# Course: Computer statistics

**Lecture 3: Interval estimation.**

**Lecturer: Oleksandr Dykhovychnyi**

**Лекція 3. Інтервальне оцінювання.**

**I. Загальні поняття**

**II. Довірчі інтервали для параметрів нормальної генеральної сукупності**

**III. Побудова асимптотичних довірчих інтервалів**

## I. Загальні поняття

Нехай $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ - вибірка з генеральної сукупності, розподіл якої визначає функція розподілу $F_\xi(x,\theta)$, яка залежить від певного параметру $\theta$. У попередніх лекціях були розглянуті **точкові** статистичні оцінки параметра $\theta$. Очевидно, що точкова оцінка значення параметра $\theta$ є наближеною і чутливою до будь-яких змін у вибірці, тому більш логічним виявляється розглядати певний інтервал, у якому може знаходитись значення параметра $\theta$ з певною мірою впевненості. Цей підхід і призводить до введення поняття **довірчого інтервалу.**

**Довірчим інтервалом** для невідомого параметра $\theta$ назвімо інтервал $[\theta_1, \theta_2]$, який містить істинне значення параметра із заданою ймовірністю $\gamma = 1 - \alpha$ , так, що виконується рівність:

$$P\{\theta \in [\theta_1, \theta_2]\} = 1 - \alpha \ .$$

Число $\gamma$ називають **довірчою ймовірністю**, а $\alpha$ - **рівнем довіри** або **рівнем значущості**.

Статистики $\theta_1 = \theta_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ і $\theta_2 = \theta_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ визначають за вибіркою $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ і називають відповідно **нижньою** та **верхньою межами** довірчого інтервалу.

## II. Довірчі інтервали для параметрів нормальної генеральної сукупності

Розглянемо приклади довірчих інтервалів для вибірки $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ нормальної генеральної сукупності розподілу випадкової величини $\xi$, яка має нормальний розподіл з математичним сподіванням $a$ ($E\xi = a$) і дисперсією $\sigma^2$ ($Var\xi = \sigma^2$ ). Позначають: $\xi \sim N(a, \sigma^2)$.

Позначимо:

$\alpha$ **- рівень довіри;**

$u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ **- квантіль стандартного нормального розподілу рівня** $1-\frac{\alpha}{2}$;

$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ **- квантіль розподілу Стьюдента рівня** $1-\frac{\alpha}{2}$ **з** $(n-1)$ **степенем свободи;**

$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ **- квантіль розподілу** $\chi^2$ **рівня** $1-\frac{\alpha}{2}$ **з** $(n-1)$ **степенем свободи;**

Зберігаємо позначення введених у лекції 1 відповідних вибіркових оцінок:

$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ - **вибіркове середнє** ;

$S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (x_i - \overline{x})^2$ - **вибіркова дисперсія виправлена**;

$S_a^2 = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (x_i - a)^2$ - **вибіркова дисперсія виправлена з відомим математичним сподіванням**.

Основу для статистичних побудов надає наслідок відомої леми Фішера.

Якщо $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ - вибірка з нормальної генеральної сукупності, то:

$$1)\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-a}{\sigma}\sim N(0,1);\ \sigma^2-\textit{відома};$$

$$2)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-a}{\sigma}\right)^2\sim\chi_n^{\ 2};a-\textit{відоме};$$

$$3)\frac{(n-1)S_0^2}{\sigma^2}\sim\chi_{n-1}^{\ 2};a,\sigma^2-\textit{невідомі};$$

$$4)\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-a}{S_0}\sim t_{n-1}\ ;a,\sigma^2-\textit{невідомі}.$$

Де $\chi_n^{\ 2}$- випадкова величина, яка має розподіл **хі- квадрат** з $n$ степенями свободи;

$t_n$- випадкова величина, яка має розподіл **Стьюдента** з $n$ степенями свободи.

На підставі цих тверджень будують наступні довірчі інтервали

1. **Довірчий інтервал для математичного сподівання нормальної генеральної сукупності при відомій дисперсії.**

   При заданому рівні довіри $\alpha$ і відомій дисперсії $\sigma^2$ математичне сподівання з імовірністю $\gamma=1-\alpha$ належить інтервалу:

$$\left(\overline{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}},\overline{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right).$$

2. **Довірчий інтервал для математичного сподівання нормальної генеральної сукупності при невідомій дисперсії.**

   При заданому рівні довіри $\alpha$ і невідомій дисперсії з імовірністю $\gamma=1-\alpha$ математичне сподівання належить інтервалу:

$$\left(\overline{x}-\frac{S_0}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{x}+\frac{S_0}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right).$$

3. **Довірчий інтервал для дисперсії нормальної генеральної сукупності при невідомому математичному сподіванні.**

При заданому рівні довіри $\alpha$ і невідомому математичному сподіванні з імовірністю $\gamma = 1 - \alpha$ дисперсія належить інтервалу:

$$\left( \frac{nS_0^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}(n-1)}}, \frac{nS_0^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}(n-1)}} \right).$$

**4. Довірчий інтервал для дисперсії нормальної генеральної сукупності при відомому математичному сподіванні.**

При заданому рівні довіри $\alpha$ і відомому математичному сподіванні $a$ з імовірністю $\gamma = 1 - \alpha$ дисперсія належить інтервалу:

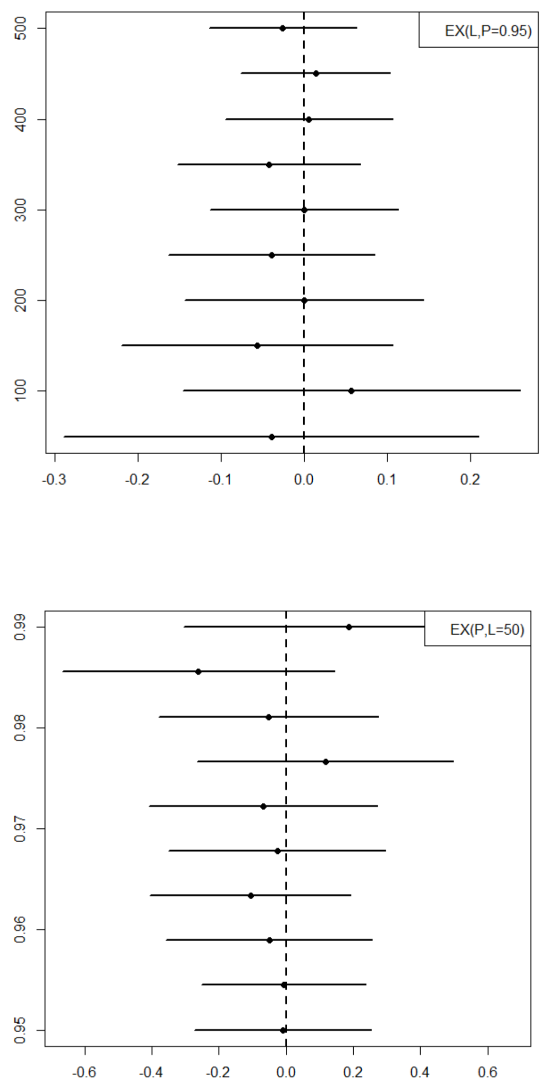
$$\left( \frac{nS_a^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}(n-1)}}, \frac{nS_a^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}(n-1)}} \right).$$

Розглянемо побудову довірчих інтервалів для математичного сподівання $E\xi$ та дисперсії $Var\xi$ стандартної нормальної випадкової величини $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ при різних значеннях довірчої ймовірності $\gamma \in [0{,}95,\ 0{,}99]$ і об'ємі вибірок $n \in [50, 500]$. Інтервали відображаються горизонтальними відрізками, точкою позначено значення оцінки. Рисунки згенеровано **RStudio**, відповідна програма наведена нижче.

**Приклади:**

```
> set.seed(301) #встановлюємо початкове значення датчика
> L <- seq(50, 500, 50) #створюємо послідовність довжин вибірок
> P<- seq(0.95, 0.99, , length(L)) #створюємо послідовність довірчих ймовірно
стей
  # обчислюємо межі довірчих інтервалів
> POM <- function(x,L,P) mean(x)-sd(x)/sqrt(L)*qt((1+c(P,0,-P))/2,L-1)
> POD <- function(x,L,P) sd(x)^2*(L-1)/qchisq((1+c(P,0,-P))/2,L-1)
# генеруємо відповідні дані
> POML <- sapply(L, function(ll) POM(rnorm(ll), ll, P[1]))
> PODL <- sapply(L, function(ll) POD(rnorm(ll), ll, P[1]))
> POMP <- sapply(P, function(pp) POM(rnorm(L[1]), L[1], pp))
> PODP <- sapply(P, function(pp) POD(rnorm(L[1]), L[1], pp))
# формуємо підписи
> tttML <- sprintf("EX(L,P=%.3g)",P[1])
> tttDL <- sprintf("VarX(L,P=%.3g)",P[1])
> tttMP <- sprintf("EX(P,L=%.0f)",L[1])
```

```
> tttDP <- sprintf("VarX(P,L=%.0f)",L[1])
> picture <- function(x, y, point, text) { windows() #функція побудови графіків
+   plot(range(x), range(y), type="n", xlab="", ylab="")
+   for(j in seq(length(y))) {
+     lines(x[,j], rep(y[j],3), lwd=2)
+     points(x[2,j], y[j], pch=16, lwd=2) }
+   legend("topright", legend=text, bg="white")
+   abline(v=point, lty=2, lwd=2) }
# побудова графіків
> picture(POML, L, 0, tttML)
> picture(POMP, P, 0, tttMP)
> picture(PODL, L, 1, tttDL)
> picture(PODP, P, 1, tttDP)
```



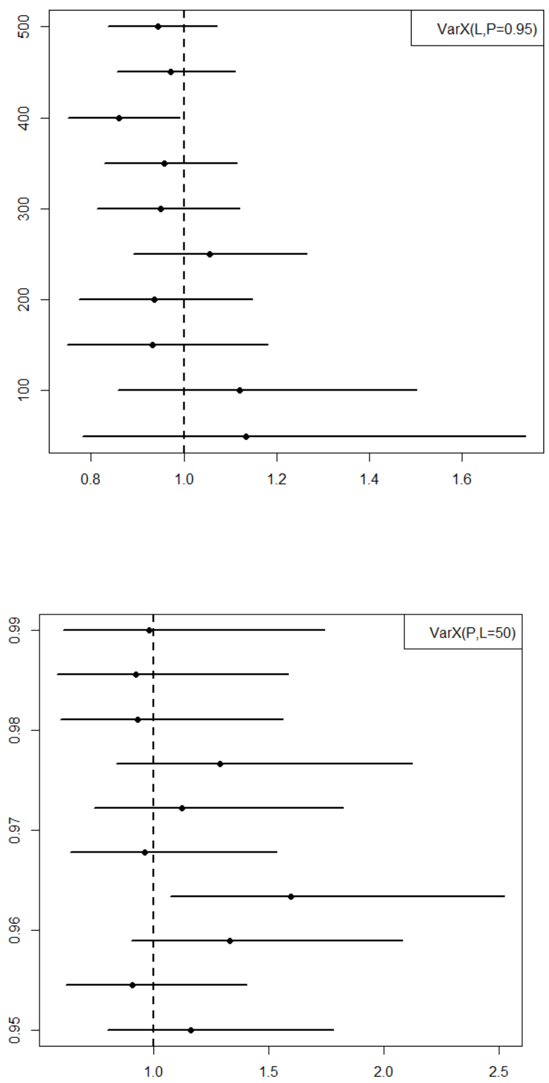




Рис.1. Реалізація довірчих інтервалів $E\xi$ для різних $n \in [50, 500]$ і $\gamma \in [0{,}95,\ 0{,}995]$ для $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$

Рис.2. Реалізація довірчих інтервалів $Var\xi$ для різних $n \in [50, 500]$ і $\gamma \in [0{,}95,\ 0{,}995]$ для $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$

## III. Побудова асимптотичних довірчих інтервалів

Більшість оцінок параметрів, які розглядаються, мають асимптотично нормальний розподіл. Тобто, при необмеженому збільшені об'єму вибірки оцінка має розподіл близький до нормального. Це дозволяє будувати асимптотичні довірчі інтервали. Дійсно, нехай для невідомого параметра $\theta$ існує асимптотично нормальна оцінка $\theta$ з середнім квадратичним відхиленням $\sqrt{Var(\theta)}$. Тоді за широких припущень

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sqrt{n}(\theta-\theta)}{\sqrt{Var(\theta)}} < u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha \text{ .}$$

Звідки

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\theta \in \left(\theta \pm \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\sqrt{Var(\theta)}\right)\right\} = 1-\alpha$$

Це й дозволяє будувати асимптотичний довірчий інтервал. У якості $\sqrt{Var(\theta)}$ можна використовувати його асимптотичну оцінку.

**Приклади:**

Розглянемо задачу оцінки інтенсивності $\lambda$ експоненційного розподілу за вибіркою X. Оцінкою з найменшою дисперсією для $\lambda$ є $\lambda = \frac{1}{\overline{X}}$, причому її дисперсія $Var(\lambda) = \lambda^2$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\lambda \in \left(\frac{1}{\overline{X}} \pm \frac{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\frac{1}{\overline{X}}\right)\right\} = 1-\alpha .$$

Нехай $\alpha = 0,05$. Тоді $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$. Це дозволяє обчислити межі довірчого інтервалу. Перевіримо, яка частина оцінок потрапить у відповідний інтервал. Нехай $\lambda$ = 0.5, змоделюємо V = 10000 вибірок по 1000- значень у кожній. Для кожної вибірки перевіряється, чи потрапляє 0.5 у довірчий інтервал, а саме, чи є різниця $\left|\lambda-\lambda\right|$ є меншою, ніж половина ширини інтервалу. Далі підраховується кількість потраплянь у довірчий інтервал - змінна **fr** , тоді частота – це середнє **fr**.

```
> set.seed(2024)
> lambda<-0.5   # інтенсивність експоненційного розподілу
> V<-1000       # кількість вибірок
> L<-1000       #  обсяг вибірок
> ualpha<-qnorm(0.975)
> dif<-replicate(V,
+             {
+               x<-rexp(L,lambda)
+               lambdaest<-1/mean(x)
+               ifelse(abs(lambda-lambdaest)<ualpha*lambdaest/sqrt(L),1,0)
+             })  # підрахунок потраплянь
> fr=1-mean(dif) # частота непотраплянь
> fr
[1] 0.052
```

Частота «непотраплянь» виявилась цілком прийнятною – 0,052 у порівнянні з заданим значенням 0.05.