

# **Fundamentals of Electrical Engineerings**

## **WEEK 11 - THE PHENOMENON OF RESONANCE IN ELECTRICAL CIRCUITS**

**Tajik Technical University named after academician M.S. Osimi**

**Lecturer**

**(Saidjon Ismoilov)**

**ҲОДИСАИ РЕЗОНАНС ДАР ЗАНЧИРҲОИ ЭЛЕКТРИКӢ**

## Мундариҷаи лексия:

1. Речаи резонанс дар занҷирҳои электрикӣ;
2. Резонанси ҷараёнҳо;
3. Резонанси ҷараёнҳо;
4. Адабиёт.

### Речаи резонанс дар занҷирҳои электрикӣ

Бигзор занҷири электрикӣ дорои як ва ё якчанд элементи индуктивӣ ва инчунин дорои як ва ё якчанд конденсатор бошад. *Речаи резонанс* гуфта, речаи кори ин гуна занҷири электрикиро меноманд, ки муқовимати воридотиаши танҳо фаъол мебошад. Дар речаи резонанс қисми мафҳуми муқовимати воридотии комплексӣ ба сифр баробар мешавад. Аз ин рӯ, шарт ба вуҷуд омадани речаи резонансро ба намуди  $X = X_L - X_C = 0$  навиштан мумкин аст.

Дар речаи резонанс занҷири электрикӣ нисбат ба занҷири электрикии беруна хурдтар ҳамаҷун муқовимати фаъол нишон медиҳад, аз ин рӯ, ҷараён ва шиддат дар бандакҳои воридотии занҷир аз рӯи фаза ба ҳам мувофиқ мешаванд. Иқтидори ғайрифаволи занҷир дар ин маврид ба сифр баробар мешавад.

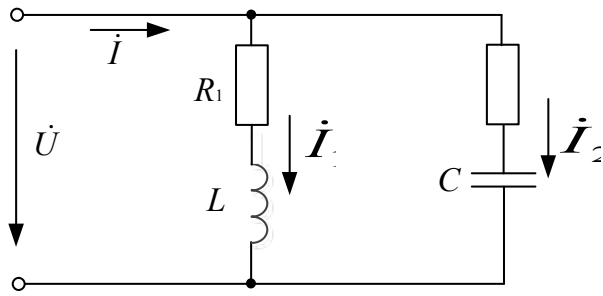
Вобаста ба намуди пайвасти  $RLC$  – ҳо ду намуди резонансро ҷудо намудан мумкин аст:

- резонанси ҷараёнҳо;
- резонанси шиддатҳо.

### Резонанси ҷараёнҳо

Ҳодисаи резонансро дар занҷири электрикие, ки дорои ду шохаҳои мувозӣ пайваस्तшуда (расми 11.1), ки муқовиматҳои ғайрифаволашон тавсифи гуногун доранд (индуктивӣ ва ғунҷоишӣ), *резонанси ҷараёнҳо* меноманд.

Бигзор шохаи якуми занҷири электрикӣ (расми 11.1) дорои муқовиматҳои фаъоли  $R_1$  ва индуктивии  $\omega \cdot L$  ва шохаи дуюми он дорои муқовиматҳои фаъоли  $R_2$  ва ғунҷоишии  $1/(\omega \cdot C)$  бошанд.



Расми 11.1 – Пайвасти мувозии элементҳои  $R_1L$  ва  $R_2C$

Чараёни шоҳаи якум  $i_1$  аз шиддати манбаъ  $\dot{U} = \dot{U}_{ab}$  қафо мемонад (расми 1.10.2) ва аз рӯи формулаи зерин муайян карда мешавад:

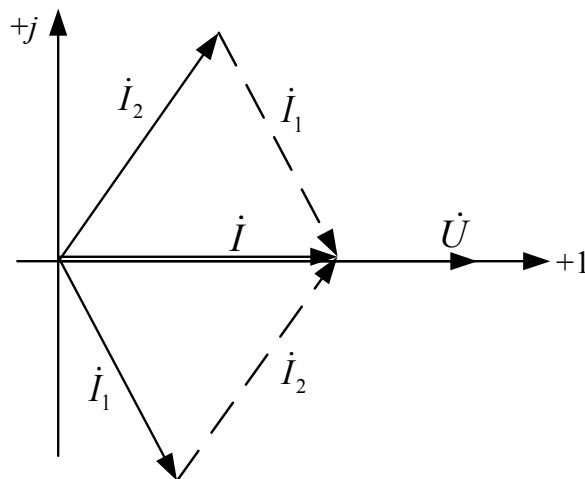
$$i_1 = \frac{\dot{U}}{R_1 + j\omega \cdot L} = \frac{\dot{U}}{Z_1} = \dot{U} \cdot Y_1 = \dot{U} \cdot (g_1 - jb_1) \quad (11.1)$$

Чараёни шоҳаи дуюм  $i_2$  бошад, нисбат ба шиддати манбаъ  $\dot{U} = \dot{U}_{ab}$  пеш меҳобад (расми 1.10.2) ва аз рӯи формулаи зерин муайян карда мешавад:

$$i_2 = \frac{\dot{U}}{R_2 - j\frac{1}{\omega \cdot C}} = \frac{\dot{U}}{Z_2} = \dot{U} \cdot Y_2 = \dot{U} \cdot (g_2 + jb_2) \quad (11.2)$$

Чараёни умимии занҷир  $i$  бошад:

$$i = i_1 + i_2 = \dot{U} \cdot Y_1 + \dot{U} \cdot Y_2 = \dot{U} \cdot (g_1 + g_2) - j\dot{U} \cdot (b_1 - b_2) \quad (11.3)$$



Расми 11.2 – Диаграммаи вектории чараёнҳо хангоми речаи резонанс дар занҷири электрикии расми 11.1

Мувофиқи таърифи речаи резонанс чараёни  $i$  ба шиддати  $\dot{U}$  аз рӯи фаза бояд мувофиқ биёяд. Ин ҳодиса вақте ба вуқӯъ меафтад, ки агар шарт

$b_1 - b_2 = 0$  ичро шавад, яъне суммаи ноқилиятҳои ғайрифазол ба сифр баробар шаванд.

Аз ин рӯ, сараввал муқовиматҳои ноқилиятҳои шохаҳои занҷири электрикии расми 1.10.1 – ро дар алоҳидагӣ муайян менамоем:

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{1}{R_1 + j\omega \cdot L} \cdot \frac{R_1 - j\omega \cdot L}{R_1 - j\omega \cdot L} = \frac{R_1 - j\omega \cdot L}{R_1^2 + \omega^2 \cdot L^2} = \frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 \cdot L^2} - j \frac{\omega \cdot L}{R_1^2 + \omega^2 \cdot L^2} = g_1 - jb_1; \\ Y_2 = \frac{1}{R_2 - j \frac{1}{\omega \cdot C}} \cdot \frac{R_2 + j \frac{1}{\omega \cdot C}}{R_2 + j \frac{1}{\omega \cdot C}} = \frac{R_2 + j \frac{1}{\omega \cdot C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 \cdot C^2}} = \frac{R_2}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 \cdot C^2}} + j \frac{\frac{1}{\omega \cdot C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 \cdot C^2}} = g_2 + jb_2. \end{cases} \quad (11.4)$$

Мувофиқи шарт ба вучудии резонанси чараён ( $b_1 - b_2 = 0$ ) навиштан мумкин аст:

$$\frac{\omega \cdot L}{R_1^2 + \omega^2 \cdot L^2} = \frac{1}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 \cdot C^2}} \quad (11.5)$$

Мувофиқи баробарии (11.5), ҳангоми  $R_2 = 0$  будан, чунин навиштан мумкин аст:

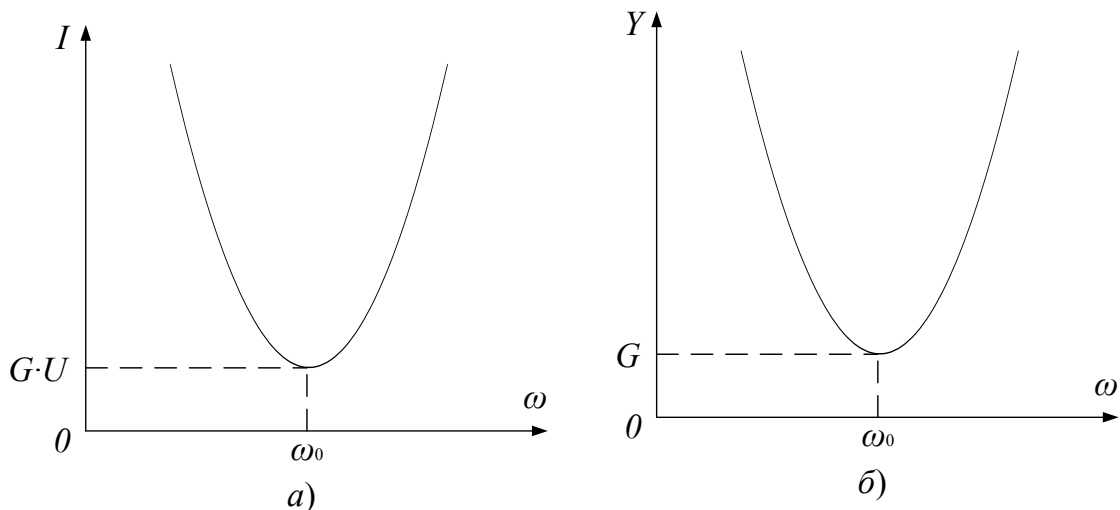
$$\frac{\omega \cdot L}{R_1^2 + \omega^2 \cdot L^2} = \omega \cdot C \quad (11.6)$$

Ҳангоми дар занҷир мавҷуд набудани муқовимати фазол ( $R_1 = R_2 = 0$ ), формулаи (1.10.5) намуди зеринро мегирад:

$$\omega^2 \cdot L \cdot C = 1 \quad (11.7)$$

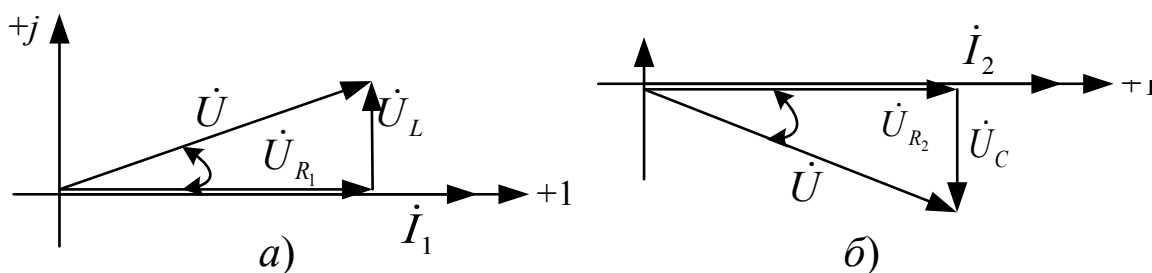
Резонансро ҳангоми тағйир додани қиматҳои  $\omega$ ,  $L$ ,  $C$  ва ё  $R_1$  ва  $R_2$  ба даст овардан мумкин аст. Ҳангоми речаи резонанс қимати ададии чараёни умумии  $\dot{I}$  аз қиматҳои чараёнҳои шохаҳои алоҳидаи занҷир  $\dot{I}_1$  ва  $\dot{I}_2$  хурд буда метавонад ва ҳатто дар ҳолати  $R_1 = R_2 = 0$  будан, чараёни  $\dot{I}$  ба сифр баробар мешавад.

Маълум аст, ки ҳангоми ҳодисаи резонанс ноқилияти умумӣ ба  $Y = \sqrt{G^2 + B^2} = G = Y_{\min}$  ва чараёни  $\dot{I} = Y \cdot \dot{U} = G \cdot \dot{U} = \dot{I}_{\min}$  баробар мешавад. Вобастагии чараён ва ноқилиятро аз басомади кунҷӣ ( $\omega$ ) дар расмҳои 11.3а ва 11.3б мутаносибан оварда шудаанд.



Расми 11.3 – Графики вобастагиҳои ҷараён (а) ва ноқилияти комплексӣ (б) аз басомади кунҷӣ ( $\omega$ )

Диаграммаи вектории шохаҳои алоҳидаи занҷири электрикии расми 11.1 – ро тасвир менамоем.



Расми 11.4 – Диаграммаи вектории ҷараёнҳо ва шиддатҳо дар шохаҳои алоҳидаи занҷири электрикии расми 11.1

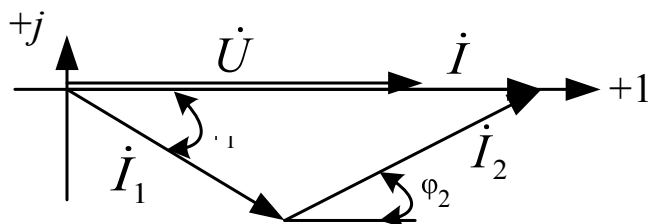
Дар расми 11.4 қиматҳои  $\varphi_1$  ва  $\varphi_2$  ба

$$\begin{cases} \varphi_1 = \arctan\left(\frac{\omega \cdot L}{R_1}\right) \\ \varphi_2 = \arctan\left(\frac{1}{\omega \cdot L \cdot R_2}\right) \end{cases} \quad (11.8)$$

Маълум аст, ки афтиши шиддатҳо дар шохаҳои мувозӣ пайваस्तшуда, ба ҳам баробар мебошанд, аз ин рӯ вектори шиддати манбаъ дар диаграммаҳои вектории расмҳои 11.4а ва 11.4б якхела мебошанд.

Диаграммаҳои вектории якҷояи шохаҳои занҷири электрикии расми 11.1 дар расми 11.2 нишон дода шудаанд.

Диаграммаи вектории занҷири электрикии расми 11.1 – ро инчунин дар намуди дигар низ (расми 11.5) тасвир намудан мумкин аст.



Расми 11.5 – Диаграммаи вектории ҷараёнҳо ҳангоми речаи резонанс дар занҷири электрикии расми 11.1

Резонанси ҷараёнро ҳангоми иваз намудани қимати  $\omega, L, C$  ва ё  $R_1$  ва  $R_2$  ба вуҷуд овардан мумкин аст. Дар мавридҳои зиёд қимати ҷараёни умумӣ  $i$  метавонад ададан аз ҷараёнҳои шохаҳо хурд бошад ( $i < i_1$  ва ё  $i < i_2$ ).

Қимати басомади кунҷиро аз баробарии (11.6) муайян менамоем:

$$\omega = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{L/C - R_1^2}{L/C - R_2^2}} \quad (11.9)$$

дар ин ҷо,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \text{ – басомади резонансӣ дар контури беталафот, ҳангоми}$$

$R_1 = R_2 = 0$  будан, мебошад.

Азбаски басомади кунҷӣ қимати ҳақиқӣ ва мусбатро доро мебошад, пас сурат ва маҳраҷи формулаи (11.9) бояд аломатҳои якхела дошта бошанд. Ин ҳолат ҳангоми

$$1) \frac{L}{C} > R_1^2; \frac{L}{C} > R_2^2;$$

$$2) \frac{L}{C} < R_1^2; \frac{L}{C} < R_2^2$$

ҷой дошта метавонад.

Ҳангоми  $R_1 = R_2$  будан,  $\omega = \omega_0$  аст ва ҳангоми  $L/C = R_1^2 = R_2^2$  будан,

$$\omega = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{0}{0}} \quad (11.10)$$

Аз формулаи (11.10) маълум аст, ки басомади кунҷӣ ( $\omega$ ) бузургии номаълумро доро мушавад. Маънии физикии ин раванд дар он аст, ки резонанс дар ин речаи кори занҷири электрикӣ дар дилхоҳ басомад ба вучуд меояд. Муқовимати контури мувозӣ ба  $\sqrt{L/C} = R_1 = R_2$  баробар аст.

*Масъалаи 11.1.* Дар нақшаи электрикии расми 11.1, ҳангоми  $R_1 = 50\Omega$ ,  $\omega \cdot L = 25\Omega$ ,  $R_2 = 0\Omega$  ва  $\omega = 2000 \text{ rad/s}$  будан, қимати ғунҷоиши конденсаторро муайян намоед, ки дар занҷир ҳодисаи резонанс ба вучуд ояд.

*Ҳал:*

Мувофиқи формулаи (11.6) муайян менамоем:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{R_1^2 + (\omega \cdot L)^2}{\omega \cdot L} = \frac{50^2 + 25^2}{25} = 125\Omega;$$

$$C = \frac{1}{\omega \cdot X_C} = \frac{1}{2000 \cdot 125} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 4\mu\text{F}.$$

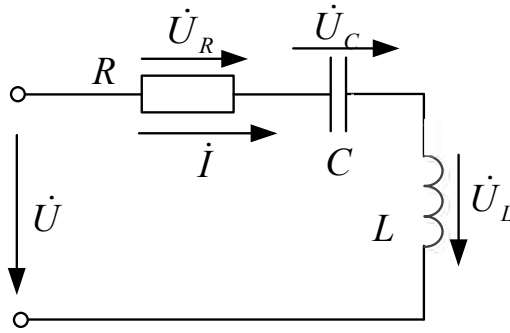
### **Резонанси шиддатҳо**

Агар ҳодисаи резонанс дар занҷири электрикӣ ҳангоми пайвасти пайдарпаи  $RLC$  – элементҳо ба вуқӯъ ояд, пас онро *резонанси шиддат* меноманд.

Ҳангоми ҳодисаи резонанс чараён дар занҷир бояд аз рӯи фаза бо шиддати манбаъ мувофиқ ояд. Ҳодисаи резонанс дар занҷири электрикӣ вақте ба вуқӯъ мепайвандад, агар муқовимати воридотии  $Z = R + j\left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)$  танҳо фаъол бошад. Ин ҳолат ҳангоми  $\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} = 0$  будан, ба амал меояд. Аз ин рӯ, шарти шурӯъ шудани резонансро дар занҷири электрикии расми 10.6 дар намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad (11.11)$$

дар ин ҷо,  $\omega_0$  – басомади резонансӣ мебошад.



Расми 11.6 – Пайвасти пайдарпаии  $RLC$ -элементҳо ҳангоми речаи резонансӣ

Ҳангоми иҷро шудани баробарии (11.11), қимати чараён ба  $i = \dot{U}/R$  баробар мешавад. Дар ин маврид, модули шиддат дар элементи индуктивӣ ба модули шиддат дар элементи ғунҷоишӣ (конденсатор) баробар мешавад:

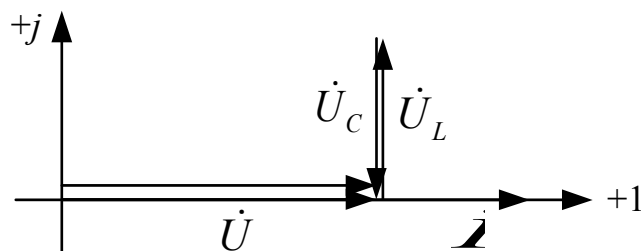
$$\dot{U}_L = \dot{U}_C = \omega_0 \cdot L \cdot i = \frac{\omega_0 \cdot L}{R} \cdot \dot{U} \quad (11.12)$$

Вобастагии байни муқовимати индуктивиї резонансӣ ( $\omega_0 \cdot L$ ) ва муқовимати фаъоли занҷирро *хушсифатии контури резонансӣ* меноманд ва онро мувофиқи формулаи зерин муайян менамоянд:

$$\frac{\omega_0 \cdot L}{R} = \frac{\sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \cdot L}{R} = \frac{\sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \cdot L^2}{R} = \sqrt{\frac{L}{C}} = Q \quad (11.13)$$

Хушсифатии контури резонансӣ ( $Q$ ) нишон медиҳад, ки шиддат дар элементи индуктивӣ ( $\dot{U}_L$ ) ва ё ғунҷоишӣ ( $\dot{U}_C$ ) чӣ қадар аз шиддат дар бандакҳои содиротии занҷир ( $\dot{U}$ ) ҳангоми речаи резонансӣ зиёд аст.

Дар таҷҳизоти радиотехникӣ қимати  $Q$  то 300 ва аз ин зиёд буда метавонад. Диаграммаи вектории шиддат ва чараён барои речаи резонансӣ дар расми 11.7 нишон дода шудааст.



Расми 11.7 – Диаграммаи вектории шиддатҳо ҳангоми речаи резонанс дар занҷири электрикӣ расми 11.6

Вобастагии байни шиддат дар элементҳои индуктивӣ ( $L$ ) ва ё ғунҷоишӣ ( $C$ ) ва ҷараёно дар занҷири электрикии расми 11.6 ҳангоми речаи резонансӣ, муқовимати тавсифӣ ( $\rho$ ) меноманд, яъне

$$\rho = Q \cdot R = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{C}} \cdot R = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (11.14)$$

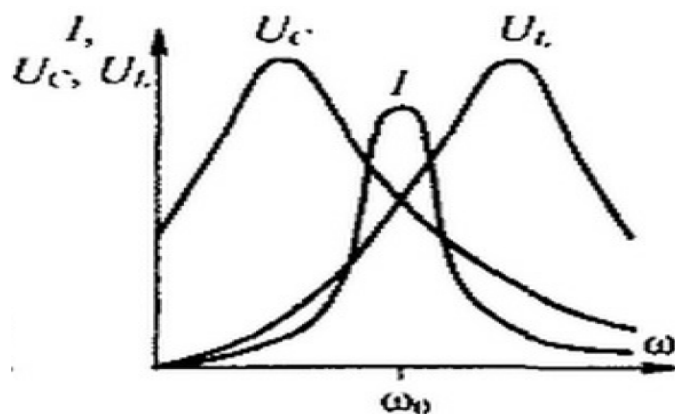
Чӣ хеле ки қайд намудем, речаи резонанс аз параметрҳои занҷири электрикӣ вобаста аст. Аз ин рӯ, речаҳои кории занҷири электрикии расми 1.10.6 – ро ҳангоми тағйирёбии параметрҳои занҷир (басомад ( $\omega$ ), индуктивиат ( $L$ ), ғунҷоиши конденсатор ( $C$ )) дида мебароем.

Бигзор дар занҷири электрикии расми 11.6 қиматҳои  $R$ ,  $L$ ,  $C$  ва  $E$  доимӣ бошанд ва қимати  $\omega$  тағйирёбанда бошад. Тағйирёбии модули ҷараён ( $I$ ) ва шиддатро дар элементҳои ғайрифаъол ( $U_L$  ва  $U_C$ ) ҳангоми тағйирёбии баосмади кунҷӣ ( $\omega$ ) дида мебароем.

Ҷараён дар занҷир ба

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}} = \frac{E}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad (11.15)$$

баробар аст.



Расми 11.8 – Вобастагиҳои  $I$ ,  $U_L$  ва  $U_C$  аз басомади кунҷӣ ( $\omega$ )

Ҳангоми тағйирёбии  $\omega$  муқовимати ғайрифаъоли занҷир  $X = \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}$

низ иваз мешавад. Дар ин ҳолат, шиддатро дар элементҳои занҷир муайян менамоем:

$$U_L = \omega \cdot L \cdot I = E \cdot \frac{\frac{Q \cdot \omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + Q^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad (11.16)$$

$$U_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot I = E \cdot \frac{\frac{Q \cdot \omega_0}{\omega}}{\sqrt{1 + Q^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad (11.17)$$

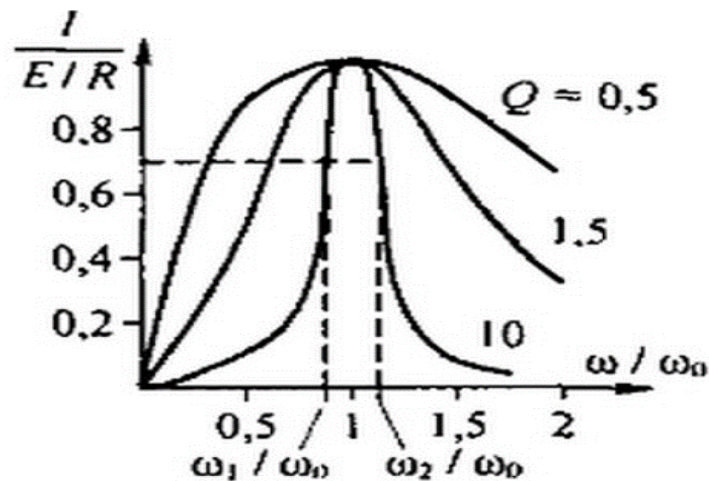
Графики вобастагии қиматҳои  $I(\omega)$ ,  $U_L(\omega)$  ва  $U_C(\omega)$  дар расми 11.8 оварда шудаанд. Аз расми 11.8 маълум аст, ки қиматҳои максималии шиддатҳо дар элементҳои индуктивӣ  $U_L$  ва ғунҷоишӣ  $U_C$  ҳангоми басомади резонансӣ  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$  набуда, балки қиматҳои максималии  $U_L$ , ҳангоми басомади  $\omega_L > \omega_0$  ва  $U_C$  бошад, ҳангоми басомади  $\omega_C < \omega_0$  мебошад, яъне

$$\begin{cases} \omega_L = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{2}{2 - \frac{R^2 \cdot C}{L}}}; \\ \omega_C = \frac{\omega_0}{\sqrt{\frac{2}{2 - \frac{R^2 \cdot C}{L}}}} = \frac{\omega_0^2}{\omega_L} \end{cases} \quad (11.18)$$

мебошад.

Одатан вобастагиҳои як бузургиро аз бузургии дигар дар воҳидҳои нисбӣ тасвир намудан муфид аст, зеро дар ин ҳолат раванди занҷирро хубтар тасвир намудан мумкин аст. Качхатҳои ҷараён дар воҳиди нисбӣ ҳангоми қиматҳои гуногуни хушсифатӣ ( $Q$ ) дар расми 11.9 тасвир шудаанд. Ин вобастагиҳо мувофиқи формулаи зерин муайян шудаанд:

$$\frac{I}{E/R} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad (11.19)$$



Расми 11.9 – Вобастагии қимати нисбии ҷараёни контур ( $I$ ) аз қимати нисбии басомади кунҷӣ ( $\omega/\omega_0$ )

Аз графики расми 11.9 чунин хулоса баровардан мумкин аст. Чӣ қадаре, ки муқовимати фаъоли контури резонансӣ ҳангоми доимӣ будани параметрҳои боқимондаи занҷир хурд бошад (ба маънои дигар чӣ қадаре, ки хушсифатии контур ( $Q$ ) зиёд бошад), ҳамон қадар шакли қачхаттаи  $I = f(\omega)$  авҷ мегирад (тез мешавад).

Фарқи байни басомадҳои  $\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$  – ро хати гузарони контури резонансӣ меноманд, ки он дар сарҳадҳои вобастагии  $\frac{I}{E/R}$  ба 0,707 баробар мебошад (расми 11.9).

Басомадҳои  $\omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{2 \cdot Q} \cdot (\sqrt{1 + 4 \cdot Q^2} \pm 1)$  – ро *басомадҳои сарҳадӣ* маноманд.

Дар ин ҳолат аргументи муқовимати воридотӣ барои занҷири электрикии расми 11.6 ба  $\varphi = \arctan \left( Q \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)$  баробар мешавад.

*Масъалаи 11.2.* Барои занҷири электрикии расми 11.6, ҳангоми  $R = 25\Omega$ ,  $L = 2H$  ва  $C = 2\mu F$  будан, басомади резонансӣ ( $\omega$ ), хушсифатӣ ( $Q$ ) ва инчунин шиддатро дар конденсатор ( $U_C$ ) муайян намоед. Агар дар бандакҳои воридотии занҷир шиддати  $U = 20 V$  ҳангоми резонанс пайваст шуда бошад.

*Ҳал:*

Басомади резонансиро муайян менамоем:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}} = 500 \text{ rad / S};$$

Пас, хушсифатӣ, чараёни занҷир ва шиддатро дар конденсатор муайян менамоем:

$$Q = \frac{\omega_0 \cdot L}{R} = \frac{500 \cdot 2}{25} = 40;$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{20}{25} = 0,8 \text{ A};$$

$$U_C = Q \cdot U = 40 \cdot 20 = 800 \text{ V}.$$

### **Адабиёт:**

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. Воспитаи таълимӣ – Москва: Высшая школа, 1996, 529 с.

2. Чӯраев Ш.Қ., Исмоилов С.Т. Электротехника (қисми 2). Занҷирҳои электрикии якфаза ва сефазаи чараёни синусоидалӣ. Воспитаи таълимӣ – Душанбе: ДТТ ба номи академик М.С. Осимӣ, 2021, 196 сах.

3. Луғати истехсолоти соҳаи энергетика (русӣ-тоҷикӣ). Муаллифон П. Раҷабов, Д. Давлатшоев, У.Т. Хочаева, М. Каримов. Нашри комбинати полиграфии Вазорати фарҳанги ҚТ. – Душанбе, 2004.

4. Р.А. Чалилов, Р.З. Икромов, М.И. Здержикова. «Практикуми лабораторӣ аз фанни асосҳои назариявии электротехника». Қисми 1. Душанбе, Матбааи ДТТ, 2010с.