

Course: R Language in Computational Probability and Statistics

Lecture 11: Continuous distributions and densities

Lecturer: Nataliia Kruhlova

Експоненціальний розподіл

Абсолютно неперервна випадкова величина розподілена за експоненціальним розподілом, якщо її щільність розподілу задається формулою:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Функції, які реалізовані для цього розподілу:

-**dexp(x, rate...)**,

-**rexp(q, rate...)**,

- **qexp(p, rate...)**,

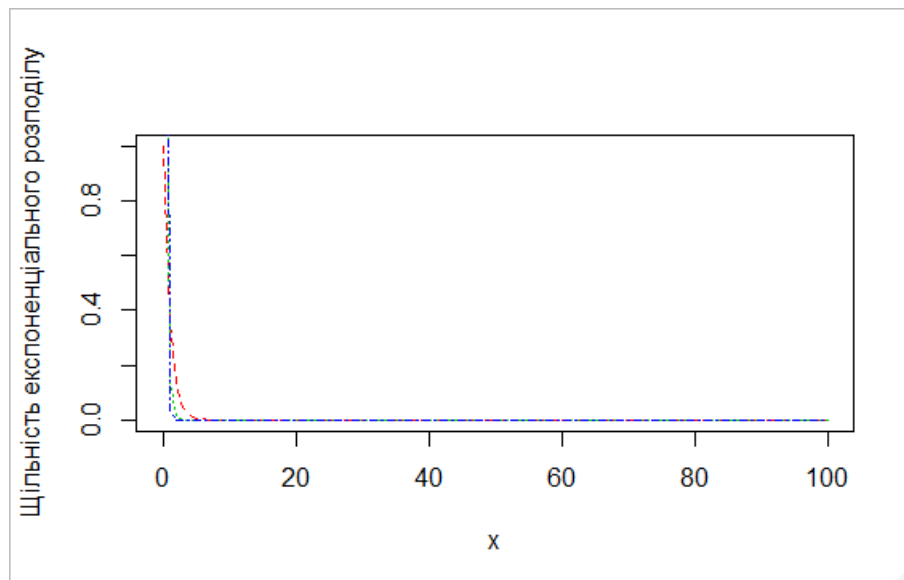
-**rexp(n, rate...)**.

Аргумент **rate** відповідає параметру λ експоненціального розподілу.

- **x, q**- невід'ємні числа,
- **rate**- невід'ємне число.

Приклад. Побудуйте графіки щільностей експоненціального розподілу для значень параметра розподілу 1, 3, 5.

```
> x<-c(0:100)
> r<-seq(1,5,by=2)
> y<-outer(x,r,"dexp")
> plot(x,y[,1],col=2,lty=2,type="l",ylab="Щільність
експоненціального розподілу")
> lines(x,y[,2],col=3,lty=3)
> lines(x,y[,3],col=4,lty=4)
```



Розподіл χ^2

χ^2 розподіл – розподіл абсолютно неперервної випадкової величини зі щільністю:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

В R для цього розподілу реалізовані наступні функції:

-dchisq(x, df...)

-pchisq(q, df...)

-qchisq(p, df...)

-rchisq(n, df...).

Аргументами функції є:

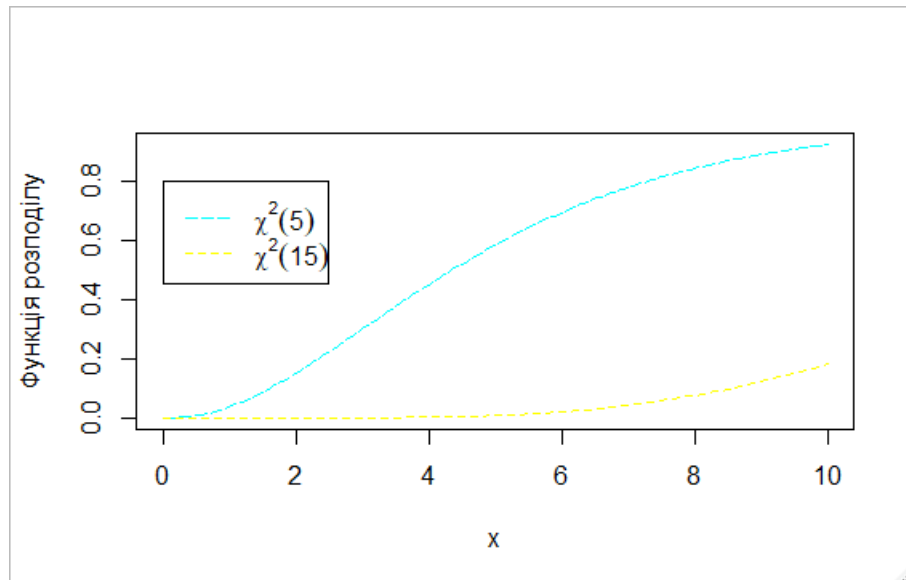
- **x** і **q** — невід’ємні числові вектори.
- **df** — число ступенів свободи. Додатне (не обов’язково ціле) число.
- **pcr** — параметр зміщення (невід’ємне число).

Приклад. Побудуємо графіки функцій розподілу для незміщеного розподілу χ^2 з 5 і 15 ступенями свободи.

```

> x<-seq(0,10,by=0.05)
> plot(x,pchisq(x,5),col=5,lty=5,type="l",ylab="Функція розподілу")
> curve(pchisq(x,15),col=15,lty=8,add=T)
> legend(0,0.8,c(expression({chi^2}(n=5)), expression({chi^2}(n=15))),
col=c(5,15),lty=c(5,8))

```



Логнормальний розподіл

Абсолютно неперервна випадкова величина ξ має логнормальний розподіл, якщо її щільність задається формулою:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma x}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Для цього розподілу реалізовані наступні функції:

-dlnorm(x, meanlog = 0, sdlog = 1...)

-plnorm(q, meanlog = 0, sdlog = 1...)

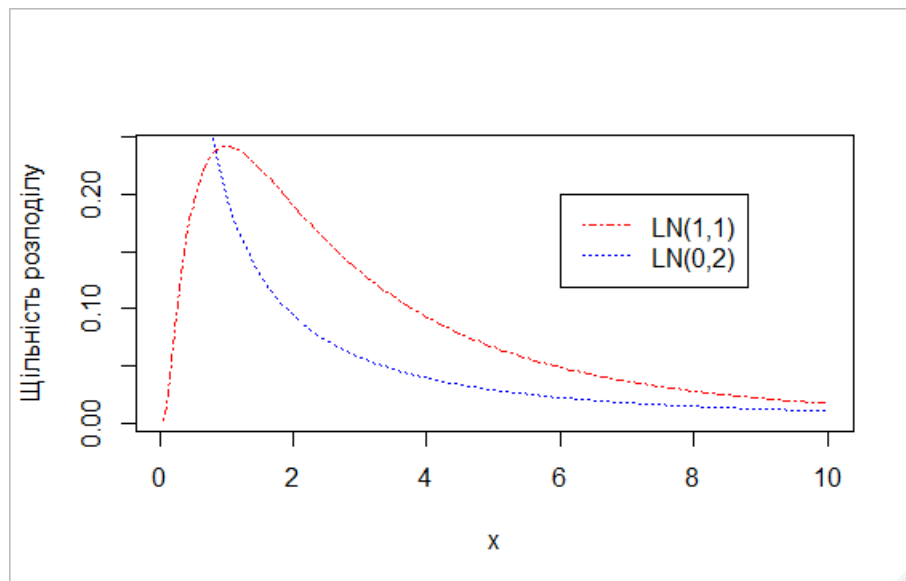
-qlnorm(p, meanlog = 0, sdlog = 1...)

-rlnorm(n, meanlog = 0, sdlog = 1).

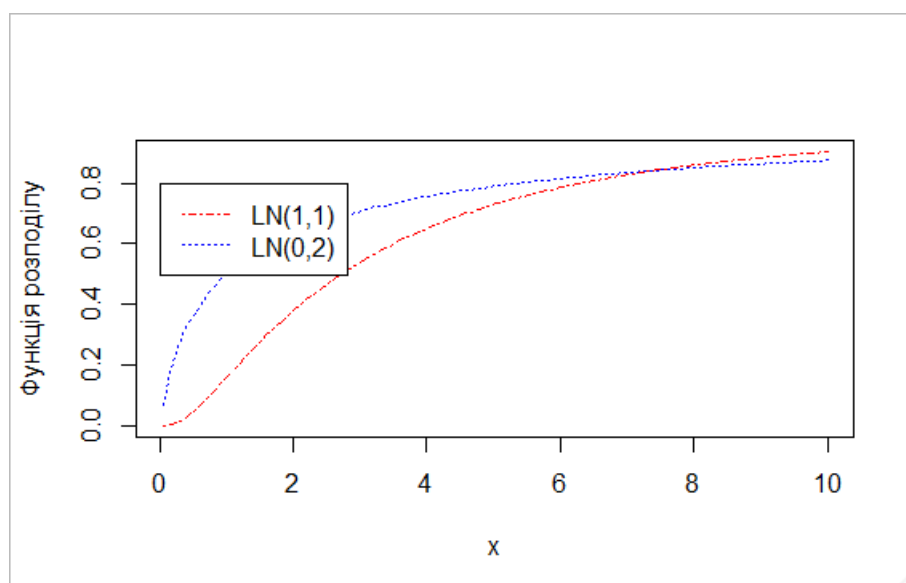
Аргументи **meanlog** і **sdlog** задають параметри розподілу.

Приклад. Побудуйте графіки щільностей і функцій розподілу для логнормальних розподілів з параметрами (1,1) і (0, 2).

```
> x<-seq(0.05,10,by=0.05)
> plot(x,dlnorm(x,1,1),col="red",lty=4,type="l",ylab="Щільність розподілу")
> curve(dlnorm(x,0,2),col="blue",lty=3,add=T)
> legend(6,0.2,c("LN(1,1)","LN(0,2)"),col=c("red","blue"),lty=c(4,3))
```



```
> plot(x,plnorm(x,1,1),col="red",lty=4,type="l",ylab="Функція розподілу")
> curve(plnorm(x,0,2),col="blue",lty=3,add=T)
> legend(0,0.8,c("LN(1,1)","LN(0,2)"),col=c("red","blue"),lty=c(4,3))
```



Нормальний розподіл

Абсолютно неперервна випадкова величина розподілена за нормальним законом, якщо її щільність розподілу виражається формулою:

$$f_{\xi}(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma}}$$

В R для цього розподілу реалізовані наступні функції:

- **dnorm(x, mean = 0, sd = 1...)**

- **pnorm(q, mean = 0, sd = 1...)**

- **qnorm(p, mean = 0, sd = 1...)**

- **rnorm(n, mean = 0, sd = 1).**

Аргументами є:

- **x**—вектор,
- **q** —вектор,
- **mean** і **sd** — параметри нормального закону (математичне сподівання і середньо квадратичне відхилення),
- **p** — вектор ймовірностей,
- **n** — об'єм вибірки.

Вказаний порядок аргументів функцій є обов'язковим.

Приклад. Відомо, стрілок зробив 1000 пострілів. Оскільки він погано влучає, то ймовірність влучення при одному пострілі у нього лише 1/3. Розрахуйте ймовірність того, що кількість влучень буде між 300 і 350. Згенеруйте 1000 разів вибірку і порівняйте частоту згаданої події (кількість влучень між 300 і 350) з відповідною ймовірністю.

```

> k1<-(300-1000/3)/sqrt(1000*(1-1/3)/3)
> k2<-(350-1000/3)/sqrt(1000*(1-1/3)/3)
> p<-pnorm(k2)-pnorm(k1)
> p
[1] 0.8555501
> n<-0
> for (i in 1:1000){
+ x<-rbinom(1000,size=1,prob=1/3)
+ k<-length(x[x==1])
+ if ( (k>=300)&(k<=350)) n<-n+1
+ }
> n/1000
[1] 0.854

```

Рівномірний розподіл

Випадкова величина має рівномірний розподіл, якщо її щільність задається формулою:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

В R реалізовані наступні функції для цього розподілу:

- dunif(x, min=0, max=1...),
- punif(q, min=0, max=1...),
- qunif(p, min=0, max=1...),
- runif(n, min=0, max=1).

Аргументи **min** і **max** відповідають параметрам **a** і **b** розподілу.

Значення за замовченням **min=0** і **max=1**.

Приклад. Згенеруємо 1000 елементів вибірки рівномірно розподіленої величини на відрізку [0;1] і знайдемо для неї оцінки математичного сподівання і дисперсії.

```
> x<-runif(1000)
> mean(x)
[1] 0.5095222
> var(x)
[1] 0.08496446
```

Бачимо, що вибіркове середнє і дисперсія не суттєво відрізняються від теоретичних значень мат. сподівання і дисперсії.

Бета розподіл

Абсолютно неперервна випадкова величина має бета розподіл, якщо її щільність задається формулою:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}, & x \in [0; 1], \\ 0, & x \notin [0; 1], \end{cases}$$

де $a, b > 0$, $B(a, b)$ - бета функція.

В R реалізовані наступні функції для цього розподілу:

-dbeta(x, shape1, shape2,...)

-pbeta(q, shape1, shape2, ...)

-rbeta(n, shape1, shape2, ...)

-qbeta(p, shape1, shape2,...)

Параметри цих функцій аналогічні до параметрів усіх ймовірнісних функцій в R.

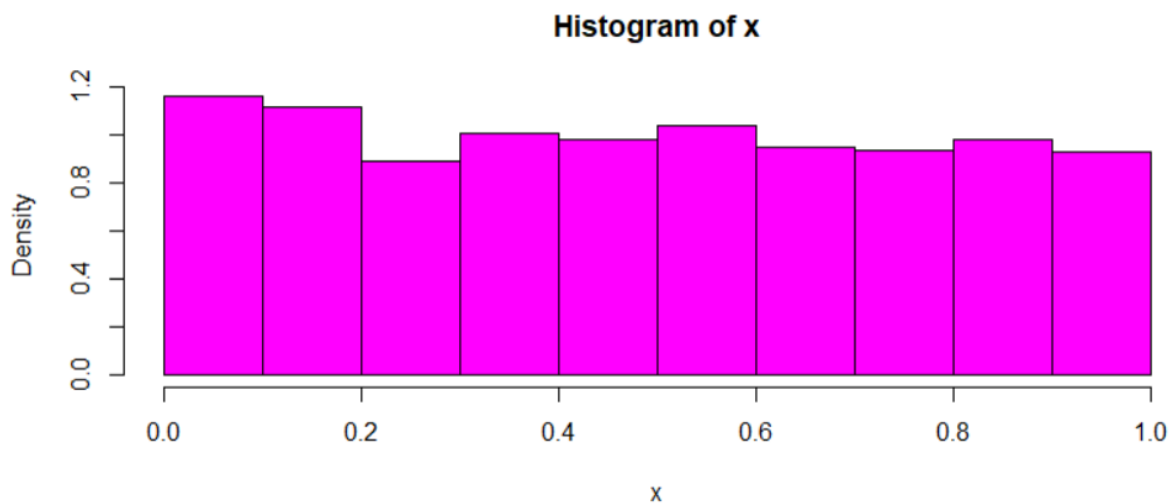
А параметри **shape1, shape2** являються параметрами розподілу.

Приклад. Згенеруйте вибірку об'ємом 1000 випадкової величини з бета розподілом з параметрами 1 і 1. Знайдіть оцінки математичного сподівання і дисперсії, порівняйте з рівномірним розподілом, побудуйте гістограму відносних частот.

```

> x<-rbeta(1000,1,1)
> mean(x)
[1] 0.4850946
> var(x)
[1] 0.08505536
> y<-runif(1000)
> mean(y)
[1] 0.4783526
> var(y)
[1] 0.08271733
> hist(x,col="magenta",freq=F)

```



Гамма розподіл

Випадкова величина має гамма розподіл, якщо її щільність задається формулою:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{x^{a-1} e^{-x/b}}{b^a \Gamma(a)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

де $\Gamma(a)$ – гамма функція.

В R реалізовані наступні функції для цього розподілу:

- dgamma(x, shape, rate = 1...),**
- pgamma(q, shape, rate = 1...),**
- **qgamma(p, shape, rate = 1...),**

-rgamma(n, shape, rate = 1,...).

Параметри цих функцій:

- **x, q** - вектори квантилів.
- **p** - вектор ймовірностей.
- **n** - кількість спостережень.
- **rate** - альтернативний спосіб вказати параметр **scale**.
- **shape=a, scale=b** – параметри розподілу. Мають бути невід’ємними, **scale** - додатним.
- **log, log.p** - логічні параметри; якщо **TRUE**, то ймовірності/щільності логарифмуються.
- **lower.tail** – логічний параметр; якщо **TRUE**, то розглядається ймовірність $P[X \leq x]$, інакше - $P[X > x]$.

Приклад. Згенеруйте 2 вибірки незалежних випадкових величин $X_i, i = \overline{1,2}$, з гамма розподілом з **shape=1, scale=1**. Знайдіть оцінки математичного сподівання і дисперсії випадкової величини $Y = \sum_{i=1}^2 X_i$.

```
> x1<-rgamma(1000,1,1)
> x2<-rgamma(1000,1,1)
> y<-as.vector(outer(x1,x2,"+"))
> mean(y)
[1] 1.949653
> var(y)
[1] 1.822034
```

Випадкова величина Y буде мати гамма розподіл з параметрами **shape=2, scale=1**. $E[Y] = 2, \text{var}[Y] = 2$.

Розподіл Вейбулла

Випадкова величина має розподіл Вейбулла, якщо її щільність задається формулою:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{a}{b} \cdot \frac{x^{a-1}}{b^{a-1}} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

В R реалізовані наступні функції для цього розподілу:

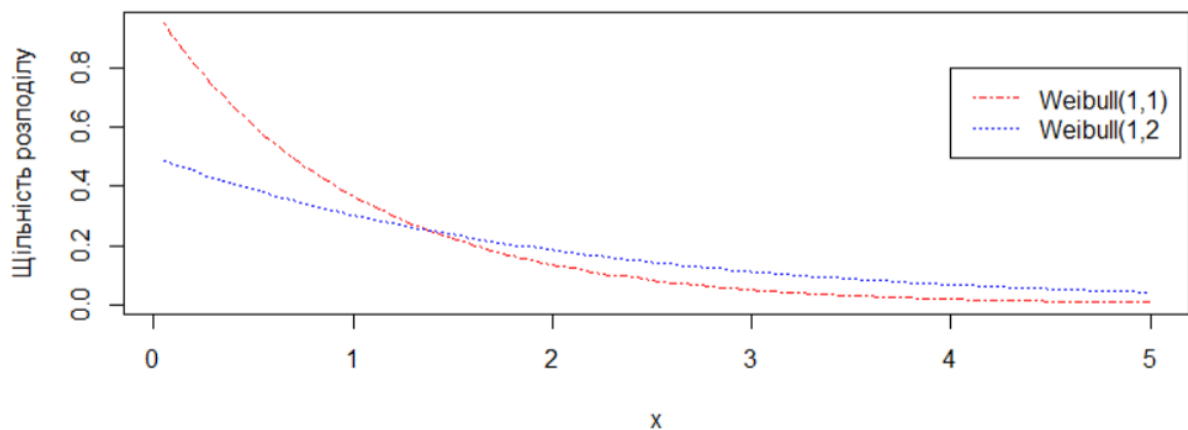
- dweibull(x, shape, rate = 1...),**
- pweibull(q, shape, rate = 1...),**
- qweibull(p, shape, rate = 1...),**
- rweibull(n, shape, rate = 1,...).**

Параметри цих функцій:

- **x, q** - вектори квантилів.
- **p** - вектор ймовірностей.
- **n** - кількість спостережень.
- **shape=a, scale=b** – параметри розподілу.

Приклад. Побудуйте графіки щільностей розподілу для розподілів Вейбулла з параметрами (1,1) і (1, 2).

```
> x<-seq(0.05,5,by=0.05)
> plot(x,dweibull(x,1,1),col="red",lty=4,type="l",ylab="Щільність розподілу")
> curve(dweibull(x,1,2),col="blue",lty=3,add=T)
> legend(4,0.8,c("Weibull(1,1)","Weibull(1,2)",col=c("red","blue"),lty=c(4,3))
```



Всі рисунки в лекції побудовані в RStudio.