Fundamentals of Electrical Engineerings

WEEK 9 - OHM'S AND KIRCHHOFF'S LAWS OF DIFFERENTIAL AND COMPLEX TYPES

Tajik Technical University named after academician M.S. Osimi

Lecturer

(Saidjon Ismoilov)

ҚОНУНҲОИ ОМ ВА КИРХГОФ БА НАМУДҲОИ ДИФФЕРЕНСИАЛӢ ВА КОМПЛЕКСӢ

Мундаричаи лексия:

1. Асосҳои усули символикии ҳисоби занҷирҳои синусоидалӣ;
2. Қонунҳои Ом барои занҷири ҷараёни синусоидалӣ. Муқовимат ва ноқилияти комплексӣ;
3. Қонунҳои Кирхгоф дар намуди комплексӣ;
4. Адабиёт.

Асосҳои усули символии ҳисоби занҷирҳои ҷараёни синусоидалӣ

Дар амалия усули символӣ ва ё комплексии ҳисоби занҷирҳои ҷараёни синусоидалӣ васеъ паҳн шудааст.

Моҳияти усули символии ҳисоби занҷирҳо дар он аст, ки ҳангоми ҷараёни синусоидалӣ мумкин аст, аз муодилаҳое, ки барои қиматҳои лаҳзавӣ тартиб дода шудаанд (муодилаҳои дифференсиалӣ) ба муодилаҳои алгебравӣ гузариш намоем. Муодилаҳои алгебравиро инчунин ба намуди комплексӣ навиштан мумкин аст. Масалан, қимати лаҳзавии ҷараёни $i(t)$-ро бо қимати амплитудавии ҷараён I_m; қимати лаҳзавии шиддат дар муқовимати фаъоли R, ки ба $R \cdot i$ - баробар аст, ба намуди комплексӣ $R \cdot \dot{I}_m$ навиштан мумкин аст. Дар ин маврид шиддат дар муқовимати фаъол $R \cdot \dot{I}_m$ ба ҷараёни $\dot{I}_m$ аз рӯи фаза мувофиқ меоянд. Ҳамин тавр, қимати лаҳзавии параметрҳои дигари занҷирро ба намуди комплексӣ навиштан мумкин аст (ҷадвали 9.1).

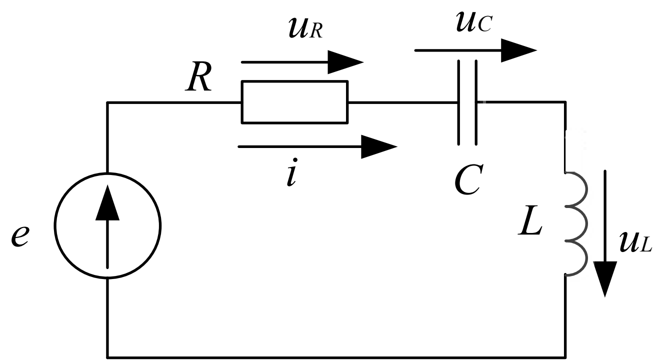
Зарбшавандаи j дар навишти комплексии шиддат дар муқовимати индуктивӣ $\dot{U}_L$, маънои онро дорад, ки шиддат дар муқовимати индуктивӣ $\dot{U}_L$ нисбат ба ҷараён ($\dot{I}$) 90^0 пеш мехобад. Зарбшавандаи $-j$ бошад, маънои онро дорад, ки шиддат дар ҳамвории комплексӣ нисбат ба ҷараён ($\dot{I}$) 90^0 қафо мехобад.

Ҷадвали 9.1 - Намудҳои гуногуни навишти бузургиҳои синусоидалӣ

№	Параметрҳои занҷири электрикӣ	Қимати лаҳзавӣ	Қимати амплитудавии комплексӣ	Қимати комплексӣ
1	ҚЭҲ	$e(t) = E_m \cdot \sin(\omega t + \psi_e)$	$\dot{E}_m = E_m \cdot e^{j\psi_e}$	$\dot{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_e}$

2	Ҷараён	$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i)$	$\dot{I}_m = \dot{I}_m \cdot e^{j\psi_e}$	$\dot{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\psi_i}$
3	Шиддат дар муқовимати фаъол	$U_R(t) = R \cdot i(t)$	$\dot{U}_{m_R} = R \cdot I_m$	$\dot{U}_R = R \cdot \dot{I}$
4	Шиддат дар муқовимати индуктивӣ	$U_L(t) = L\frac{di}{dt}$	$\dot{U}_{m_L} = \dot{I}_m \cdot j\omega L$	$\dot{U}_L = \dot{I} \cdot j\omega L$
5	Шиддат дар муқовимати ғунҷоишӣ	$U_C(t) = \frac{1}{C}\int idt$	$\dot{U}_{m_C} = \dot{I}_m \cdot \frac{-j}{\omega c}$	$\dot{U}_C = \dot{I} \cdot (-j\frac{1}{\omega c})$

Дар расми 9.1 пайвасти пайдарпайи муқовиматҳои фаъол (R), индуктивӣ (L) ва конденсатор (C) нишон дода шудааст.



Расми 9.1 – Пайвасти пайдарпаи RLC-элементҳо

Мувофиқи қонуни дуюми Кирхгоф барои қиматҳои лаҳзавӣ муодила тартиб медиҳем:

$$u_R + u_L + u_C = e \tag{9.1}$$

ва ё

$$i \cdot R + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = e \tag{9.2}$$

Муодилаи (9.2)-ро ба намуди комплексӣ менависем:

$$\dot{I}_m \cdot R + \dot{I}_m \cdot j\omega L + \dot{I}_m(-j\frac{1}{\omega c}) = \dot{E}_m$$

ва ё

$$\dot{I}_m \cdot (R + j\omega L - j\frac{1}{\omega c}) = \dot{E}_m \tag{9.3}$$

Ҳамин тавр,

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_m}{R + j\omega L - j\dfrac{1}{\omega c}} \qquad (9.4)$$

ва ё барои қиматҳои амалкунандаи комплексӣ

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + j\omega L - j\dfrac{1}{\omega c}} \qquad (9.5)$$

Муодилаи (9.5) имкон медиҳад, ки бо ёрии қиматҳои комплексии ҚЭҲ ($\dot{E}$) ва муқовиматҳои занҷир ҷараёни комплексиро $\dot{I}$ муайян намоем.

Усули мазкур барои он *символӣ* ном дорад, ки шиддатҳо ва ҷараёнҳои лаҳзавиро ба намуди комплексӣ тасвир менамоем.

Қонунҳои Ом барои занҷири ҷараёни синусоидалӣ. Муқовимат ва ноқилияти комплексӣ

Зарбшавандаҳои $(R + j\omega L - j\dfrac{1}{\omega c})$ дар муодилаи (9.3) адади комплексӣ буда, бо ҳарфи $\dot{Z}$ ишора карда мешавад. Онро инчунин муқовимати комплексӣ меноманд:

$$\dot{Z} = z \cdot e^{j\varphi} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega c} \qquad (9.6)$$

Ба монанди дигар ададҳои комлексӣ, муқовимати комплексиро низ ба намуди дараҷавӣ навиштан мумкин аст. Модули комплексии муқовиматро ба ҳарфи z ишорат мекунанд:

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega c})^2} \qquad (9.7)$$

Дар болои муқовимати комплексӣ z аломати “нуқта” гузошта намешавад, зеро қабул шудааст, ки танҳо дар болои бузургиҳои комплексии функсияҳои синусоидалӣ нуқта гузошта мешавад. Ба монанди ҷараён $(\dot{I})$, шиддат $(\dot{U})$, ҚЭҲ $(\dot{E})$ ва ғайраҳо.

Муодилаи (9.3)-ро бо назардошти баробарии (9.6) ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\dot{I}_m \cdot Z = \dot{E}_m \qquad (9.8)$$

Ва ё барои қиматҳои амалкунандаи ҷараён ва ҚЭҲ ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} \qquad (9.9)$$

Муодилаи (9.9)-ро қонуни Ом барои занҷири ҷараёни синусоидалӣ дар намуди комплексӣ меноманд.

Дар умум муқовимати комплексии Z дорои қисми ҳақиқӣ (R) ва қисми мафҳумӣ (X) мебошад:

$$Z = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega c} = R + jX \qquad (9.10)$$

дар ин ҷо, $R-$ муқовимати фаъол ва X - муқовимати ғайрифаъол мебошанд.

Дар нақшаи занҷири электрикии расми 91 муқовимати ғайрифаъолро дар намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega c} \qquad (9.11)$$

Бузургии баръакси муқовимати комплексиро Z, ноқилияти комплекси меноманд ва онро бо ҳарфи Y ишора мекунанд:

$$Y = \frac{1}{z} = g + jb = y \cdot e^{-j\varphi} \qquad (9.12)$$

Воҳиди ноқилияти комплексӣ Сименс (См) ва ё Ом$^{-1}$ аст. Қисми ҳақиқии онро бо ҳарфи b ишорат мекунанд. Ноқилиятҳои фаъол (g) ва ғайрифаъол (b)-ро муайян мекунем:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{1(R - jX)}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{(R - jX)}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2} = g - jb \qquad (9.13)$$

Пас, аз ин ҷо,

$$\begin{cases} g = \dfrac{R}{R^2 + X^2} \\ b = \dfrac{X}{R^2 + X^2} \\ y = \sqrt{g^2 + b^2} \end{cases} \qquad (9.14)$$

Ҳангоми бо истифода аз ноқилияти комплексӣ навиштани қонуни Ом (9.9), намуди зеринро мегирад:

$$\dot{I} = \dot{E} \cdot \dot{Y} \tag{9.15}$$

ва ё

$$\dot{I} = \dot{E} \cdot g - j\dot{U} \cdot b = \dot{I}_a + \dot{I}_r \tag{9.16}$$

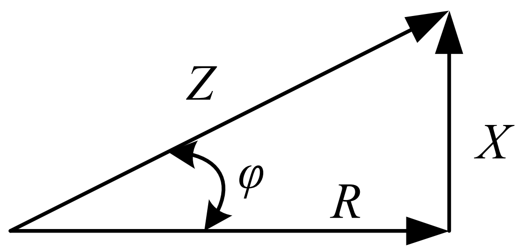
дар ин ҷо, $\dot{I}_a$ - ташкилдиҳандаи фаъоли ҷараён, $\dot{I}_г$ - ташкилдиҳандаи ғайрифаъоли ҷараён, $\dot{E}_a$ - ҚЭҲ-и манбаъ мебошанд.

Аз муодилаи (9.10) муайян менамоем:

$$z = \sqrt{R^2 + X^2} \tag{9.17}$$

Ҳамин тавр, z -ро ҳамчун гипотенузаи секунҷаи росткунҷае тасаввур кардан мумкин аст, ки катетҳояш ба муқовимати фаъол (R) ва муқовимати ғайрифаъол (X) баробар аст. Пас,

$$tg\varphi = \frac{X}{R} \tag{9.18}$$



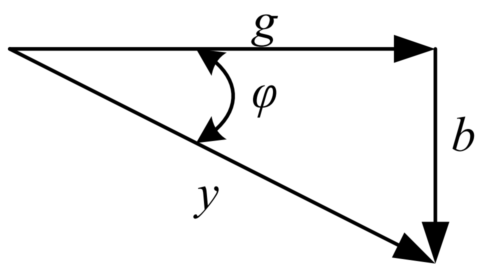
Расми 9.2 – Секунҷаи вобастагии муқовиматҳо

Айнан ҳамин тавр, модули ноқилияти комплексиро (y) муайян намудан мумкин аст:

$$y = \sqrt{g^2 + b^2} \tag{9.19}$$

Ҳамин тавр, y гипотенузаи секунҷаи росткунҷаест, ки катетҳояш ба ноқилиятҳои фаъол (g), ва ғайрифаъол (b) баробар аст:

$$tg\varphi = \frac{b}{g} \tag{9.20}$$



Расми 9.3 – Секунҷаи вобастагии ноқилиятҳо

Секунҷаи муқовиматҳо (ноқилиятҳо) имкон медиҳад, ки алоқаи графикии байни модули муқовимати (ноқилияти) пурраи занҷир ва ташкилдиҳандаҳои фаъол ва ғайрифаъол онро муайян менамоем.

Қонунҳои Кирхгоф дар намуди комплексӣ

Мувофиқи қонуни якуми Кирхгоф суммаи алгебравии қиматҳои лаҳзавии ҷараён дар дилхоҳ гиреҳ ба сифр баробар аст, яъне:

$$\sum_{n=1}^{k} i_n(t) = 0 \tag{9.21}$$

Ба ҷои қиматҳои лаҳзавии ҷараёнҳо $i_n(t)$ дар муодилаи (9.21) қиматҳои комплексии онҳоро $i_n e^{j(\omega t+\psi_{in})}$ мегузорем. Қимати комплексии ҷараёнҳоро инчунин дар намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\sum_{n=1}^{k} \dot{I}_n \cdot e^{j(\omega \cdot t+\psi_{in})} = \sum_{n=1}^{k} \dot{I}_n \cdot e^{j\omega \cdot t} \cdot e^{j\psi_{in}} = 0 \tag{9.22}$$

Аз муодилаи (9.22) $e^{j\omega t}$-ро аз сумма берун менамоем ($e^{j\omega t}\sum \dot{I}_n \cdot e^{j\psi_{in}}$) Аз баски $e^{j\omega t} \neq 0$ аст, пас:

$$\sum_{n=1}^{k} \dot{I}_n \cdot e^{j\psi_{in}} = 0 \tag{9.23}$$

Муодилаи (9.23)-ро қонуни якуми Кирхгоф дар намуди комплексӣ меноманд. Барои дилхоҳ контури сарбасти занҷири электрикии ҷараёни синусоидалӣ бо ёрии қонуни дуюми Кирхгоф барои қиматҳои лаҳзавии ҷараён, шиддат ва ҚЭҲ муодила тартиб додан мумкин аст.

Бигзор контури сарбасти занҷир дорои *m*- шоха бошад ва *n*-шохаҳои он дар умум дорои ҚЭҲ e_n, муқовимати фаъол R_n элементҳои индуктивӣ L_n ва ғунҷоишӣ c_n, ки аз онҳо ҷараёни $i_n(t)$ ҷори мешавад, пас:

$$\sum_{n=1}^{m}(i_n \cdot R_n + L_n \frac{di_n}{dt} + \frac{1}{c_n}\int i_n dt) = \sum_{n=1}^{m} e_n \tag{9.24}$$

Мувофиқи қонуни Ом барои занҷири ҷараёни синусоидалӣ ҳамаи ҷамъшавандаҳои тарафи чапи муодилаи (9.24)-ро ба $\dot{I}_n \cdot z_n$ ва ҳамаи ҷамъшавандаҳои тарафи рости муодилаи (9.24)-ро ба $\dot{E}_n$ иваз намудан мумкин аст. Аз ин рӯ муодилаи (9.24) намуди зеринро мегирад:

$$\sum_{n=1}^{m} \dot{I}_n \cdot z_n = \sum_{n=1}^{m} \dot{E}_n \tag{9.25}$$

Муодилаи (9.25)-ро қонуни дуюми Кирхгоф дар намуди комплексӣ меноманд.

Адабиёт:

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. Воситаи таълимӣ – Москва: Высшая школа, 1996, 529 с.

2. Ҷӯраев Ш.Ҷ., Исмоилов С.Т. Электротехника (қисми 2). Занҷирҳои электрикии якфаза ва сефазаи ҷараёни синусоидалӣ. Воситаи таълимӣ – Душанбе: ДТТ ба номи академик М.С. Осимӣ, 2021, 196 саҳ.

3. Луғати истеҳсолоти соҳаи энергетика (русӣ-тоҷикӣ). Муаллифон П. Раҷабов, Д. Давлатшоев, У.Т. Хоҷаева, М. Каримов. Нашри комбинати полиграфии Вазорати фарҳанги ҶТ. – Душанбе, 2004.

4. Р.А Ҷалилов, Р.З. Икромов, М.И. Здержикова. «Практикуми лабораторӣ аз фанни асосҳои назариявии электротехника». Қисми 1. Душанбе, Матбааи ДТТ, 2010с.