Mathematical Problems of Electric Power Systems

WEEK 9 - SOLVING STATE EQUATIONS USING ITERATIVE METHODS. SIMPLE ITERATION METHOD.

Tajik Technical University named after academician M.S. Osimi

Lecturer

(Shohin Jurazoda)

Ҳалли муодилаҳои ҳолат бо истифода аз усулҳои итератсионӣ. Усули итератсияи оддӣ

Мундаричаи лексия:

1. Ҳалли муодилаҳои ҳолат бо истифода аз усулҳои итератсионӣ.
2. Усули итератсияи оддӣ.
3. Адабиёт.

Ҳалли муодилаҳои ҳолат бо истифода аз усулҳои итератсионӣ. Усулҳои иттератсионии ҳалли системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ имкон медиҳанд, ки қимматҳои тағйирёбандаҳои ҷустуҷӯшаванда дар натиҷаи якчанд маротиба иҷро намудани қадамҳои якхелаи ҳисоббарорӣ, ки пайдарҳамии тахминӣ ё итератсионӣ ном доранд, ҳосил шаванд. Нисбат ба усулҳои дақиқ, ки усули Гаусс ба шумори ин усулҳо дохиласт, ҳалро танҳо бо дақиқияти охирини додашуда ҳосил намудан мумкин аст. Илова бар ин, бо зиёдшавии дақиқияти лозима инчунин шумораи итератсияҳо зиёд мегарданд [1].

Дар раванди итератсионӣ коэффитсиентҳои матритсаи A – и системаи муодилаҳои хаттиро табдил додан шарт нест, ки ин имкони ба таври максималӣ истифода бурдани пуркунии онро медиҳад. Ин дар навбати худ ба ҳаҷми ками ҳисоббарорӣ дар ҳар як итератсия қиёс ба ҳар як қадами усули Гаусс меорад. Аммо шумораи умумии итератсия аз қатори n системаи муодилаҳои ҳалшаванда метавонад зиёд бошад.

Ҳамин тариқ, ҳисоббарорӣ бо усулҳои иттератсионӣ нисбат ба усули Гаусс он қадар самаранок нест. Дар солҳои пеш бо кам будани ҳаҷми хотираи мошинҳои ҳисоббрории рақамӣ усулҳои итератсионӣ васеъ истифода мешуданд. Аммо имрӯзҳо аз сабаби маҳдуд набудани ҳаҷми хотираи мошинҳои ҳисоббарори рақамӣ, усули иттератсионӣ барои ҳалли муодилаҳои ҳолати системаҳои электрикӣ камтар истифода мешаванд [2].

Усулҳои итератсионӣ ва ё тақрибӣ усулҳое мебошанд, ки ҳатто бо назардошти яклухт накардани решаҳои муодилаҳо ҳангоми ҳисоб, ҳалли онҳо танҳо бо дақиқии додашуда ба даст оварда мешавад. Усулҳои зерини итератсионӣ вуҷуд дорад: усули итератсияи оддӣ, усули Гаусс – Зейдел, усули Нютон ва ғайраҳо [1].

Усулҳои итератсионӣ дорои хусусиятҳои зерин мебошанд:

1. Ҳангоми истифода бурдани ин гуна усулҳо бояд қиматҳои тақрибии ибтидоии номаълумҳоро дода шаванд;

2. Ҷустуҷӯи ҳалли системаи муодилаҳо аз рӯи нақшаи итератсионӣ дар намуди пайдарпай наздик шудан ба қиматҳои ҳақиқии номаълумҳо ба амал меояд, ки шумораи итеоатсияҳо пешакӣ маълум нест;

3. Барои ба даст овардани ҳал зарур аст, ки ҷараёни итератсионӣ наздикшаванда бошад, яъне бо ҳар як қадами нави ҳисоб решаҳои номуайяниҳо ба решаҳои ҳақиӣ бояд наздиктар шаванд.

Бо ёрии усулҳои итератсионӣ ҳалли системаи муодилаҳоро то дараҷаи дилхоҳи дақиқӣ таъмин намудан мумкин аст. Ҳисоби реҷаҳои кори барқароршудаи СЭЭ, ки бо ёрии системаи муодилаҳои ғайрихаттӣ навишта мешаванд, дар ҳолати умумӣ метавонад танҳо бо методҳои итератсионӣ амалӣ карда шавад.

Ду усули итератсионии ҳалли системаҳои муодилаҳои алгебравии хаттиро (усули итератсияи оддӣ ва усули Гаусс – Зейдел) дида бароем. Ин усулҳо барои ҳалли муодилаҳои ғайрихаттии реҷаи барқароршуда, ки алоқамандии тавоноӣ ва шиддатро дар гиреҳҳои СЭЭ нишон медиҳад, бо умумигардонии оддӣ имконпазир мегардонанд. Илова ба ин, хусусиятҳои зиёди раванди итератсионии ҳалли муодилаҳои ғайрихаттии реҷаи барқароршудаи СЭЭ – ро метавон тавассути баррасӣ намудани ҳолати соддатар – ҳалли муодилаҳои хаттии ҳолат, шарҳ дод.

Барои ҳалли системаи муодилаҳои алгебравии хаттии намуди (8.1) бо усулҳои итератсионӣ, матритсаи квадратии A – ро ба ду матритсаҳои R ва V ҷудо менамоем:

$$A = R + V. \tag{9.1}$$

Ҳангоми ҷудо намудан ба инобат мегирем, ки матритсаи R дорои матритсаи баръакси R^{-1} бошад, ки ин имконияти ба намуди зерин табдил додани системаи муодилаҳои ибтидоии (9.1) – ро медиҳад:

$$X = R^{-1}\cdot V\cdot X + R^{-1}\cdot B. \tag{9.2}$$

Амал бо усули итератсионӣ барои ҳалли системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ аз як наздикшавии дилхоҳи ибтидоии тағйирёбандаҳо $X^{(0)}$ оғоз меёбад. Наздикшавии $X^{(0)}$ ба қисми рости системаи муодилаҳои (9.2) гузошта мешавад ва наздикшавии наву дақиқтари $X^{(1)}$ ҳисоб карда мешавад. Сипас, наздикшавии $X^{(1)}$ ба системаи муодилаҳои (9.2) гузошта мешавад ва ба шабеҳи наздикшавии $X^{(1)}$, наздикшавии дуюми $X^{(2)}$ ва ғайра ҳисоб карда мешавад. Дар ҳар як қадами итератсионии n, наздикшавии $X^{(n)}$ муайян карда мешавад. Мувофиқи ифодаи рекуррентии (9.2) ҳалли системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ бо роҳи пайдарпай наздикшавии тағйирёбандаҳо раванди итератсионии амалӣ карда мешавад:

$$\begin{cases} X^{(1)} = R^{-1} \cdot V \cdot X^{(0)} + R^{-1} \cdot B; \\ X^{(2)} = R^{-1} \cdot V \cdot X^{1} + R^{-1} \cdot B; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X^{(n)} = R^{-1} \cdot V \cdot X^{(n-1)} + R^{-1} \cdot B; \end{cases} \tag{9.3}$$

Агар пайдарпаии наздикшавиҳои (9.3) дорои ҳудуди охирин бошад, он гоҳ раванди итератсионӣ ба ҳал наздикшаванда мебошад, он ҳам ҳангоми шарти зерин иҷро шавад:

$$X^{*} = \lim_{n \to \infty} X^{(n)} \tag{9.4}$$

дар ин ҷо, X^{*} – ҳалли системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ бо усули дақиқ мебошад.

Ҳангоми иҷро шудани шарти (9.4) раванди итератсионӣ наздикшаванда номида мешавад. Дар ҳолати баръакс бошад, ҷараёни итератсионӣ ба ҳалли муодила оварда намерасонад ва дуршаванда номида мешавад.

Аз нуқтаи назари назариявӣ ҳалли X^{*} ҳангоми беохир будани шумораи итератсияҳои n ба даст оварда мешавад. Дар амалия раванди итератсионӣ то вақте идома мекунад, ки қимати наздикшавии тағйирёбандаҳои дар ду итератсияҳои ҳамсоя ҳисобшуда аз нишондоди хатогии додашудаи ҳалли ε хурдтар бошад, яъне то иҷро шудани шарти зерин:

$$\left| X^{(n)} - X^{(n-1)} \right| \le \varepsilon \tag{9.5}$$

Гуногун будани усулҳои итератсионии ҳалли системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ аз намуди ҷудо намудани матритсаи A ба матритсаҳои R ва V муайян карда мешавад.

Барои системаи муодилаҳои (8.1) матритсаҳои R ва V намуди зеринро дорад:

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}. \tag{9.6}$$

Усули итератсияи оддӣ. Ҳангоми истифода намудани усули итератсияи оддӣ системаи ибтидоии муодилаҳои хаттии алгебравии намуди

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1; \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases} \tag{9.7}$$

бо назардошти он ки $a_{ii} \neq 0$, $i = 1,\dots, n$ мебошад, ба намуди зерин оварда мешавад:

$$\left.\begin{aligned} & x_1 = \frac{1}{a_{11}} \cdot \left(b_1 - a_{12} \cdot x_2 - \dots - a_{1n} \cdot x_n\right); \\ & x_2 = \frac{1}{a_{22}} \cdot \left(b_2 - a_{21} \cdot x_1 - a_{23} \cdot x_3 - \dots - a_{2n} \cdot x_n\right); \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & x_n = \frac{1}{a_{nn}} \cdot \left(b_n - a_{n1} \cdot x_1 - a_{n2} \cdot x_2 - \dots - a_{n(n-1)} \cdot x_{n-1}\right). \end{aligned}\right\} \tag{9.8}$$

Системаи муодилаҳои (9.8) мувофиқи усули итератсияи оддӣ бо чунин тарз ҳал карда мешавад:

1) дар қадами ибтидоӣ ба номаълумҳо қимати ибтидоии (нулии) тахминӣ дода мешаванд $x^{(0)}_i$, $i = 1,\dots, n;$

2) қимматҳои ибтидоии $x^{(0)}_i$ дар тарафи рости системаи муодилаҳои (9.7) гузошта мешаванд ва ҳамин тавр номаълумҳои тахминии навбатӣ (қадами якум) муайян карда мешаванд $x^{(1)}_i$, $i = 1,\dots, n;$

3) бо гузоштани қимматҳои ҳосилшудаи қадами якум $x^{(1)}{}_i$ қиматҳои тахминии навбатӣ муайян карда мешаванд ва ғайра.

Ҳамин тариқ, дар қадами итератсионии дилхоҳи k – юм системаи муодилаҳои (9.8) ба таври зайл навишта мешавад:

$$\left.\begin{aligned}
&x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}} \cdot \left(b_1 - a_{12} \cdot x_2^{(k-1)} - \ldots - a_{1n} \cdot x_n^{(k-1)}\right);\\
&x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}} \cdot \left(b_2 - a_{21} \cdot x_1^{(k-1)} - a_{23} \cdot x_3^{(k-1)} - \ldots - a_{2n} \cdot x_n^{(k-1)}\right);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}} \cdot \left(b_n - a_{n1} \cdot x_1^{(k-1)} - a_{n2} \cdot x_2^{(k-1)} - \ldots - a_{n(n-1)} \cdot x_{n-1}^{(k-1)}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (9.9)$$

ва ё да намуди матритсавӣ ба таври зерин навиштан мумкин аст:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \ldots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} & \vdots & a_{1n}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0 & \vdots & a_{2n}/a_{22} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{n1}/a_{nn} & a_{n1}2/a_{nn} & \vdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ \ldots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \ldots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (9.10)$$

Раванди итератсионӣ то ҳамон вақте давом меёбад, ки қимати x_i – и дар ду итератсияи алоқаманд (ҳамсоя) ҳосилшуда набояд аз хатогии додашудаи ε зиёд бошад, яъне то иҷро шудани шарти зерин:

$$\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \varepsilon, \qquad i = 1,\ldots,n. \qquad (9.11)$$

Барои иҷрои шарти (9.11) ҳангоми дилхоҳ дақиқияти додашуда, яъне новобаста аз хурд будани қимати ε бояд ҳудуди зерин

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^*, \qquad i = 1,\ldots,n, \qquad (9.12)$$

ҷой дошта бошад.

дар инҷо, $x^*{}_i$ – ҳалли дақиқи системаи муодилаҳои ибтидоӣ мeебошад.

Итератсияи оддиро дар намуди алгебравӣ дар намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$x_i^{(k)} = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \cdot x_j^{(k-1)} + \frac{b_i}{a_{ii}}. \qquad (9.13)$$

Ҳангоми иҷрои ҳудуди (9.12) барои дилхоҳ қиммати тахминии ибтидоии $x^{(0)}{}_i$, $i = 1,\ldots, n$ раванди итератсионӣ мувофиқой ном мегирад. Дар ҳолати баръакс бошад, раванди итератсионӣ ба ҳалли системаҳои муодилаҳо намеорад ва номувофиқӣ ном мегирад.

Барои аниқ намудани шарти мувофиқоии раванди итератсионӣ бо истифодаи усули итератсияи оддӣ, системаи муодилаҳои (9.7) – ро ба намуди матритсавӣ менависем. Системаи муодилаҳои ибтидоии (9.7) бо роҳи баровардани матритсаи диагналии $A_д = \mathrm{diag}(a_{ii})$, $i = 1,\ldots, n$ ва иҷро намудани табдилҳиҳои зерин, ба намуди навишти (9.8) оварда мешавад:

$$\left(A - A_д + A_д\right) \cdot x = b; \quad A_д \cdot x = b - \left(A - A_д\right) \cdot x; \tag{9.14}$$

$$x = A_д^{-1} \cdot b - A_д^{-1} \cdot \left(A - A_д\right) \cdot x; \quad x = B + C \cdot x, \tag{9.15}$$

дар ин ҷо, $B = A_д^{-1} \cdot b; \; C = 1 - A_д^{-1} \cdot A.$

Дар асоси баробариҳои (9.14) ва (9.15) навишти математикии раванди итератсионии (9.9) дар намуди матритсавӣ намуди зеринро мегирад:

$$x^{(k)} = B + C \cdot x^{(k-1)}, \tag{9.16}$$

дар асоси баробарии (9.16), чунин навиштан мумкин аст:

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = C \cdot \left(x^{(k)} - x^{(k-1)}\right). \tag{9.17}$$

Азбаски ифодаи (9.17) барои дилхоҳ қимати тағйирёбандаҳо дуруст аст, пас онро ба намуди зерин навиштан мумкин аст:

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = C^k \cdot \left(x^{(1)} - x^{(0)}\right). \tag{9.18}$$

Алгоритми ҳисоби системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ бо ёрии усули итератсияи оддӣ дар расми 9.1 овада шудааст [3].

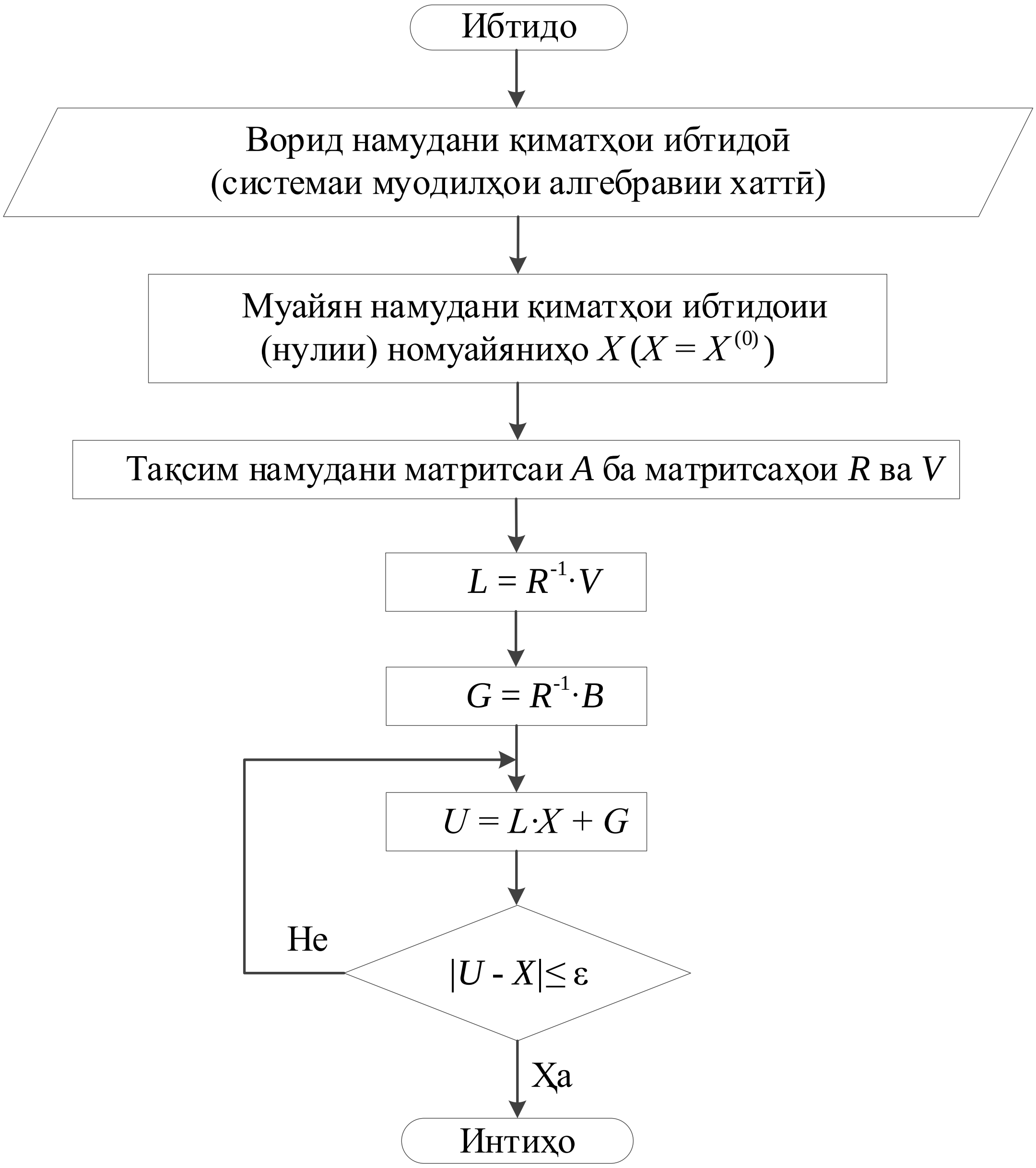

Рисунок 9.1. Алгоритми ҳисоби системаи муодилаҳои алгебравии хаттӣ бо ёрии усули итератсияи оддӣ

Мисоли 9.1. Системаи муодилаҳоро бо ёрии усули итератсияи оддӣ ҳисоб намоед:

$$\begin{cases} 0,354 \cdot \varphi_1 - 0,111 \cdot \varphi_2 - 0,1 \cdot \varphi_3 = -2,05; \\ -0,111 \cdot \varphi_1 + 0,561 \cdot \varphi_2 - 0,2 \cdot \varphi_3 = 9,872; \\ -0,1 \cdot \varphi_1 - 0,2 \cdot \varphi_2 + 0,377 \cdot \varphi_3 = -0,48, \end{cases}$$

Ба сифати наздикшавии ибтидоии қиматҳои нулии тағйирёбандаҳоро менамоем, яъне $\varphi_1 = 0$; $\varphi_1 = 0$; $\varphi_1 = 0$, пас дар қадами ибтидоӣ қимматҳои зеринро ба даст меоварем:

$$\Phi^{(0)} = \begin{bmatrix} \varphi_1^{(0)} \\ \varphi_2^{(0)} \\ \varphi_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,791 \\ 17,597 \\ -1,273 \end{bmatrix}.$$

Ҳисобро то дақиқияти $\varepsilon \le 0,001$ идома медиҳем.

Ҳал. Дар асоси навишти системаи муодилаҳои алгебравии хаттии намуди (9.4) менависем:

$$\begin{cases} \varphi_1^{(k)} = \dfrac{0,111}{0,354} \cdot \varphi_2^{(k-1)} + \dfrac{0,1}{0,354} \cdot \varphi_3^{(k-1)} - \dfrac{2,05}{0,354} = 0,3136 \cdot \varphi_2^{(k-1)} + 0,2825 \cdot \varphi_3^{(k-1)} - 5,791; \\ \varphi_2^{(k)} = \dfrac{0,111}{0,561} \cdot \varphi_1^{(k-1)} + \dfrac{0,2}{0,561} \cdot \varphi_3^{(k-1)} + \dfrac{9,872}{0,561} = 0,198 \cdot \varphi_1^{(k-1)} + 0,3565 \cdot \varphi_3^{(k-1)} + 17,597; \\ \varphi_3^{(k)} = \dfrac{0,1}{0,377} \cdot \varphi_1^{(k-1)} + \dfrac{0,2}{0,377} \cdot \varphi_2^{(k-1)} - \dfrac{0,48}{0,377} = 0,265 \cdot \varphi_1^{(k-1)} + 0,5305 \cdot \varphi_2^{(k-1)} - 1,273. \end{cases}$$

Натиҷаи ҳисоб бо ёрии усули итератсияи оддӣ дар ҷадвали 9.1 оварда шудааст.

Таблица 9.1. Қимматҳои нумуайяниҳо дар қадами итератсионии *k*

k	$\varphi_1^{(k)}$	$\varphi_2^{(k)}$	$\varphi_3^{(k)}$
0	-5,791	17,597	-1,273
1	-0,633	15,997	6,526
2	1,069	19,799	7,046
3	2,407	20,320	9,513
4	3,268	21,465	10,145
5	3,806	21,861	10,981
6	4,166	22,265	11,333
7	4,392	22,462	11,643
8	4,541	22,617	11,808
9	4,636	22,705	11,930
10	4,698	22,768	12,002
11	4,738	22,806	12,051
12	4,764	22,831	12,082
13	4,781	22,847	12,102
14	4,792	22,858	12,115
15	4,799	22,864	12,124
16	4,803	22,869	12,129
17	4,806	22,872	12,133
18	4,808	22,874	12,135
19	4,809	22,875	12,137
20	4,810	22,876	12,138

Азбаски қимати номуайяниҳо дар ду итератсияҳои пайдарҳам, яъне дар итератсияҳои 19 ва 20 то хатогии $\varepsilon = 0{,}001$ мувофиқ меоянд, яъне

$$\Delta\varphi_1 = |\varphi_1^{(20)} - \varphi_1^{(19)}| = |4{,}810 - 4{,}809| = 0{,}001 = \varepsilon;$$

$$\Delta\varphi_2 = |\varphi_2^{(20)} - \varphi_2^{(19)}| = |22{,}876 - 22{,}875| = 0{,}001 = \varepsilon;$$

$$\Delta\varphi_3 = |\varphi_3^{(20)} - \varphi_3^{(19)}| = |12{,}138 - 12{,}137| = 0{,}001 = \varepsilon;$$

аст, пас метавон хулоса баровард, ки ҳал ба даст омадааст:

$$\varphi_1 = 4{,}810;\ \varphi_2 = 22{,}876;\ \varphi_3 = 12{,}138.$$

Адабиёт

1. Веников В.А. Математические задачи электроэнергетики: Учебник для студентов вузов / В.А. Веников, Э.Н. Зуев, И.В. Литкенс и др., под ред. В.А. Веникова – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1981. – 288 с.

2. Филяев К.Ю. Математические задачи энергетики: Учебно-методический комплекс / К.Ю. Филяев – Челябинск: 2005. – 212 с.

3. Джуразода Ш.Ч., Назиров Х.Б., Ганиев З.С., Ишан-Ходжаев Р.С. Математические задачи энергетики: Учебно-методический комплекс – Москва; Вологда: Инфра-Инженерия, 2026. – 140 с.