Отже, гіпербола не перетинає вісь Oy. Точки A_1, A_2 називаються вершинами гіперболи.
   Відрізок A_1A_2 або його довжину $2a$ називають дійсною віссю гіперболи, а відрізок B_1B_2, де $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$, або його довжина $2b$ — уявною віссю гіперболи. Числа a і b називаються відповідно дійсною та уявною півосями гіперболи.
   Прямокутник, утворений осями $2a$ та $2b$ називають головним прямокутником гіперболи.

3. З рівняння (1) випливає, що $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$, тобто $|x| \geq a$. Це означає, що всі точки гіперболи розташовані справа від прямої $x = a$ (права гілка гіперболи) і зліва від прямої $x = -a$ (ліва гілка гіперболи).
4. Візьмемо на гіперболі точку (x, y) у першій чверті, тобто $x \geq 0$, $y \geq 0$, а тому

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \; x \geq a.$$

Оскільки $y' = \dfrac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} > 0$, при $x > a$, то функція монотонно зростає при $x > a$.

Аналогічно, оскільки $y'' = -\dfrac{ab}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} < 0$, при $x > a$, то функція є опуклою вгору при $x > a$.

5. **Асимптоти гіперболи**. Гіпербола має дві асимптоти. Знайдемо асимптоту до гілки гіперболи, що знаходиться у першій чверті, а потім скористаємося симетрією. Розглянемо точку (x, y) у першій чверті, тобто $x \geq 0$, $y \geq 0$. В цьому випадку

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \;\; x \geq a.$$

Тоді асимптота матиме вигляд $y = kx + \tilde{b}$, де

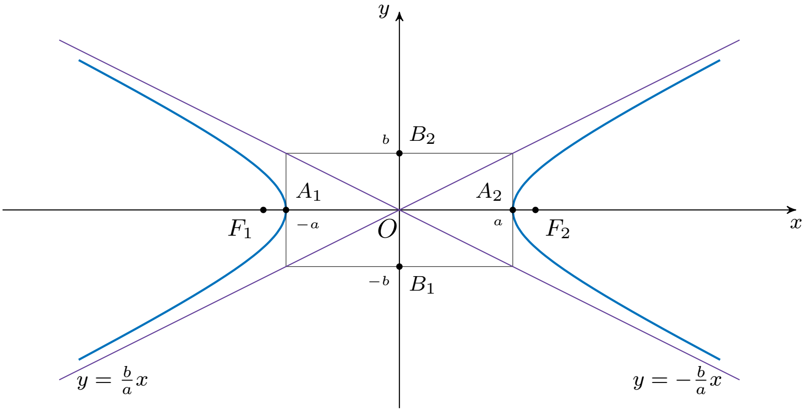
$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \frac{b}{a},$$

$$\tilde{b} = \lim_{x \to +\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x\right) =$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - a^2} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 - a^2} + x\right)} = \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \frac{-a^2}{\left(\sqrt{x^2 - a^2} + x\right)} = 0.$$

Отже, пряма $y = \frac{b}{a}x$ є асимптотою функції $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \geq a$. Тому в силу симетрії асимптотами гіперболи є прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$.

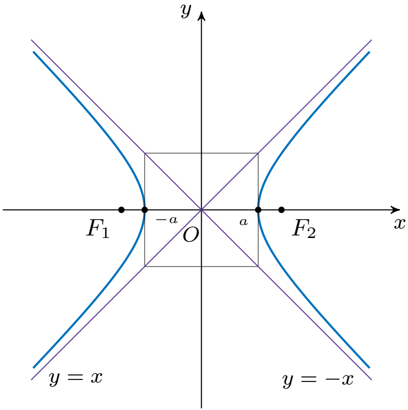
За встановленими характеристиками побудуємо гілку гіперболи, що знаходиться у першій чверті, та скористаємося симетрією:



6. У випадку, коли $b = a$, тобто гіпербола описується рівнянням

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

гіперболу називають рівнобічною.
Рівнобічна гіпербола має асимптоти, які є бісектрисами координатних кутів: $y = \pm x$.



7

Означення 2

Відношення половини відстані між фокусами до дійсної півосі $\frac{c}{a}$ називається ***ексцентриситетом*** *гіперболи і позначається літерою ε:*

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Зауважимо, що для гіперболи $\varepsilon > 1$, оскільки $c > a$. Ексцентриситет характеризує форму гіперболи. Дійсно, оскільки

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1},$$

то чим менше ексцентриситет гіперболи, тим менше відношення півосей гіперболи $\frac{b}{a}$, і тим більше розтягнутий її головний прямокутник.
У рівнобічної гіперболи $\varepsilon = \sqrt{2}$.

8. Нехай $M(x,y)$ — довільна точка гіперболи. Розглянемо фокальні радіуси $|MF_1| = r_1$ і $|MF_2| = r_2$. Для точок правої гілки гіперболи вони мають вигляд:

$$r_1' = a + \varepsilon x, \quad r_2' = -a + \varepsilon x.$$

Для точок лівої гілки гіперболи фокальні радіуси задаються формулами

$$r_1'' = -a - \varepsilon x, \quad r_2'' = a - \varepsilon x.$$

Прямі $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ називаються директрисами гіперболи.

Оскільки у гіперболи $\varepsilon > 1$, то $\dfrac{a}{\varepsilon} < a$, тобто її директриси розташовані між початком координат та вершинами $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$.

Значення директрис гіперболи міститься у наступній теоремі.

Твердження 1

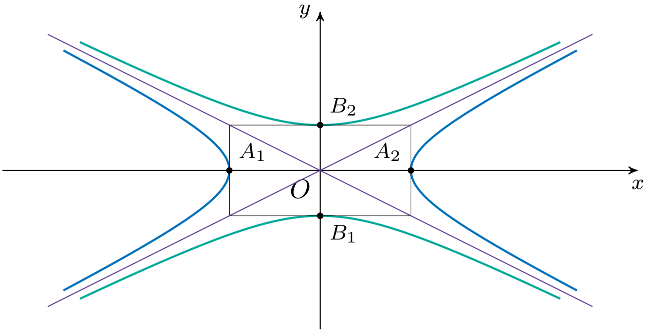
Якщо r — відстань від довільної точки гіперболи до одного з двох фокусів, а d — відстань від цієї ж точки до відповідної цьому фокусу директриси, то відношення $\dfrac{r}{d}$ є величиною сталою, рівною ексцентриситету гіперболи.

9. Крива, що задається рівнянням

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

також є гіперболою. Дійсна вісь $2b$ цієї гіперболи розташована на осі Oy, а уявна $2a$ — на осі Ox. Очевидно, що гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ та $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ мають однакові асимптоти.

Гіперболу $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ називають спряженою до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. На рисунку нижче спряжена гіпербола зображена зеленим кольором.



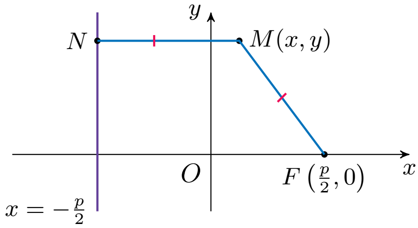
2. Парабола, її канонічне рівняння

Означення 3

Параболою називають геометричне місце точок площини, кожна з яких рівновіддалена від фіксованої точки площини, що називають фокусом, та фіксованої прямої, яку називають директрисою.

Відстань від фокуса до директриси параболи називають параметром параболи і позначають p ($p>0$).

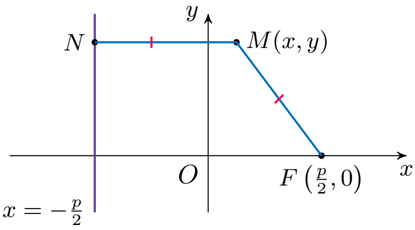
Зафіксуємо на площині фокус F та пряму — D — директрису параболи. Виберемо на площині декартову систему координат так, щоб вісь Ox проходила через фокус F перпендикулярно директрисі D у напрямку від директриси до фокуса. Початок координат помістимо у середині перпендикуляра, опущеного з фокуса на директрису. Вісь Oy проведемо через точку O, перпендикулярно осі Ox.



У вибраній системі координат $F(\frac{p}{2}, 0)$, а директриса D має рівняння $x = -\frac{p}{2}$.

Нехай $M(x, y)$ — довільна точка параболи. Знайдемо окремо відстань $|FM|$:

$$|FM| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$



Відрізок $|FM|$ називають фокальним радіусом точки M. Позначимо через N — основу перпендикуляра з точки M на директрису. Тоді

$$|MN| = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Таким чином, оскільки за означенням $|FM| = |MN|$, то

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Піднісши останню рівність до квадрату та спростивши її, отримаємо рівняння:

$$y^2 = 2px,$$

яке називають канонічним рівнянням параболи.

Форма та характеристики параболи

Дослідимо за канонічним рівнянням форму та розташування параболи.

1. У рівняння $y^2 = 2px$ змінна y входить у парній степені, звідки випливає, що парабола симетрична відносно осі Ox. Вісь Ox є віссю симетрії параболи.
2. Оскільки $p > 0$, то $x \geq 0$, звідки випливає, що парабола розташована справа від осі Oy.
3. При $x = 0$ маємо $y = 0$, тобто парабола проходить через початок координат. Точку $O(0, 0)$ називають вершиною параболи.

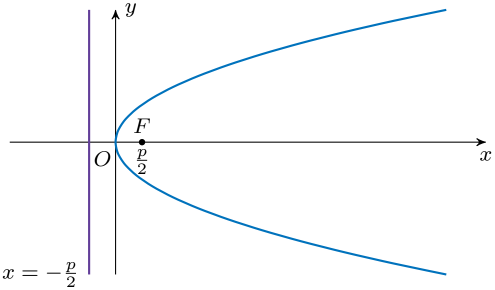
4. Візьмемо на параболі точку (x, y) у першій чверті, тобто $x \geq 0$, $y \geq 0$, а тому

$$y = \sqrt{2px}, \ x \geq 0.$$

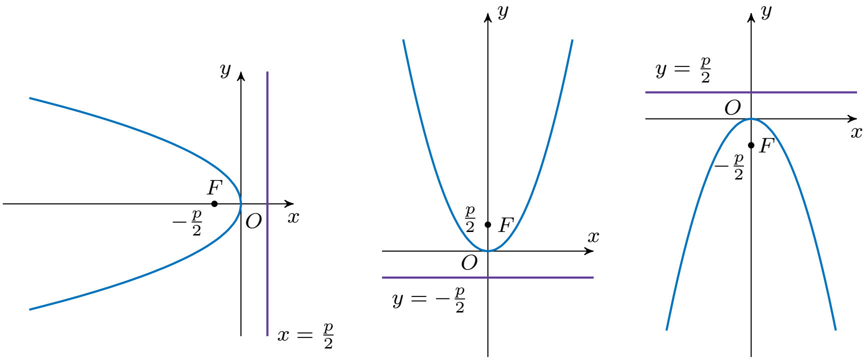
Оскільки $y' = \dfrac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}} > 0$, при $x > 0$, то функція монотонно зростає при $x > 0$.

Аналогічно, оскільки $y'' = -\dfrac{\sqrt{2p}}{4\sqrt{x^3}} < 0$, при $x > 0$, то функція є опуклою вгору при $x > 0$.

Зобразимо параболу на рисунку:



Рівняння $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ $(p > 0)$ також описують параболи:



$y^2 = -2px$ $x^2 = 2py$ $x^2 = -2py$

Література

[1] Алєксєєва, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Федорова, Л. Б. *Математика в технічному університеті.* (Т. 1). К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018

[2] Булдигін, В.В., Алєксєєва, І.В., Гайдей, В.О., Диховичний, О.О., Коновалова, Н.Р., Федорова, Л.Б. *Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник.* — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с.

[3] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика,* – К.: Вища школа, 1998.

[4] *Конспект лекцій з аналітичної геометрії та лінійної алгебри для студентів технічних факультетів* // Уклад.: З.П. Ординська, І.В. Орловський, М.К. Руновська. – К.: НТУУ «КПІ», Електронне навчальне видання, свідоцтво № 030513. – 2013. – 131 с.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!