Mathematical Problems of Electric Power Systems

WEEK 8 - METHODS FOR SOLVING LINEAR STEADY-STATE EQUATIONS IN POWER SYSTEMS. EXACT SOLUTION METHODS.

Tajik Technical University named after academician M.S. Osimi

Lecturer

(Shohin Jurazoda)

УСУЛҲОИ ҲАЛЛИ МУАДИЛАҲОИ ХАТТИИ РЕҶАИ БАРҚАРОРШУДАИ СИСТЕМАҲОИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКӢ. УСУЛҲОИ ҲАЛЛИ ДАҚИҚ

Мундаричаи лексия:

1. Усулҳои ҳалли муадилаҳои хаттии реҷаи барқароршудаи СЭЭ. Усулҳои ҳалли дақиқ.
2. Усули матритсаи чаппа.
3. Усули Гаусс.
4. Омилҳои ба дақиқии ҳал таъсиррасон.
5. Яклухткунии натиҷаҳои ҳисоб.
6. Табдили матритсаҳои коэффитсиентҳои муодилаҳои ҳолат.
7. Усули табдили матритса, ки ба алгоритми усули Гаус бе роҳи баръакс асоснок карда шудааст.
8. Усули табдили матритса, ки ба пайдарҳам ҷойивазкунии сутунҳои b ва x асоснок карда шудааст.
9. Адабиёт.

Усулҳои ҳалли муадилаҳои хаттии реҷаи барқароршудаи СЭЭ. Усулҳои ҳалли дақиқ. Усулҳои ҳалли муодилаҳои реҷаи барқароршудаи СЭЭ ба усулҳои дақиқ ва итератсионӣ (тахминӣ) ҷудо мешаванд. Усулҳои ҳисоби дақиқ гуфта, усулҳоеро employs меноманд, ки ҳамаи ҳисоб дақиқ (бе яклухткунӣ) муайян карда мешаванд. Усулҳои дақиқи ҳисоби системаи муодилаҳои хаттӣ имкон медиҳанд, ки қимматҳои номуайяниҳоро дар шумораи ниҳоии амалиётҳо муайян намоем. Қайд намудан зарур аст, ки ҳатто ҳангоми ҳисоб дар мошинҳои электронии ҳисобарор (МЭҲ) бо истифода аз яклухткуниҳо гузаронида мешаванд. Аз ин рӯ, қиммати номаълумҳое, ки бо усулҳои дақиқ ба даст оварда мешаванд, дорои хатогиҳои муайян мебошанд. Усулҳои дақиқи маъмултарин усули матритсаи чаппа ва усули Гаусс мебошанд.

Усули матритсаи чаппа. Дар бисёр масъалаҳои электроэнергетикӣ зарур аст, ки муодилаҳои хаттии ҳолати СЭЭ якчанд маротиба ҳангоми тағйир наёфтани нақшаи бадалӣ ва тағйирёбии ҷараёнҳои додашуда дар гиреҳҳо ва ё қувваи электроҳаракатдиҳанда (КЭҲ) дар шохаҳо ҳал намудан зарур аст. Ин маънои онро дорад, ки дар системаи муодилаҳои хаттии ҳалшавандаи

$$A \cdot X = B, \tag{8.1}$$

коэффисиентҳои матритсаи A бетағйир мемонад ва дар ин ҳолат истифодаи усули матритсаи баръакс метавонад муфид бошад [1].

Чӣ хеле, ки аз курси математикаи олӣ маълум аст, барои истифодаи усули матритсаи чаппа муайян намудани матритсаи чаппаи A^{-1} зарур аст. Вектори номуайяниҳои X бошад, тавассути зарб задани матритсаи A^{-1} ба вектори коэффисиентҳои озод муайян кардан мумкин аст:

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{8.2}$$

Тарзи муайян намудани матритсаи A^{-1} дар [2] нишон дода шудааст.

Ҳангоми истифодаи усули матритсаи чаппа шумораи камтари амалиётҳои арифметикӣ талаб карда мешавад, аммо барои системаҳои муодилаҳои хаттии алгебравии тартиби олӣ, ҳангоми ҳисоби матритсаи чаппа назар ба усули Гаусс захираи зиёди хотираи МЭҲ ва вақти зиёди ҳисобкунӣ талаб карда мешавад [1].

Мисоли 8.1. Системаи муодилаҳоро бо усули матритсаи чаппа ҳисоб намове:

$$\begin{cases} 0,354 \cdot \varphi_1 - 0,111 \cdot \varphi_2 - 0,1 \cdot \varphi_3 = -2,05; \\ -0,111 \cdot \varphi_1 + 0,561 \cdot \varphi_2 - 0,2 \cdot \varphi_3 = 9,872; \\ -0,1 \cdot \varphi_1 - 0,2 \cdot \varphi_2 + 0,377 \cdot \varphi_3 = -0,48, \end{cases} \tag{8.3}$$

Ҳал. Дар асоси муодилаи (8.2) матритсаҳои A, X (Ф) и B – ро муайян менамоем:

$$A = \begin{bmatrix} 0,354 & -0,111 & -0,1 \\ -0,111 & 0,561 & -0,2 \\ -0,1 & -0,2 & 0,377 \end{bmatrix}; \; \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}; \; B = \begin{bmatrix} -2,05 \\ 9,872 \\ -0,48 \end{bmatrix}.$$

Сипас, матритсаи чаппаи A^{-1} – ро муайян менамоем. Барои ин аввал муайянкунандаи матритсаи A – ро ёфтан зарур аст:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 0,354 & -0,111 & -0,1 \\ -0,111 & 0,561 & -0,2 \\ -0,1 & -0,2 & 0,377 \end{vmatrix} = 0,046 \neq 0.$$

Матритсаи чаппаи A^{-1} – ро муайян менамоем:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot A^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{0,046} \cdot \begin{vmatrix} 0,1714 & 0,0618 & 0,0783 \\ 0,0618 & 0,1234 & 0,0819 \\ 0,0783 & 0,0819 & 0,1862 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3,727 & 1,344 & 1,702 \\ 1,344 & 2,683 & 1,78 \\ 1,702 & 1,78 & 4,048 \end{bmatrix}.$$

Матритсаи A^{-1} – ро ба матритсаи B зарб намуда, ҳосил менамоем:

$$\Phi = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 3,727 & 1,344 & 1,702 \\ 1,344 & 2,683 & 1,78 \\ 1,702 & 1,78 & 4,048 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2,05 \\ 9,872 \\ -0,48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,8115 \\ 22,877 \\ 12,139 \end{bmatrix}.$$

Ҳамин тавр, номуайяниҳои φ_1, φ_2 ва φ_3 муттаносибан ба 4,8115; 22,877 ва 12,139 баробар мебошанд.

Усули Гаусс. Амалан тамоми усулҳои ҳалли муодилаҳои хаттии алгебравии реҷаи барқароршудаи системаи электрикӣ дар асоси усули пайдарҳам хориҷ намудани номаълумҳо, ки усули Гаус ном дорад, иҷро карда мешаванд. Ба шумори мухталифи нақшаи ҳисоббарории ин усул алгоритмҳо бо роҳи баръакс ва бе роҳи баръакс дохил мебошанд.

Алгоритми усули Гаусс бо роҳи баръакс. Ҳалли системаи n муодилаҳои хаттии алгебравии (8.1) бо алгоритми усули Гаусс бо роҳи баръакс аз ду марҳила иборат мебошад. Дар даври якум (роҳи мустақим) системаи ибтидоӣ баъд аз n қадамҳои якхела, тавре табдил меёбад, ки коэффитсиентҳои матритсаи системаи табдилёфта ба секунҷаи болоӣ табдил мегардад, яъне ҳамаи элементҳое, ки поён аз диагонали асосӣ воқеъ мебошанд, ба сифр баробар мегарданд. Дар даври дуюм (роҳи баръакс) қимматҳои номаълумҳо шуруъ аз x_n то x_1 пайдарҳам муайян карда мешаванд.

Пайдарҳамии амалиётҳо, ки ҳангоми роҳи мустақим иҷро мешаванд, чунин мебошанд:

Дар *қадами якум* ҳамаи элементҳои сатри якуми системаи муодилаҳои ибтидоии намуди

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1; \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases} \tag{8.4}$$

ба элементи a_{11} тақсим карда мешаванд. Баъд номуайянии x_1 аз ҳамаи муодилаҳои боқимонда бо роҳи ҳар як маротиба ба a_{i1} зарб намудан ва аз муодилаи сатри i тарҳ намудан, хориҷ карда мешавад ($i = 2, \ldots, n$). Дар натиҷаи ин амалиётҳо системаи муодилаҳои (8.4) бо коэффитсиентҳои матритсаи $A^{(1)}$ ҳосил мегардад:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)} \cdot x_n = b_1^{(1)}; \\ 0 + a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)} \cdot x_n = b_2^{(1)}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 + a_{n2}^{(1)} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)} \cdot x_n = b_n^{(1)} \end{cases} \tag{8.5}$$

дар ин ҷо:

$$\begin{aligned} & a_{1j}^{(1)} = a_{1j} / a_{11}; \qquad b_1^{(1)} = b_1 / a_{11}; \\ & a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1} \cdot a_{1j}^{(1)}; \qquad b_i^{(1)} = b_i - a_{i1} \cdot b_1^{(1)}, \\ & i, j = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Ҳангоми иҷрои қадами якуми амалиёт, элемент a_{11}, ки роҳбалад мебошад, набояд ба сифр баробар бошад.

Қадами дуюм аз хориҷ кардани номуайянии x_2 аз муодилаҳои 3, …, n иборат мебошад, ки дар ин қадам элементи роҳбалад $a_{22}^{(1)}$ мебошад. Дар натиҷа система ба намуди $A^{(2)} \cdot x = b^{(2)}$ оварда мешавад.

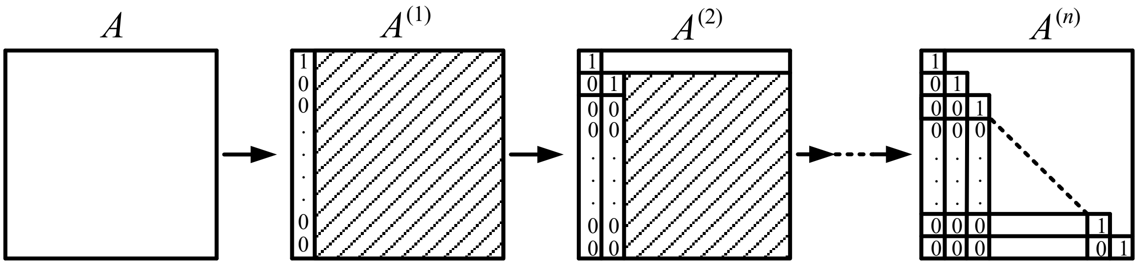
Қадамҳои сеюм ва баъд аз он ба намуди қадами дуюм иҷро карда мешаванд. Формулаҳо барои ҳисоби коэффитсиентҳои системаи муодилаҳо дар қадами ихтиёрӣ ***(k – m)*** чунин навишта мешаванд:

$$\left.\begin{aligned} & a_{kj}^{(k)} = a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}, \qquad b_k^{(k)} = b_k^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}; \\ & a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot a_{kj}^{(k)}; \qquad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot b_k^{(k)}, \\ & i, j = k+1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

Дар қадами охир ($k = n$) аз ифодаи (8.6) дуюмаш $b^{(n)}$ муайян менамояд. Ҳамин тариқ, ҳангоми роҳи мустақим элементҳои a_{11}, $a_{22}^{(1)}$, $a_{33}^{(2)}$, ..., $a_{nn}^{(n-1)}$ ҳамчун элементҳои роҳбалад пайдарҳам пеш мебароянд ва баробари сифр набудани онҳо яке аз талаботҳои раванди ҳисоббарорӣ мебошад.

Раванди табдилдиҳии коэффитсиентҳои матритсаи A – и системаи муодилаҳои ибтидоӣ ба секунҷаи болоӣ дар даври якум дар расми 8.1 ба тарзи нақшавӣ нишон дода шудааст. Дар натиҷа иҷрои n қадамҳо системаи муодилаҳои намуди зерин ба вуҷуд меояд:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)} \cdot x_2 + \ldots + a_{1(n-2)}^{(1)} \cdot x_{n-2} + a_{1(n-1)}^{(1)} \cdot x_{n-1} + a_{1n}^{(1)} \cdot x_n = b_1^{(1)}; \\ \qquad x_2 + \ldots + a_{2(n-2)}^{(2)} \cdot x_{n-2} + a_{2(n-1)}^{(2)} \cdot x_{n-1} + a_{2n}^{(2)} \cdot x_n = b_2^{(1)}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_{n-2} + \ldots + a_{(n-2)(n-1)}^{(n-2)} \cdot x_{n-1} + a_{(n-2)n}^{(n-2)} \cdot x_n = b_{n-2}^{(n-2)}; \\ \qquad\qquad\qquad x_{n-1} + a_{(n-1)n}^{(n-1)} \cdot x_n = b_{n-1}^{(n-1)}; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = b_n^{(n)}. \end{cases} \tag{8.7}$$



Расми 8.1. Раванди дабдилдиҳии коэффитсентҳои матритсаи A бо усули Гаусс бо роҳи баръакс

Дар даври роҳи баръакс номаълумҳои ҷустуҷӯшаванда дар бо тарзи зерин муайян карда мешаванд:

$$\left.\begin{aligned}
&x_{n-1}=b_{n-1}^{(n-1)}-a_{(n-1)n}^{(n-1)}\cdot x_n;\\
&x_{n-2}=b_{n-2}^{(n-2)}-a_{(n-2)n}^{(n-2)}\cdot x_n-a_{(n-2)(n-1)}^{(n-2)}\cdot x_{n-1};\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x_2=b_2^{(2)}-\sum_{j=3}^{n}a_{2j}^{(2)}\cdot x_j;\\
&x_1=b_1^{(1)}-\sum_{j=3}^{n}a_{1j}^{(1)}\cdot x_j.
\end{aligned}\right\}\tag{8.8}$$

Дар намуди умумӣ формулаҳоро барои роҳи баръакс чунин метавон навишт:

$$x_i=b_i^{(i)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}^{(i)}\cdot x_j,\qquad i=n-1,\ldots,1.\tag{8.9}$$

Мисоли 8.2. Системаи муодилаҳои хаттии (8.3) – ро бо истифода аз усули Гаусс бо роҳи баръакс ҳисоб намоед.

Ҳал. Системаи муодилаҳои хаттиро бо роҳи пайдарпай хориҷ намудани ҳамаи элементҳои аз диагнал поён ҳал менамоем:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}
0,354 & -0,111 & -0,1 & -2,05\\
 & & & \\
-0,111 & 0,561 & -0,2 & 9,872\\
-0,1 & -0,2 & 0,377 & -0,48
\end{array}\right]
\begin{array}{ccc}
 & 0,111/0,354 & 0,1/0,354\\
 & \downarrow & \downarrow\\
\leftarrow & + & \downarrow\\
\leftarrow & \leftarrow & +
\end{array}.$$

Дар қадами аввал элементи роҳбалад a_{11} = 0,354 мебошад, аз ин рӯ ҳамаи элементҳои сатри якумро ба 0,354 тақсим менамоем. Сипас, дар асоси системаи муодилаҳои (8.6) муайян менамоем:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & -0,3135 & -0,2825 & -5,791\\
0 & 0,526 & -0,2314 & 9,229\\
 & & & \\
0 & -0,2314 & 0,349 & -1,059
\end{array}\right]
\begin{array}{cc}
 & \\
 & 0,2314/0,526\\
 & \downarrow\\
\leftarrow & +
\end{array}.$$

Дар қадами дуюм элементи роҳбалад $a_{22}^{(1)}$ = 0,526 мебошад, аз ин рӯ ҳамаи элементҳои сатри якумро ба 0,526 тақсим менамоем. Сипас, дар асоси системаи муодилаҳои (8.6) муайян менамоем:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,3135 & -0,2825 & -5,791 \\ 0 & 1 & -0,44 & 17,546 \\ 0 & 0 & 0,247 & 3,002 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ . \\ \leftarrow \quad /0,247 \end{array}$$

Ҳамин тавр, дар қадами сеюм элементи роҳбалад $a_{33}^{(2)} = 0,247$ мебошад, аз ин рӯ ҳамаи элементҳои сатри сеюмро ба 0,247 тақсим менамоем:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,3135 & -0,2825 & -5,791 \\ 0 & 1 & -0,44 & 17,546 \\ 0 & 0 & 1 & 12,154 \end{array}\right].$$

Дар марҳилаи дуюм (роҳи баръакс), қимматҳои номуайяниҳоро шуруъ аз φ_3 то φ_1 муайян менамоем:

$$\begin{cases} \varphi_3 = 12,154; \\ \varphi_2 = 17,546 + 0,44 \cdot 12,154 = 22,894; \\ \varphi_1 = -5,791 + 0,3135 \cdot 22,894 + 0,2825 \cdot 12,154 = 4,82. \end{cases}$$

Алгоритми усули Гаус бе роҳи баръакс. Ҳалли системаи n муодилаҳои хаттии алгебравӣ бо ин алгоритм дар давоми як давр иҷро карда мешавад, ки дар натиҷаи он коэффитсиентҳои матритсаи A баъд аз n қадамҳои якхела ба ягона оварда мешавад, яъне системаи муодилаҳо нисбат ба номаълумҳои ҷустуҷӯшаванда ҳал мешаванд.

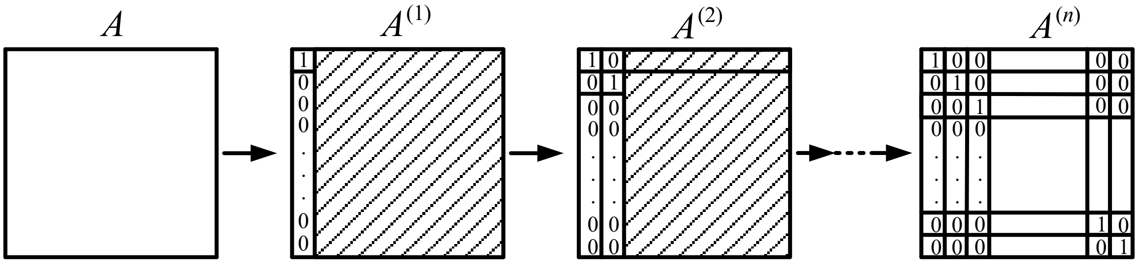
Дар қадами якум ҳисоббарорӣ ба монанди алгоритми усули Гаус бо роҳи баръакс иҷро карда мешавад. Дар натиҷаи ин системаи муодилаҳои табдилёфтаи $A^{(1)} \cdot x = b^{(1)}$ ба даст омада бо он тавсиф карда мешавад, ки элементи якуми сутуни якуми матритса ба як баробар мебошад, ва элементҳои боқимондаи сутун ба сифр баробар мебошанд.

Дар қадами дуюм ҳамчун дар алгоритми пешина, ба сифати элементи роҳбалад элементи диагоналии сутуни дуюми матритсаи $A^{(1)}$ интихоб карда мешавад, яъне $a^{(1)}_{22}$. Фарқият дар он аст, ки иловатан, инчунин сатри якуми матритсаи $A^{(1)}$ табдил дода мешавад. Ҳамин тариқ элементи $a^{(1)}_{12}$ ба сифр баробар гардад.

Амалиёти қадами ихтиёрӣ (*k-юм*) бо табдилдиҳии *k-юм* сутун ҳамин тавре, ки элементи диагоналии он мувофиқ мебошад ($a^{(k)}_{kk}$) ба як баробар гардад, ва элементҳои ғайридиагоналӣ ($a^{(k)}{}_{jk}$, $j \neq k$) ба сифр баробар гардад. Формулаҳо барои ҳисоби коэффитсиентҳои системаи муодилаҳо дар қадами k-юм айнан ба монанди алгоритми усули Гаус бо роҳи баръакс мешаванд, танҳо бо тағйирдиҳии ҳудуди индекси сатри i фарқ менамоянд, чунки дар ҳар як қадам элементҳои ҳамаи сатрҳои матритсаи $A^{(k)}$ ҳал карда мешаванд. Бинобар ин, дар қадами k-юм элементҳои матритсаи $A^{(k)}$ ва сутуни $b^{(k)}$ бо ифодаҳои зерин муайян карда мешавад:

$$\left.\begin{array}{l} a_{kj}^{(k)} = a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}, \qquad b_k^{(k)} = b_k^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}; \\ a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot a_{kj}^{(k)}; \qquad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot b_k^{(k)}, \\ i = 1, \ldots, n; \qquad i \neq k; \quad j = k+1, \ldots, n. \end{array}\right\} \tag{8.10}$$

Дар натиҷаи иҷрои қадами охирон ($k = n$), ки дар он элементҳои сутуни охирини матритсаи $A^{(n-1)}$ ва ҳамаи элементҳои сутуни $b^{(n-1)}$ ҳал карда мешаванд, матритсаи $A^{(n)} = 1$ – ро ҳосил менамоем ва ҳамин тариқ, $x = b^{(n)}$ мешавад. Раванди табдилёбии коэффитсиентҳои матритсаи A – и системаи муодилаҳои ибтидоӣ ба яккӣ дар расми 8.2 нақшавӣ оварда шудааст, ки дар инҷо ҳудудҳои рахрахкардашуда ба элементҳои дар ҳар як қадам ҳалшаванда мувофиқ мебошанд.



Расми 8.2. Раванди дабдилдиҳии коэффитсентҳои матритсаи A бо усули Гаусс бе роҳи баръакс

Мисоли 8.3. Системаи муодилаҳои хаттии (8.3) – ро бо истифода аз усули Гаусс бе роҳи баръакс ҳисоб намоед.

Ҳал. Системаи муодилаҳои хаттиро бо роҳи пайдарпай хориҷ намудани ҳамаи элементҳо ба ғайр элементҳои диагналӣ (a_{ii}) ҳисоб менамоем:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0,354 & -0,111 & -0,1 & -2,05 \\ & & & \\ -0,111 & 0,561 & -0,2 & 9,872 \\ -0,1 & -0,2 & 0,377 & -0,48 \end{array}\right] \begin{array}{lcc} & 0,111/0,354 & 0,1/0,354 \\ & \downarrow & \downarrow \\ \leftarrow & + & \downarrow \\ \leftarrow & \leftarrow & + \end{array}.$$

Дар қадами аввал элементи роҳбалад $a_{11} = 0,354$ мебошад, аз ин рӯ ҳамаи элементҳои сатри якумро ба 0,354 тақсим менамоем. Сипас, дар асоси системаи муодилаҳои (8.10) муайян менамоем:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0,3135 & -0,2825 & -5,791 \\ & & & \\ 0 & 0,526 & -0,2314 & 9,229 \\ & & & \\ 0 & -0,2314 & 0,349 & -1,059 \end{array}\right] \begin{array}{lccc} \leftarrow & + & & \\ & \uparrow & & \\ & 0,3135/0,526 & & 0,2314/0,526. \\ & & & \downarrow \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & + \end{array}$$

Дар қадами қадами элементи роҳбалад $a_{22}^{(1)} = 0,526$ мебошад, аз ин рӯ ҳамаи элементҳои сатри якумро ба 0,526 тақсим менамоем. Сипас, дар асоси системаи муодилаҳои (8.10) муайян менамоем:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0,4204 & -0,2903 \\ & & & \\ 0 & 1 & -0,44 & 17,546 \\ & & & \\ 0 & 0 & 0,247 & 3,002 \end{array}\right] \begin{array}{lccc} \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & + \\ & & & \uparrow \\ \leftarrow & + & & \uparrow \\ & \uparrow & & \uparrow \\ & 0,44/0,247 & & 0,4204/0,247 \end{array}$$

Ҳамин тавр, дар қадами сеюм элементи роҳбалад $a_{33}^{(2)} = 0,247$ мебошад, аз ин рӯ ҳамаи элементҳои сатри сеюмро ба 0,247 тақсим менамоем:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4,819 \\ 0 & 1 & 0 & 22,894 \\ 0 & 0 & 1 & 12,154 \end{array}\right] \text{ ва ё } \begin{cases} \varphi_1 = 4,819; \\ \varphi_2 = 22,894; \\ \varphi_3 = 12,154. \end{cases}$$

Омилҳои ба дақиқии ҳал таъсиррасон. Алгоритмҳои баррасишудаи усули Гаусс сода, аён ва барои барномарезӣ дар МЭҲ осон мебошанд. Вале истифодаи онҳо доимо имкон намедиҳанд, ки ҳалли бо дақиқии қабулшавандаро ба даст орем ва ё умуман ба даст овардани ҳалли онҳо имконнопазир мегардад. Сабабҳои асосии пайдоиши хатогии калон инҳоянд:

- яклухткунии натиҷаҳои ҳисоб (ҳангоми ҳисобкунии дастӣ ва ё бо истифода аз МЭҲ);
- дақиқ набудани маълумоти ибтидоӣ (одатан барои масъалаҳои муҳандисӣ хос аст), ки дар баъзе ҳолатҳо метавонад боиси коҳиши бениҳоят зиёди дақиқии ҳал гардад.

Яклухткунии натиҷаҳои ҳисоб. Ҳисоби системаи муодилаҳои хаттӣ бо истифода аз усули Гаусс талаб мекунад, ки элементи роҳбалади $a^{(k-1)}{}_{kk}$ ба сифр баробар набошад. Қиммати элементҳои роҳбаладро бе иҷрои ҳисобкуниҳои пайдарпайи элементҳои матритсаи A ҳангоми ҳал мувофиқат мекунанд, баҳо додан ғайриимкон аст. Мавридҳое во меҳӯранд, ки дар ягон қадам элементи роҳбалад ҳангоми ҳисобкуниҳои дақиқ ба сифр баробар шавад. Дар ин ҳолат ба даст овардани ҳал имконнопазир мегардад.

Табдили матритсаҳои коэффитсиентҳои муодилаҳои ҳолат. Дар як қатор масъалаҳои электроэнергетикӣ (одатан ҳангоми ҳисобҳои равандҳои гузаранда дар СЭЭ) ҳалли бешумори муодилаҳои хаттии ҳолат ҳангоми нақшаи бадалии система ва ивазшавии ҷараёнҳои додашуда ё ин ки ҚЭҲ дар шохаҳо бетағйир талаб карда мешавад. Ин чунин маъно дорад, ки дар системаи муодилаҳои хаттии ҳалшавандаи $A \cdot x = b$ коэффитсиентҳои матритсаи A (ин ё он матритсаи параметрҳои ҷамъкардашуда) бетағйир мемонад ва дар ҳар як ҳисоб танҳо сутунҳои тарафи рост b тағйир меёбад. Дар чунин ҳолатҳо табдили матритсаи A мақсаднок мебошад, яъне дида баромадани ҳалли системаи муодилаҳо дар намуди $x = A^{(-1)} \cdot b$. Барои оне ки x муайян карда шавад, бояд $A^{(-1)}$ – ро ҳисоб кард ва ин матритсаро ба сутуни тарафи рост b зарб намуд. Маълум аст, ки ҳосил намудани матритсаи баръакс нисбат ба ҳалли системаҳои муодилаҳои хаттии алгебравӣ бо усули Гаусс ҳаҷми зиёди ҳисоббарориро талаб менамояд. Бо вуҷуди ин ҳангоми иҷрои як қатор ҳисобҳои аз қиматҳои элементҳои сутуни b фарқкунанда, ин табдилдиҳӣ як маротиба иҷро мешавад, ва баъд ҳар як ҳали нав танҳо ба зарб намудани матритсаи баръакс ба сутун ҳосил мешавад. Ҳангоми зиёд будани чунин ҳисобҳо ҳаҷми ҳисоббарорӣ низ муқоиса ба ҳаҷми ҳисоббарорӣ бо усули Гаус бисёр кам мебошад.

Усули классикии ҳисоббарории матритсаи баръакси қатори n, ҳиссоббарории n^2 муайянкунандагони қатори $n-1$ ва як муайянкунандаи қатори n – ро талаб карда мешавад. Аз рӯйи шумораи амалиётҳои арифметикӣ ва душвор будани барномасозӣ ин аз қатори усулҳои амалии қабулшудаи ба алгоритми усули Гаус монанд, монданӣ надорад [3].

Усули табдили матритса, ки ба алгоритми усули Гаус бе роҳи баръакс асоснок карда шудааст. Чӣ хеле маълум аст, система аз n муодилаҳои алгебравии хаттӣ иборатбуда бо усули Гаус бе роҳи баръакс баъд аз n қадамҳо ҳал карда мешавад, ки дар натиҷаи онҳо системаи ибтидоӣ $A \cdot x = b$ ба намуди $1 \cdot x = b'$ ё $x = b'$ табдил меёбад.

Агар ҳалли m системаи муодилаҳо бо матритсаҳои якхелаи A – и қатори n ва бо сутунҳои гуногуни тарафи рост b_i $(i = 1,\ldots, m)$ зарур бошад, онгоҳ онҳоро ба системаи умумии намуди (8.1) ворид намудан мумкин аст, ки дар чо, $X = [x_1, x_2,\ldots, x_m]$, $B = [b_1, b_2,\ldots, b_m]$ – матритсаҳои росткунҷа бо ченаки $n \times m$.

Ҳалли ин системаро бо алгоритми усули Гаус бе роҳи баръакс, яъне бо истифодабарии системаи формулаҳои (8.10) иҷро намудан мумкин аст, ки дар онҳо ба ҷои элементҳои сутуни b элементҳои матритсаи B иштирок менамоянд:

$$\left.\begin{array}{l} a_{kj}^{(k)} = a_{kj}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}; \qquad b_{kl}^{(k)} = b_{kl}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)}; \\ a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot a_{kj}^{(k)}; \qquad b_{il}^{(k)} = b_{il}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} \cdot b_{kl}^{(k)}, \\ i = 1,\ldots,n; \quad i \neq k; \quad j = k+1,\ldots,n, \quad l = 1,\ldots,m. \end{array}\right\} \tag{8.11}$$

Агар ба сифати B матритсаи воҳидии қатори n – ро гирем, он гоҳ ҳалли системаи (8.1) матритсаи квадратӣ $X = B'$ мешавад, илова бар ин, аз сабабе, ки $A \cdot X = 1$ мебошад, онгоҳ $A \cdot B' = 1$ мешавад ва ҳамин тавр $B' = A^{-1}$ мебошад. Ҳамин тариқ, табдили матритсаи A ба ҳалли яквақтаи n системаи муодилаҳо бо усули Гаусс бе роҳи баръакс оварда мешавад.

Усули табдили матритса, ки ба пайдарҳам ҷойивазкунии сутунҳои b ва x асоснок карда шудааст. Агар системаи муодилаҳои алгебравии хаттиро ба табдилдиҳӣ дучор намоем, ки дар натиҷаи он сутунҳои қисмҳои рост ва номаълумҳо бо ҳамдигар ҷойиваз менамоянд, яъне аз $A{\cdot}x = b$, $C{\cdot}b = x$ ҳосил мешавад. Азбаски $x = A^{-1}{\cdot}b$ мебошад, онгоҳ $C{\cdot}b = A^{-1}$ мешавад. Ин табдилдиҳиро барои системаи қатори n бо n қадамҳои якхела мумкин аст иҷро намуд.

Қадами якум. Дар системаи муодилаи ибтидои (8.4) муодилаи якумро нисбат ба x_1 ҳал менамоем ва ифодаи ҳосилшударо ба муодилаҳои боқимондаи система мегузорем:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a_{11}}\cdot b_1 - \dfrac{a_{12}}{a_{11}}\cdot x_2 - \dots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}\cdot x_n = x_1; \\ \dfrac{a_{21}}{a_{11}}\cdot b_1 + \left(a_{22} - a_{21}\cdot\dfrac{a_{12}}{a_{11}}\right)\cdot x_2 + \ldots + \left(a_{2n} - a_{21}\cdot\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}\right)\cdot x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{a_{n1}}{a_{11}}\cdot b_1 + \left(a_{n2} - a_{n1}\cdot\dfrac{a_{12}}{a_{11}}\right)\cdot x_2 + \ldots + \left(a_{nn} - a_{n1}\cdot\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}\right)\cdot x_n = b_n. \end{cases} \qquad (8.12)$$

Ин системаро дар намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}\cdot b_1 + a_{12}^{(1)}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}\cdot x_n = x_1; \\ a_{21}^{(1)}\cdot b_1 + a_{22}^{(1)}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}\cdot x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}^{(1)}\cdot b_1 + a_{n2}^{(1)}\cdot x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}\cdot x_n = b_n. \end{cases} \qquad (8.13)$$

дар ин ҷо:

$$a_{11}^{(1)} = 1/a_{11}, \quad a_{i1}^{(1)} = a_{i1}\cdot a_{11}^{(1)}, \quad a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}^{(1)}\cdot a_{1j}, \quad a_{1j}^{(1)} = -a_{1j}\cdot a_{11}^{(1)}, \quad i,j = 2,\ldots,n.$$

Дар натиҷа системаи зеринро ҳосил менамоем

$$A^{(1)}\cdot\begin{bmatrix} b_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (8.14)$$

Қадами дуюм. Дар системаи (8.14), ки дар қадами якум ёфта шудааст, муодилаи дуюмро нисбат ба x_2 ҳал менамоем ва ин ифодаро ба ҳамаи муодилаҳои боқимонда мегузорем. Дар натиҷа системаи зеринро ҳосил менамоем:

$$A^{(2)} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \tag{8.15}$$

дар ин ҷо: элементҳои матритсаи $A^{(2)}$ бо ифодаҳои зерин ҳисоббарорӣ карда мешаванд:

$$a_{22}^{(2)} = 1/a_{22}^{(1)}, \quad a_{i2}^{(2)} = a_{i2} \cdot a_{22}^{(2)}, \quad a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(2)} \cdot a_{2j}^{(1)},$$
$$a_{2j}^{(2)} = -a_{2j}^{(1)} \cdot a_{22}^{(2)}, \quad i, j = 1,\ldots,n; \quad i, j \neq 2.$$

Қадами сеюм ва дигарҳо ҳамин тавр иҷро мешаванд. Бо вуҷуди ин формулаҳо барои ҳисоби элементҳои матритсаи $A^{(k)}$ дар дилхоҳ қадами k – юм чунин навишта мешаванд:

$$\begin{gathered} a_{kk}^{(k)} = 1/a_{kk}^{(k-1)}; \quad a_{ik}^{(k)} = a_{ik}^{(k-1)} \cdot a_{kk}^{(k)}; \\ a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k)} \cdot a_{kj}^{(k-1)}; \quad a_{kj}^{(k)} = -a_{kj}^{(k-1)} \cdot a_{kk}^{(k)}, \\ i, j = 1,\ldots,n; \quad i, j \neq k. \end{gathered} \tag{8.16}$$

Ҳамин тариқ, баъд аз n қадамҳо матритсаи $A^{(n)} = A^{-1}$ – ро ҳосил менамоем.

Адабиёт

1. Веников В.А. Математические задачи электроэнергетики: Учебник для студентов вузов / В.А. Веников, Э.Н. Зуев, И.В. Литкенс и др., под ред. В.А. Веникова – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1981. – 288 с.

2. Филяев К.Ю. Математические задачи энергетики: Учебно-методический комплекс / К.Ю. Филяев – Челябинск: 2005. – 212 с.

3. Ҷӯраев Ш.Ҷ., Раҳимов Ҷ.Б., Султонов Ш.М. Масъалаҳои математикӣ дар электроэнергетика. Восоити таълимӣ барои иҷрои корҳои мустақилона – Душанбе: ДТТ ба номи академик М.С. Осимӣ, 2021. – 94 саҳ.