

10 – MA'RUZA.

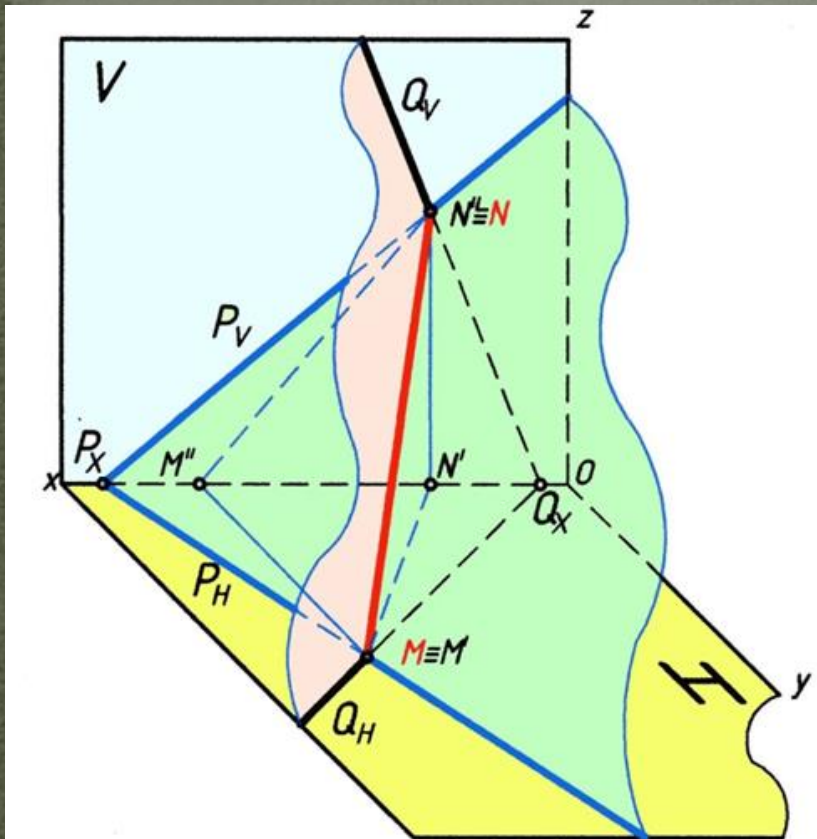
Mavzu. Umumiy vaziyatdagi ikki tekislikning o'zaro kesishgan chizig'i. To'g'ri chiziqni tekislikka perpendikulyarligi. Nuqtadan tekislikka qadar masofani aniqlash.

Mashg'ulot rejası:

- 1) Umumiy vaziyatdagi ikki tekislikning kesishgan chizig'ini aniqlash;
- 2) To'g'ri chiziqni tekislikka perpendikulyar vaziyati;
- 3) Nuqtadan tekislikka qadar masofani aniqlash.

1. Umumiy vaziyatdagi ikki tekislikning o‘zaro kesishgan chizig‘i.

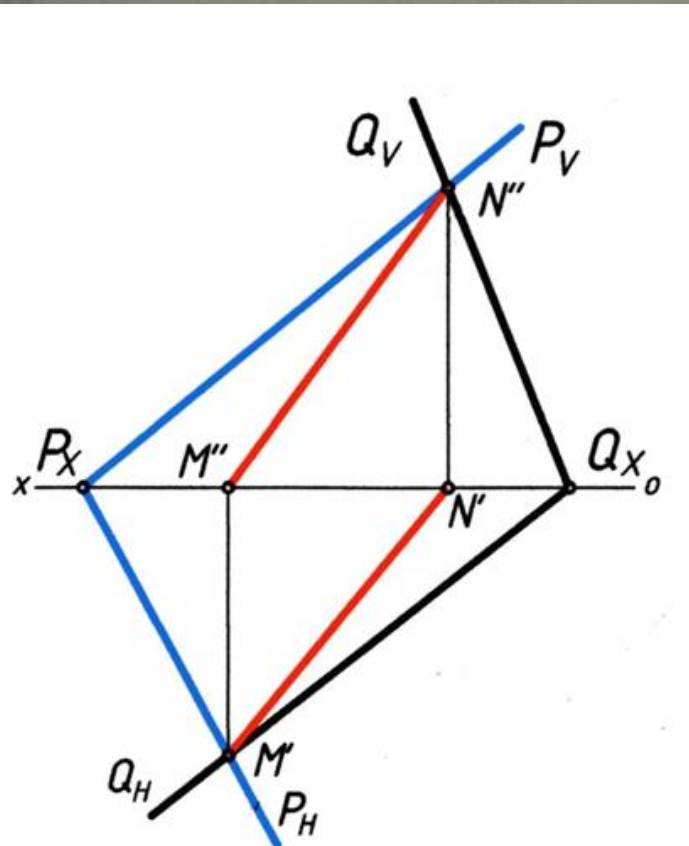
Bizga ma’lumki, fazoda joylashgan ikki tekislik o‘zaro parallel bo‘lmasa, ular kesishib bir to‘g‘ri chiziqni hosil qiladi. Agar ikki kesishuvchi tekisliklar umumiy vaziyatda joylashgan bo‘lsa, ularning kesishgan chizig‘i ham umumiy vaziyatda bo‘ladi.



Umumiy vaziyatda izlari orqali $P(P_H, P_V)$ va $Q(Q_H, Q_V)$ tekisliklar berilgan. Ular (MN) chiziq bo‘yicha kesishadi. 2 – chizmada ularning epyuri berilgan. Ikki chizmalardan ko‘rinib turibdiki, ikki tekisliklarning bir nomli izlari o‘zaro kesishib $M(M', M'')$ va $N(N', N'')$ nuqtalarni hosil qilmoqda. Mazkur nuqtalar orqali ikki tekislikning (MN) kesishgan chizig‘i o‘tadi. Ikki tekisliklar umumiy vaziyatda joylashganligi uchun ularning (MN) kesishgan chizig‘i ham umumiy vaziyatda hosil bo‘lgan.

1 – misol. Umumiy vaziyatda izlari orqali berilgan $P(P_H, P_V)$ va $Q(Q_H, Q_V)$ tekisliklarning kesishgan (MN) chizig‘i chizilsin.

Ushbu misol quyidagi bosqichlarda chiziladi.



- 1) Epyurning gorizontaal proyeksiyasida Q va P tekisliklarning birnomli Q_H va P_H gorizontaal izlari kesishib M' nuqta hosil qiladi. Uning M'' frontal proyeksiyasi $[ox]$ o‘qida proyeksiyalanadi.

$$Q_H \cap P_H = M' \text{ va } M'' \in [ox];$$

- 2) Epyurning frontal proyeksiyasida Q va P tekisliklarning birnomli Q_V va P_V frontal izlari kesishib N'' nuqta hosil qiladi. Ushbu nuqtaning N' gorizontaal proyeksiyasi $[ox]$ o‘qida proyeksiyalanadi.

$$Q_V \cap P_V = N'' \text{ va } N' \in [ox];$$

- 3) M va N nuqtalar tutashtiriladi. Ushbu ikki nuqtalar orqali Q va P tekisliklarning (MN) kesishgan chizig‘i o‘tadi. Epyurning gorizontaal proyeksiyasida M' va N' nuqtalar tutashtiriladi.

$$M' \cup N' = M'N'.$$

Epyurning frontal proyeksiyasida M'' va N'' nuqtalar tutashtiriladi.

$$M'' \cup N'' = M''N''$$

Javob. $M'N'$ va $M''N''$.

2 – misol. Umumiy vaziyatda izlari orqali berilgan $P(P_H, P_V)$ va $R(R_H, R_V)$ tekisliklarning kesishgan (MN) chizig‘i chizilsin

Ushbu misol quyidagi bosqichlarda yechimga ega bo‘ladi.

- 1) Berilgan $P(P_H, P_V)$ va $R(R_H, R_V)$ tekisliklar o‘zarok kesishib (MN) to‘g‘richiziq hosil qiladi.

$$P(P_H, P_V) \cap R(R_H, R_V) = (MN)$$

Ushbu holda berilgan tekisliklarning P_H va R_H gorizontalizlari kesishmaydi. Bunday holda ularni xususiy vaziyatdagi uchinchitekislik bilan kesiladi. Ular o‘zarok kesishib nuqta hosil qiladi. Ushbu nuqta yuqoridakeltirilganta‘rifga asos bo‘ladi.

$$(P \cap R \cap T) = M$$

Epyurning gorizontal proyeksiyasida $T(T_H)$ frontal tekislikni ixtiyoriy joyda T_H gorizontalizi [ox] o‘qqa parallel qilib o‘tkaziladi.

$$T_H \parallel [ox].$$

- 2) Epyurning gorizontal proyeksiyasida tekislikning P_H va T_H gorizontalizlari kesishib $f(f', f'')$ frontal chiziqni hosil qiladi. Shu bilan birga tekislikning R_H va T_H gorizontalizlari kesishib $f_1(f'_1, f''_1)$ frontal chiziqni hosil qiladi. Ikki $f(f', f'')$ va $f_1(f'_1, f''_1)$ frontal chiziqlar kesishib $M(M', M'')$ nuqta ni beradi. Ushbu nuqta P, R va T tekisliklarning kesishgan nuqtasi bo‘ladi. Epyurda f'' va f''_1 frontal chiziqlar kesishib M'' nuqta ni hosil qiladi. M' nuqta esa, T tekislikning T_H gorizontaliziga tegishli bo‘ladi.

$$f'' \cap f''_1 = M'' \text{ va } M' \in T_H;$$

- 3) Epyurning frontal proyeksiyasida P va R tekisliklarning birlamchi P_V va R_V frontal izlari kesishib N'' nuqta hosil qiladi. Uning N' gorizontal proyeksiyasi [ox] o‘qida proyeksiyalanadi.

$$P_V \cap R_V = N'' \text{ va } N' \in [ox];$$

- 4) M va N nuqtalar tutashtiriladi.

$$M \cup N = MN$$

Epyurning gorizontal proyeksiyasida M' va N' nuqtalar tutashtiriladi.

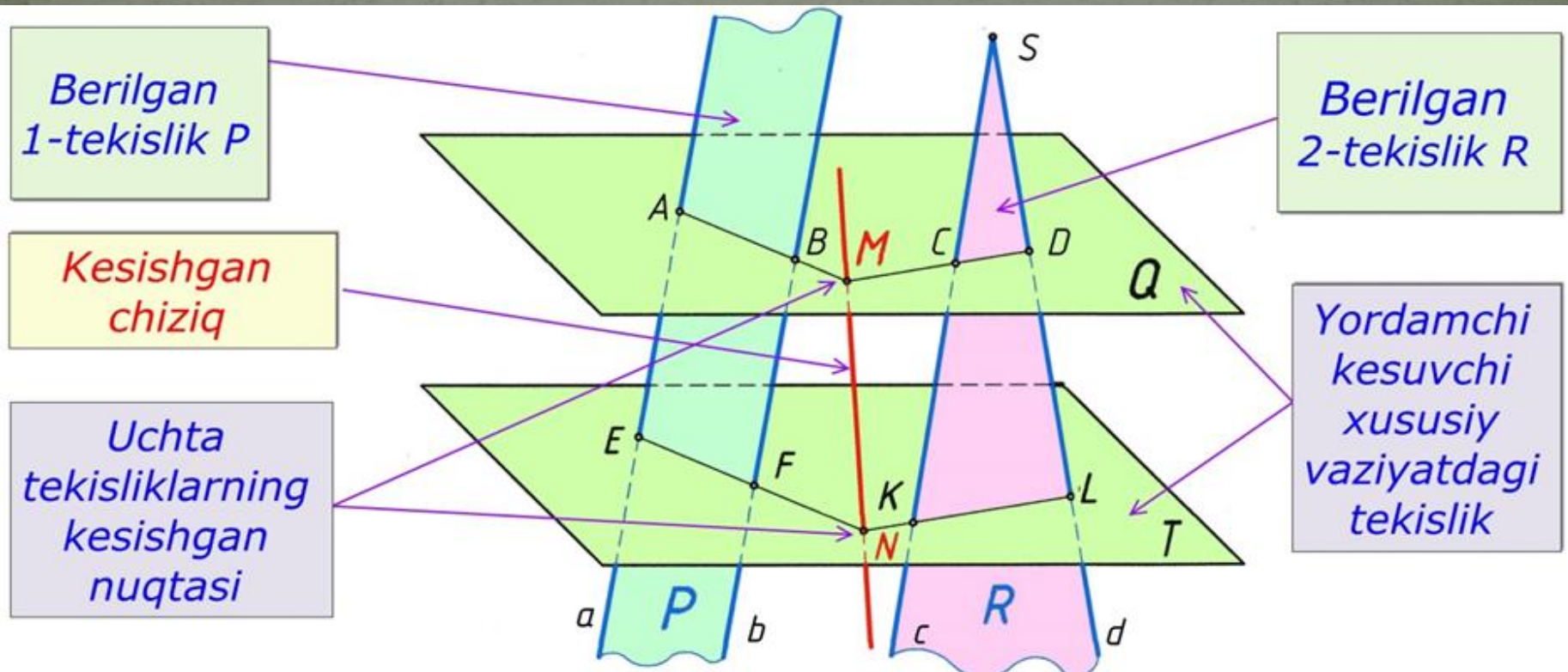
$$M' \cup N' = M'N'$$

Epyurning frontal proyeksiyasida M'' va N'' nuqtalar tutashtiriladi.

$$M'' \cup N'' = M''N''.$$

Javob: $P \cap R = (MN)$.

3 – misol. Berilganikki $P(a \parallel b)$ va $R(c \cap d)$ tekisliklarning o'zarok kesishgan chizig'ichizilsin.



Ushbu misol quyidagi bosqichlarda yechimga ega bo'ladi:

- 1) Berilgan katekisliklarning kesishgan (MN) chizig'ini aniqlash uchun uchta tekisliklarning kesishgan nuqtasini aniqlashtirishga asoslaniladi.

Ushbu holda berilgan katekisliklarni uchinchiyordamchik kesuvchi xususiy vaziyatdagi tekislik bilan kesiladi. Xususiy vaziyatdagi tekislik sifatida $Q(Q_H)$ frontal tekislik olinadi. Uchta tekisliklarni kesishib M nuqta hosil qilinadi.

$$(P \cap Q \cap R = M) \Rightarrow P \cap Q = AB \text{ va } R \cap Q = CD \text{ va } AB \cap CD = M$$

Epyurning gorizontal proyeksiyasida $Q(Q_H)$ frontal tekislikni ixtiyoriy joyda o'tkaziladi (5 – chizmaga qarang!). Ushbu holda tekislikning Q_H gorizontalizini $[ox)$ o'qqa parallel qilib chiziladi.

$$Q_H \parallel [ox)$$

O'tkazilgan Q tekislik $P(a \parallel b)$ tekislikni kesib AB to'g'richizini hosil qiladi.

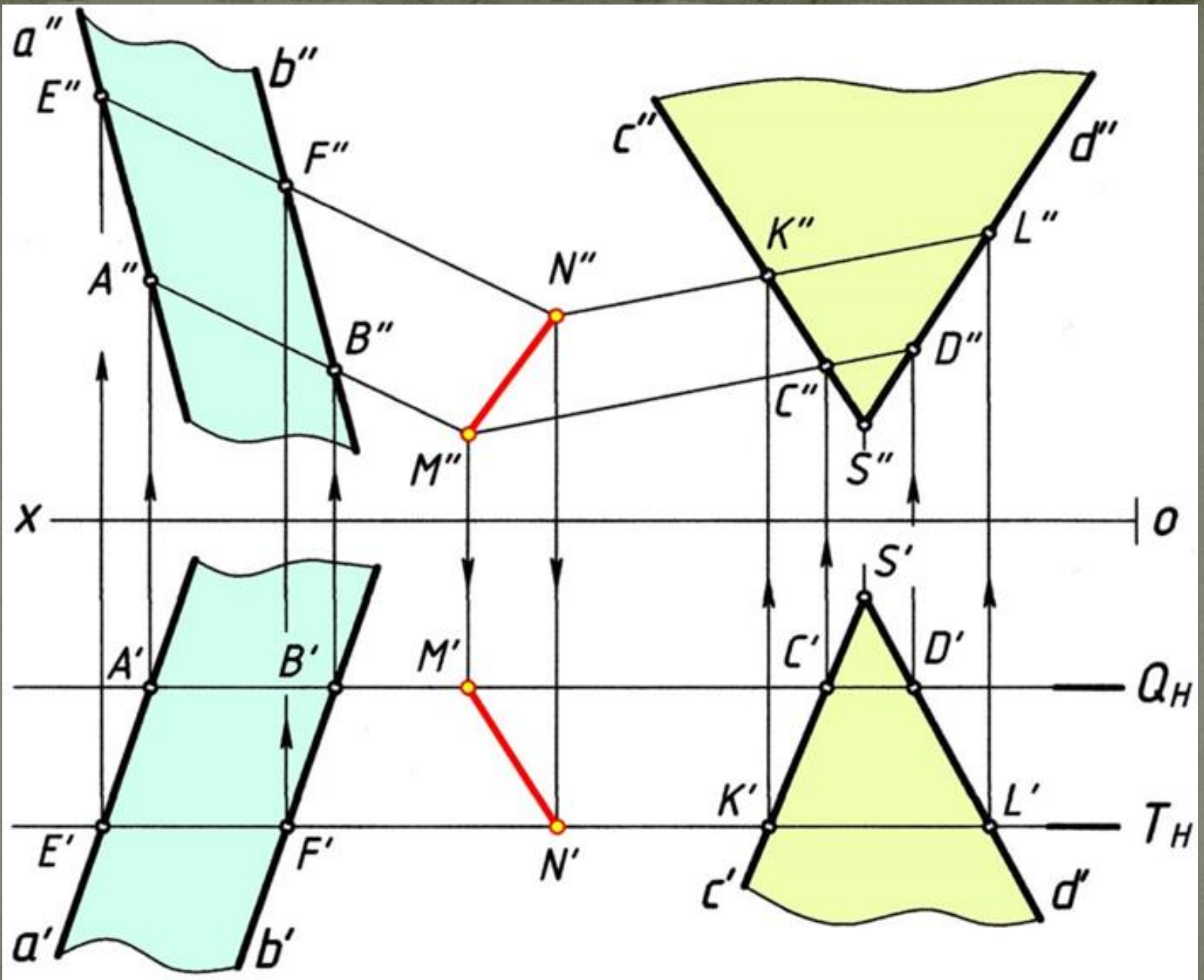
$$Q(Q_H) \cap P(a \parallel b) = (AB)$$

So'ng, Q tekislik $R(c \cap d)$ tekislikni kesib CD to'g'richizini hosil qiladi.

$$Q(Q_H) \cap R(c \cap d) = (CD)$$

(AB) va (CD) to'g'richizilari kesishib bizlanayotgan M nuqta hosil qilinadi.

$$(AB) \cap (CD) = M;$$



2) O'tkazilgan $Q(Q_H)$ tekislikka parallel qilibixtiyoriyjoyda $T(T_H)$ tekislik o'tkaziladi. Epyurda Q tekislikning Q_H gorizontaliziga parallel qilib T tekislikning T_H gorizontalizio'tkaziladi.

$$Q(Q_H) \parallel T(T_H) \implies Q_H \parallel T_H ;$$

So'ng, $T(T_H)$ tekislik $R(c \cap d)$ tekislikni kesib (KL) to'g'richiziq hosil qiladi.

$$T(T_H) \cap P(a \parallel b) = (KL)$$

(EF) va (KL) to'g'richiziq laro'zarokeshibizlanayotgan N nuqtani hosil qiladi.

$$(EF) \cap (KL) = N$$

3) M va N nuqtalar tutashtiriladi. Ushbu nuqtalar orqali $P(a \parallel b)$ va $R(c \cap d)$ tekisliklarning o'zarokeshish ganchizig'io'tadi.

$$M \cup N = (MN).$$

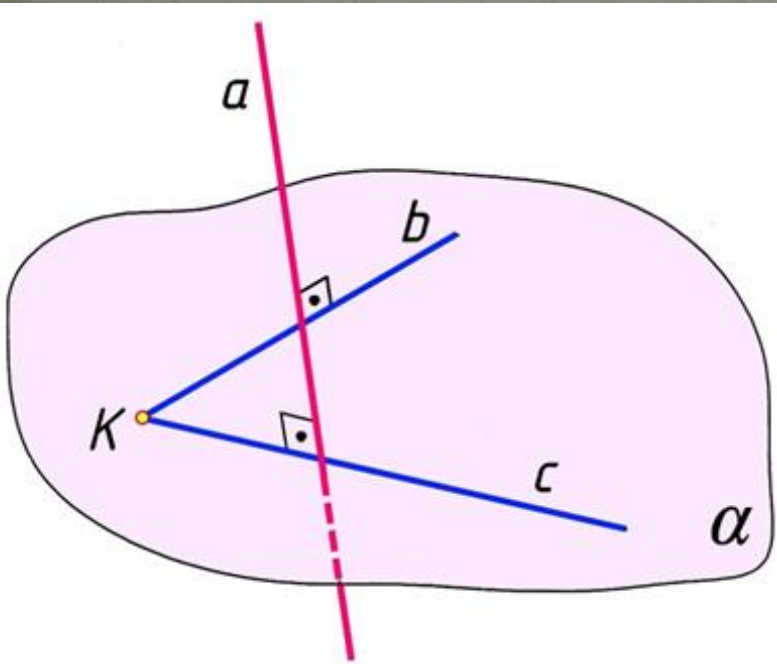
Javob. $P(a \parallel b) \cap R(c \cap d) = (MN).$

2. To'g'ri chiziqning tekislikka perpendikulyarligi.

Aksioma Agar fazodajoylashgan to'g'ri chiziq $a(b \cap c)$ - tekislikning ikki kesishuvchi

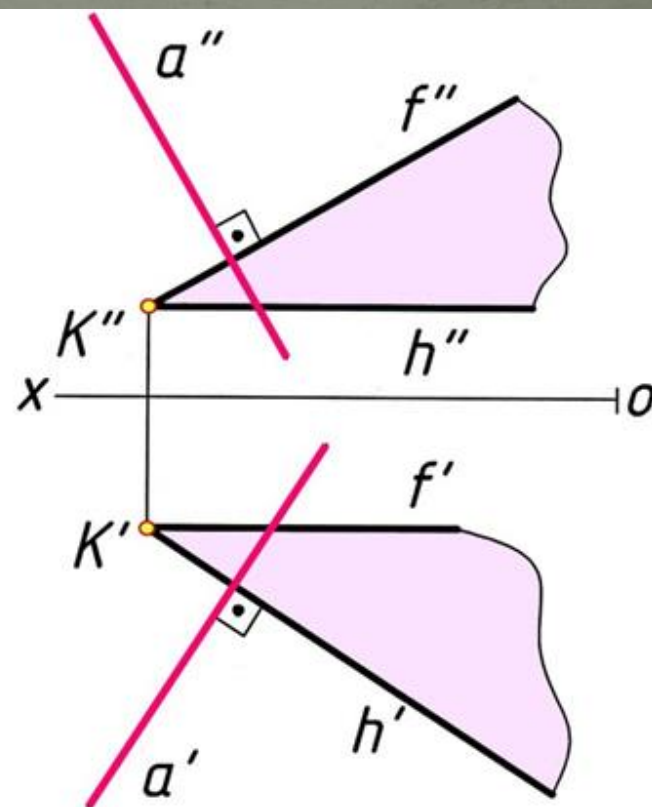
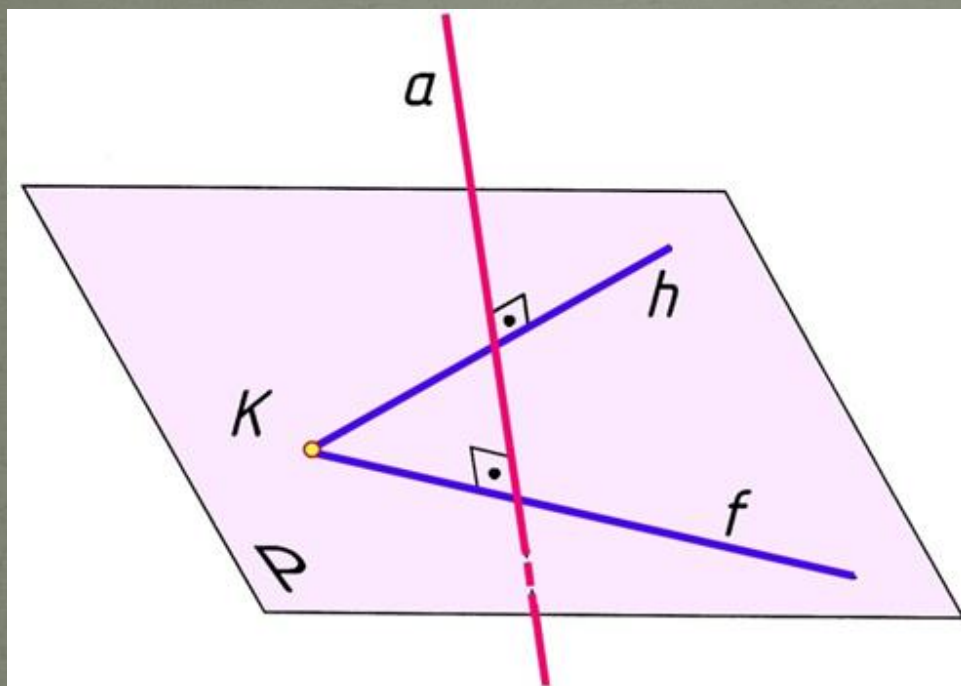
b va to'g'ri chiziqlariga perpendikulyar bo'lsa, ushbu to'g'ri chiziq a tekislikka ham perpendikulyar bo'ladi.

$$a \perp \alpha(b \cap c) \Rightarrow a \perp b, a \perp c$$

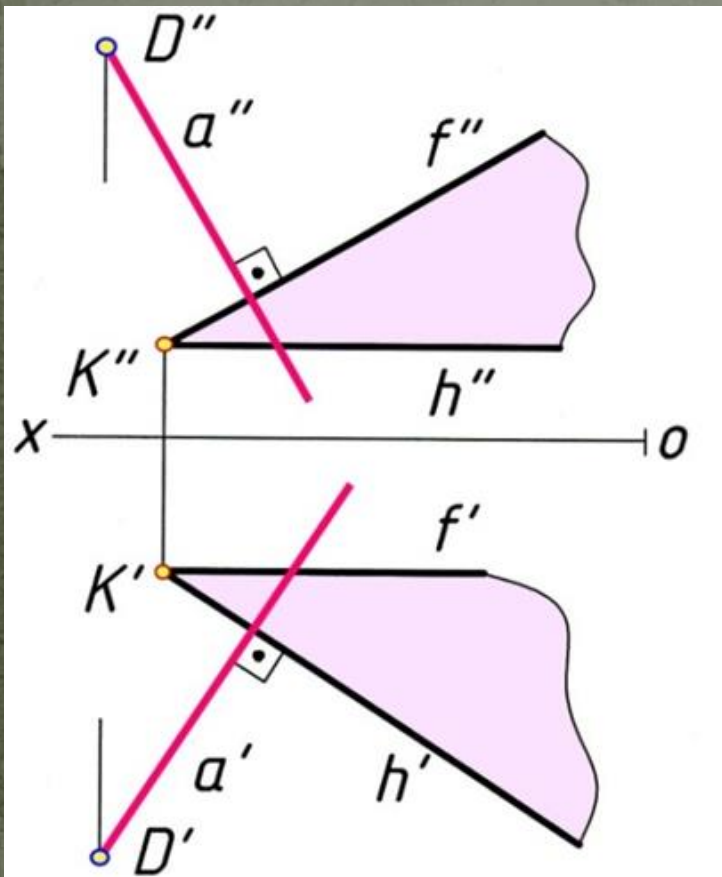


Ushbu aksiomaga asoslangan holda «Chizma geometriya» fanida tekislikning ikki kesishuvchi chiziqlari sifatida, uning $h(h',h'')$ -gorizontal va $f(f',f'')$ -frontal chiziqlari olinadi. Bundan ikki ta'rif kelib chiqadi.

1-ta'rif. Agar fazodajoylashgan ato'g'richiziq $P(h \cap f)$ -tekislikka tegishli bo'lgano'zarokesishuvchi (h', h'') -gorizontal va (f', f'') -frontal chiziqlarga perpendikulyar bo'lsa, ushbu ato'g'richiziq tekislikka ham perpendikulyar bo'ladi.



1-misol. D nuqta orqaliberilgan $P(h \cap f)$ -tekislikka perpendikulyar bo'lgan a to'g'richiziq o'tkazilsin.



$P(h \cap f)$ tekislikning $h(h', h'')$ gorizontal va $f(f', f'')$ chiziqlari orqaliberilgan. $D(D', D'')$ nuqta orqaliga $a(a', a'')$ to'g'richiziqni $P(h \cap f)$ tekislikning $h(h', h'')$ gorizontal va $f(f', f'')$ chiziqlariga perpendikulyar qilib o'tkaziladi. Ushbu holda $a(a', a'')$ to'g'richiziq $P(h \cap f)$ tekislikka perpendikulyar bo'ladi.

Berilgan. $D, (D', D'') \wedge P(h \cap f)$

Topish kerak.

$D \subset a(a', a'') \perp P(h \cap f)$

Yechish:

1. Epyurda, D' nuqta orqaliga a' chiziqni h' ga perpendikulyar qilib chiziladi.

$D' \subset a' \perp h'$;

2. D'' nuqta orqaliga a'' chiziqni f'' ga perpendikulyar qilib chiziladi.

$D'' \subset a'' \perp f''$

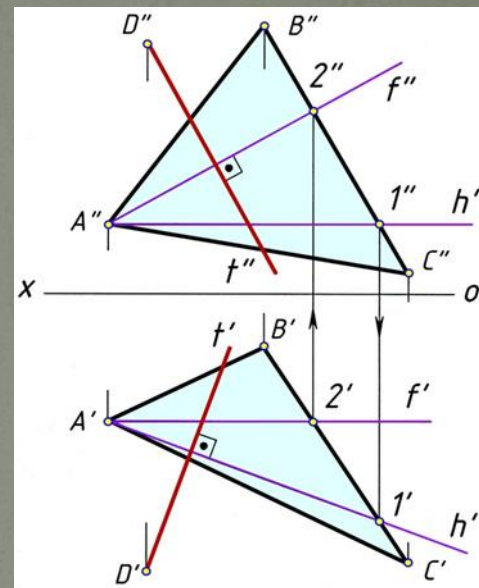
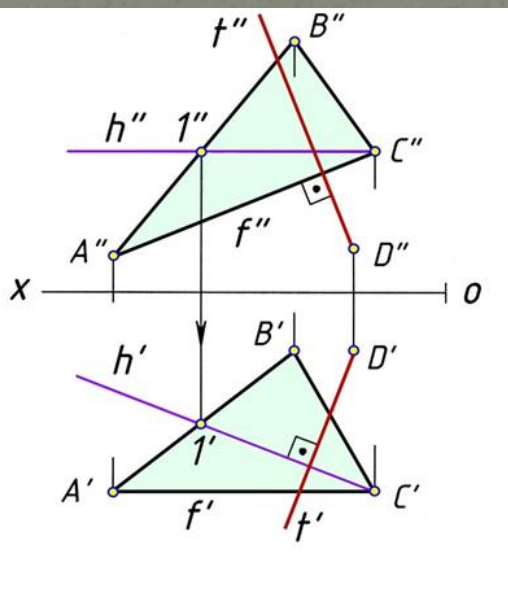
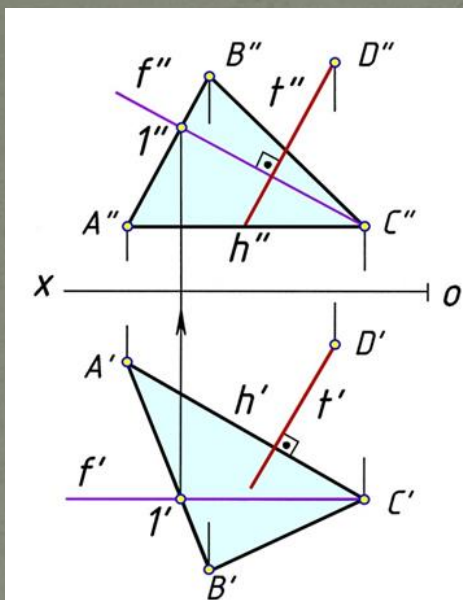
Javob.

$D \subset a(a', a'') \perp P(h \cap f)$

2-misol. D nuqta orqaliberilgan

$P(\Delta$

$ABC)$ tekislikka perpendikulyar bo'lgan (t', t'') to'g'richiziqo'tkazilsin.

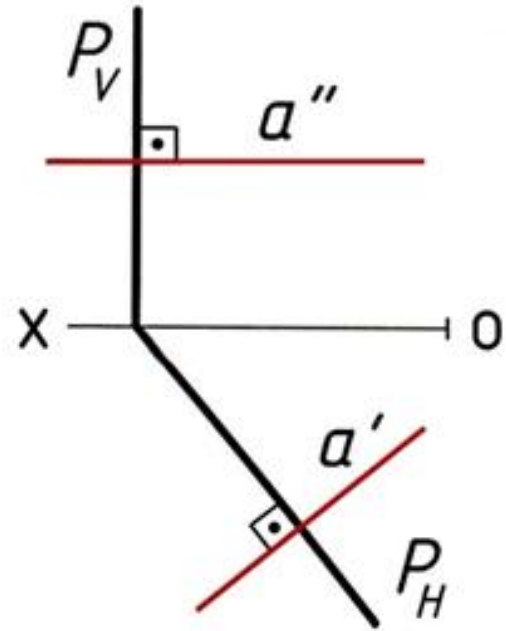
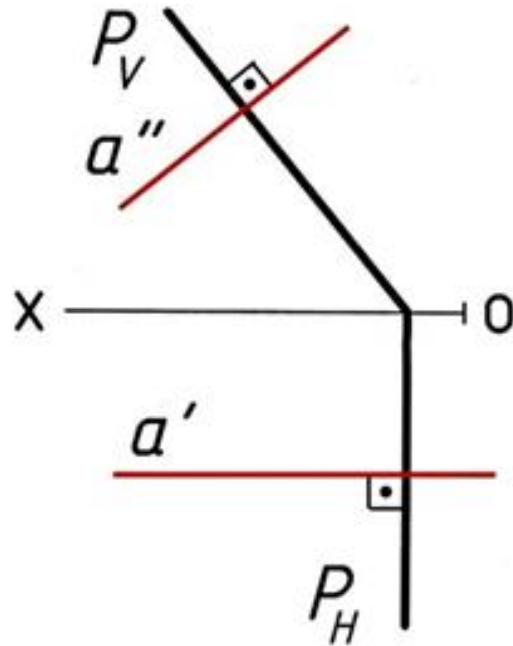
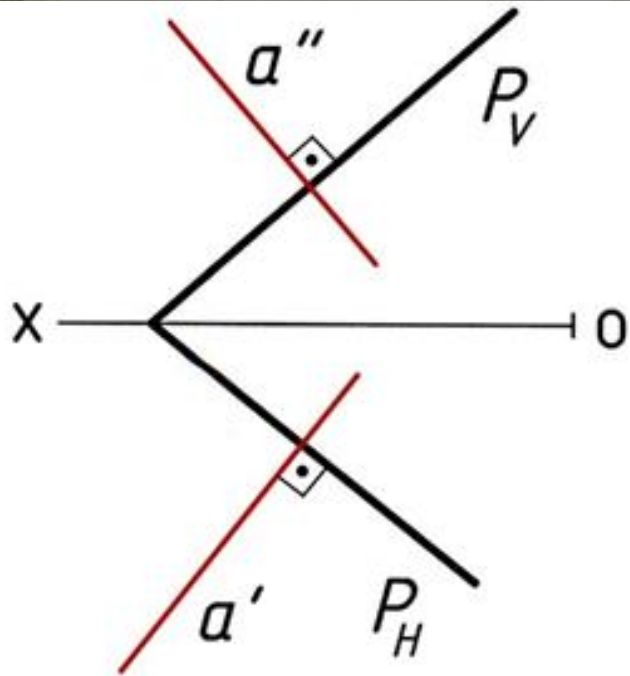


Ushbu misol quyidagi bosqichlarda yechimga ega bo'ladi.

1. Uchburchak ABC ning $h(h', h'')$ – gorizontal va $f(f', f'')$ – frontal chiziqlar chizibolinadi.
2. Berilgan $D(D', D'')$ nuqta orqalitekislikning $h(h', h'')$ – gorizontal va $f(f', f'')$ – frontal chiziqlariga perpendikulyar bo'lgan (t', t'') to'g'richiziq chizibolinadi. Epyurda, D' nuqta orqal t' to'g'richiziqni h' – gorizontalning gorizontal proyeksiyasiga va D'' nuqta orqal t'' to'g'richiziqni f'' – frontalning frontal proyeksiyasiga perpendikulyar qilib o'tkazibolinadi. Shu bilan misol yechimga ega boladi.

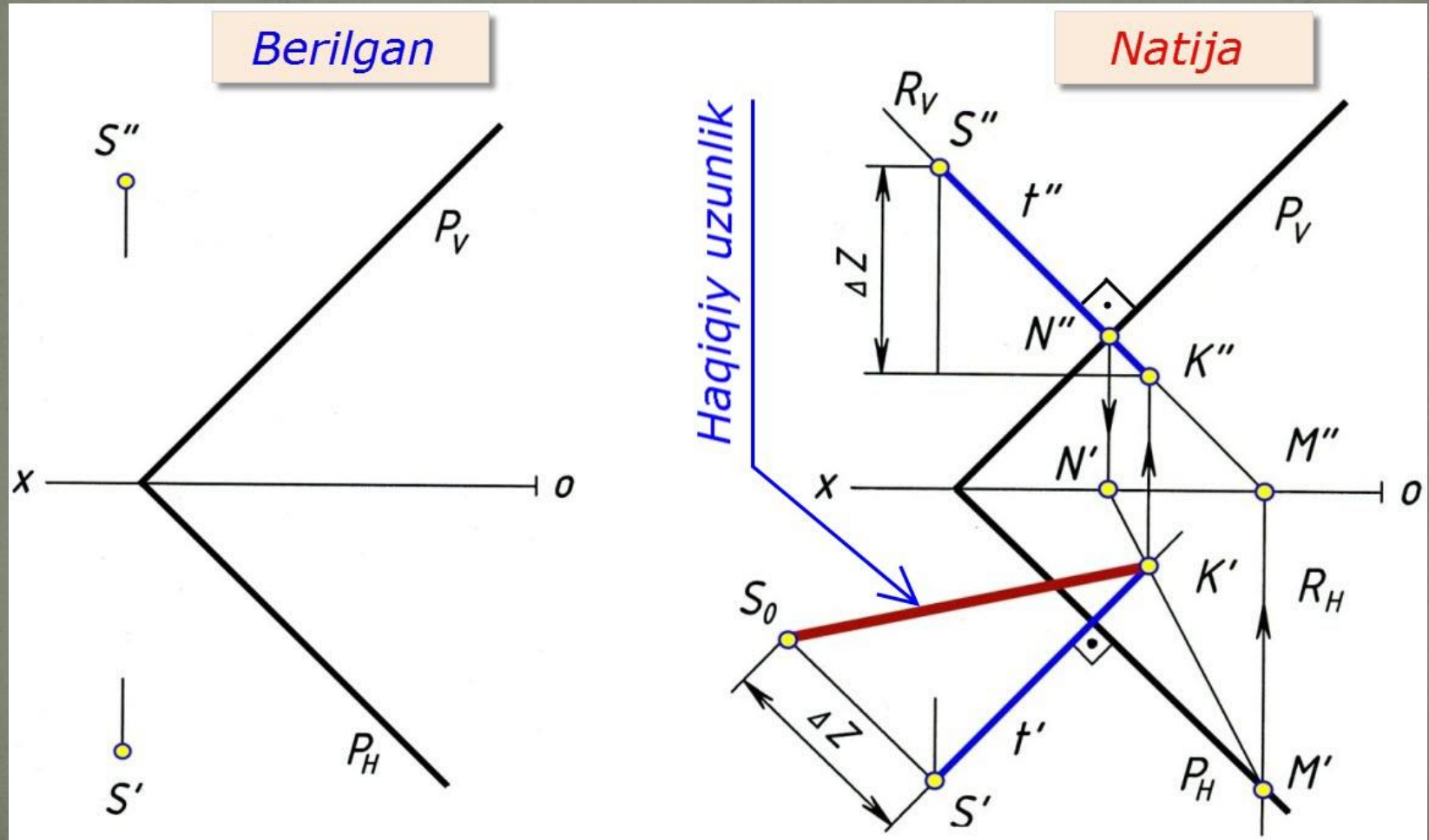
Javob: $D' \subset t' \perp h', D'' \subset t'' \perp f''$.

2-ta'rif. Agar epyurda $P(P_H, P_V)$ -tekisliklari orqaliberilgan bo'lsa u holda, ushbu tekislikka perpendikulyar bo'lgan atog'richiziqning birnomli proyeksiyalar tekislikning birnomli izlarining proyeksiyalariga perpendikulyar bo'ladi. $a \perp P(P_H, P_V) \Rightarrow a' \perp P_H, a'' \perp P_V$



1-masala. *S* nuqtadan berilgan $P(P_H, P_V)$ tekislikka qadar qisqa masofa uzunligi topilsin.

S nuqtadan $P(P_H, P_V)$ tekislikka tushirilgan t perpendikulyar chiziqni, ushbu tekislik bilan kesishgan *K* nuqtasi orasidagi masofa uzunligiga, *S* nuqtadan tekislikka qadar bo'lgan masofa uzunligi deyiladi.



Ushbu masala quyidagi bosqichlarda yechimga ega bo'ladi.

1. S nuqta orqali $P(P_H, P_V)$ tekislikka perpendikulyar bo'lgan t to'g'richiziqo'tkazib olinadi.

$$S \subset t \perp P(P_H, P_V)$$

Epyurning gorizontal proyeksiyasida S' nuqta orqali $P(P_H, P_V)$ tekislikning P_H gorizontalizigaperpendikulyar qilib t' to'g'richiziqo'tkaziladi.

$$S' \subset t' \perp P_H$$

Epyurning frontal proyeksiyasida S'' nuqta orqali $P(P_H, P_V)$ tekislikning P_V frontal izigaperpendikulyar qilib t'' to'g'richiziqo'tkaziladi.

$$S'' \subset t'' \perp P_V$$

2. O'tkazilgan t to'g'richiziqni $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan kesishgan K nuqtasini qalab olinadi va u uchta bosqichlarda amalga oshiriladi.

$$t \cap R(R_H, R_V) \perp V = K$$

Ushbu bosqichda t to'g'richiziq orqalixususiy vaziyatdagi $R(R_H, R_V)$ tekislikni V tekislikka perpendikulyar vaziyatda o'tkaziladi.

Epyurda t'' to'g'richiziq orqali $R(R_H, R_V)$ tekislikning R_V frontal izio'tkaziladi, R_H esa $[ox)$ o'qqaperpendikulyar bo'ladi.

$$t'' \subset R_V \text{ va } R_H \perp [ox);$$

3. O'tkazilgan $R(R_H, R_V)$ tekislik bilan berilgan $P(P_H, P_V)$ tekisliklarning o'zarok kesishgan (MN) chizig'ini qilib olinadi.

$$P(P_H, P_V) \cap R(R_H, R_V) = MN$$

Epyurda, ikki tekislikning gorizontal P_H va R_H izlarini kesishib M' nuqta hosil qilinadi, M'' nuqta $[ox)$ oqqatig'ilib olinadi.

$$P_H \cap R_H = M' \text{ va } M'' \in [ox)$$

Ikkita tekislikning frontal P_V va R_V izlarini kesishib N'' nuqta hosil qilinadi, N' nuqta $[ox)$ oqqatig'ilib olinadi.

$$P_V \cap R_V = N'' \text{ va } N' \in [ox)$$

Davomida M' va N' nuqtalar tutashtiriladi.

$$M' \cup N' = M'N'$$

4. Ikkita tekisliklarning (MN) kesishgan chizig'ini to'g'richiziq bilan kesishib K nuqta beriladi.

$$(MN) \cap t = K$$

Epyurning gorizontal proyeksiyasida $M'N'$ to'g'richiziq o'zarok kesishib K' nuqta hosil qilinadi.

$$M'N' \cap t' = K'$$

K'' nuqta esa, $M''N''$ to'g'richiziq oqqatig'ilib olinadi.

$$M''N'' \in K'';$$

5. S nuqtadan K nuqtachabo'lgan masofa uzunligi, S nuqtadan $P(P_H, P_V)$ tekislikka qadar bo'lgan masofa uzunligi teng bo'ladi.

$|SK| = |S, P(P_H, P_V)|$ buyerda, $|SK|$ kesma umumiy vaziyatdabo'lganligi uchun, uning haqiqiy uzunligi to'g'ri burchakli uchburchak usulidan foydalanib aniqlanadi.

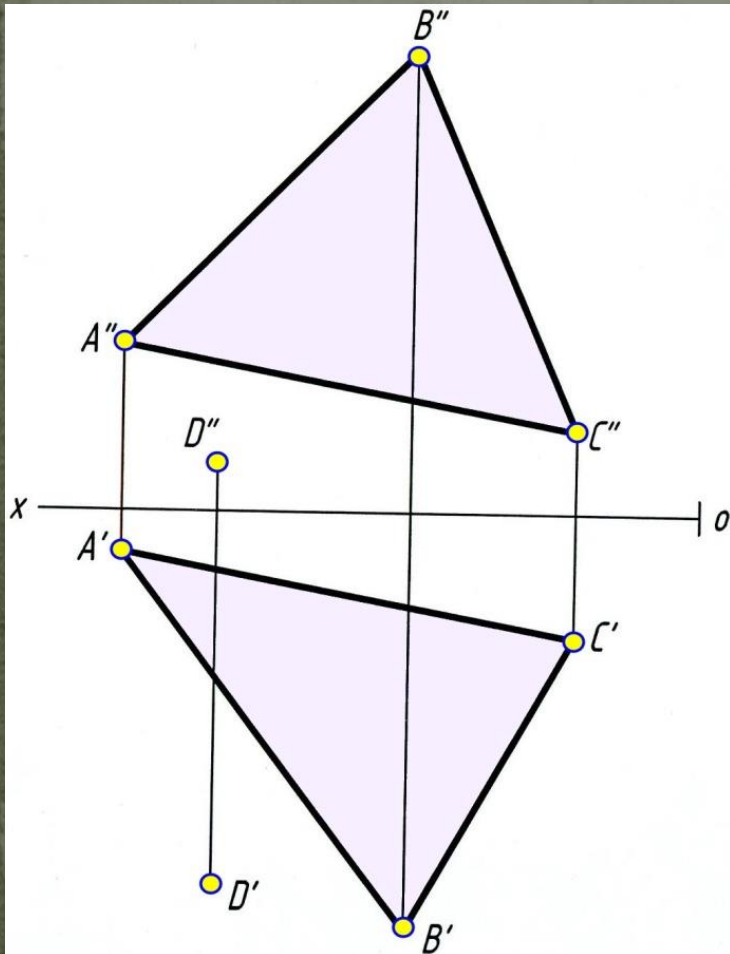
To'g'ri burchakli uchburchakning 1-kateti $S'K'$ ga teng, 2-katet esa, $|S'S_0| = \Delta Z = (Z_S - Z_K)$ bo'ladi. Bunda, $S'K' \perp S'S_0$, $|S_0K'|$ - gipotenuza – haqiqiy uzunlik.

$|S, P(P_H, P_V)| = |S_0K'|$ - haqiqiy uzunlik.

Javob. $|S, P(P_H, P_V)| = |S_0K'|$

2-masala. *D* nuqtadan berilgan uchburchak *ABC* tekislikka qadar bo'lgan qisqa masofaning haqiqiy uzunligi topilsin.

Ushbu masala quyidagi bosqichlarda yechimga ega bo'ladi.



1-chizma.

1-masalaning sharti.

D nuqtadan berilgan uchburchak **ABC** tekislikka qadar bo'lgan qisqa masofaning haqiqiy uzunligi topilsin.

Koordinatalar bilan berilgan $A(62,5,18)$; $B(31,45,50)$; $C(14,14,10)$ uchburchak va $D(52,40,6)$ nuqtalarning gorizontal va frontal proyeksiyalarini chizib olinadi. 1-chizmaga qarang!

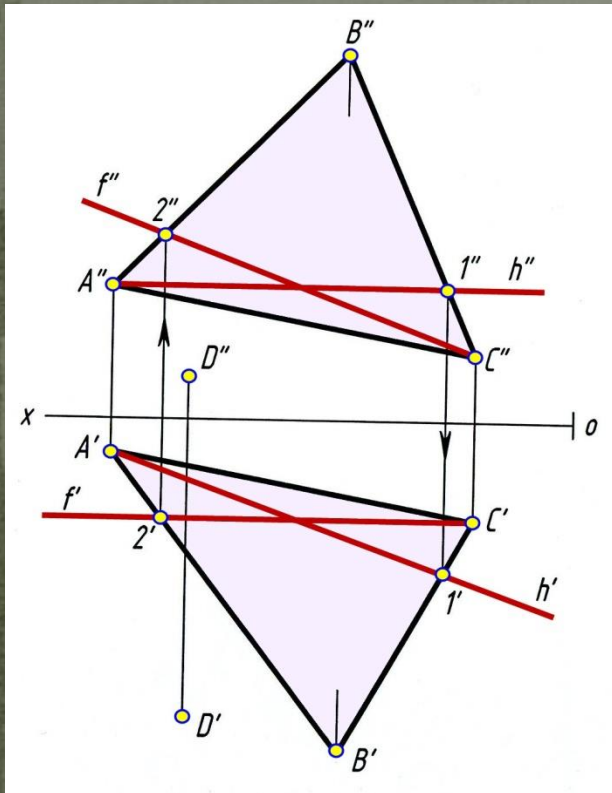
Masalaning bosqichma-bosqich yechish algoritmi.

Berilgan: $\triangle ABC (A'B'C', A''B''C'')$ va $D(D', D'')$

Topish kerak:

$$|D, ABC| = |DK| = |D_0K'| - \text{haqiqiy uzunlik.}$$

Yechish:
1-bosqich.



Uchburchak ABCning A uchi orqali $h(h', h'')$ – gorizontal va C uchi orqali $f(f', f'')$ – frontal chiziqlar chizibolinadi.

1.1. Epyurning frontal proyeksiyasida A'' nuqta orqali h'' chiziqni $[ox)$ o'qqa parallel qilib chiziladi. h'' va $B''C''$ chiziqlar kesishib $1''$ nuqta hosil qiladi. $1'$ nuqtaning gorizontal proyeksiyasi $B'C'$ ga tegishlib o'ladi. A' va $1'$ nuqtalar nitutashtirib, uni h' bilan belgilanadi.

$$\begin{aligned} A \in h(h', h'') \in ABC &\Rightarrow \\ \Rightarrow A'' \in h''(A''1'') \parallel [ox) \text{ va} & \\ A' \in h'(A'1') & \end{aligned}$$

1.2. Epyurning gorizontal proyeksiyasida C' nuqta orqali f' chiziqni $[ox)$ o'qqa parallel qilib chiziladi. f' va A'B' chiziqlar kesishib $2'$ nuqta hosil qiladi. $2''$ nuqtaning frontal proyeksiyasi A''B'' ga tegishlib o'ladi. C'' va $2''$ nuqtalar nitutashtirib, uni f'' bilan belgilanadi.

$$\begin{aligned} C \in f(f', f'') \in ABC &\Rightarrow \\ \Rightarrow C' \in f'(C'2') \parallel [ox) \text{ va} & \\ C'' \in f''(C''2'') & \end{aligned}$$

2-bosqich.

D nuqta orqali uchburchak ABC ga perpendikulyar bo'lgan t to'g'richiziq o'tkazibolinadi. 3-chizmaga qarang!

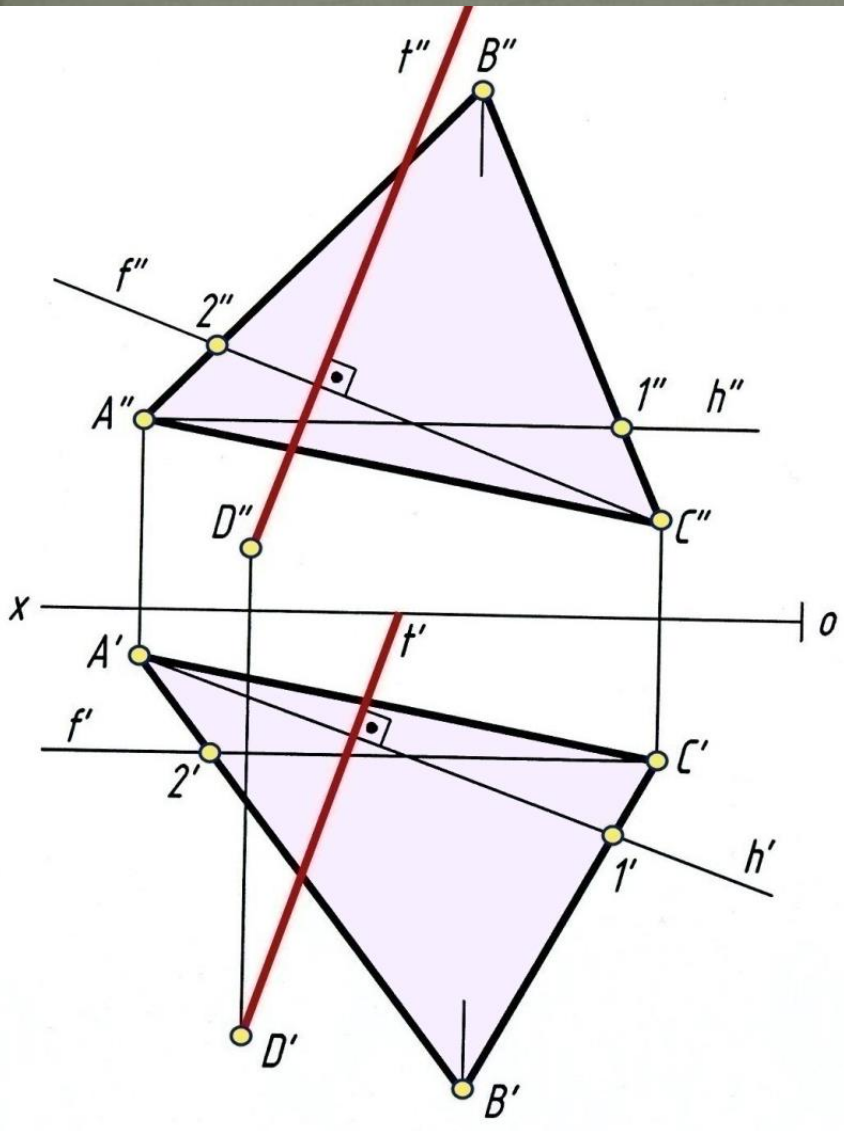
$$D \subset t \perp \Delta ABC$$

2.1. Epyurning gorizontal proyeksiyasida D' nuqta orqali t' to'g'richiziqni h' gorizontalning gorizontal proyeksiyasiga perpendikulyar qilib chiziladi.

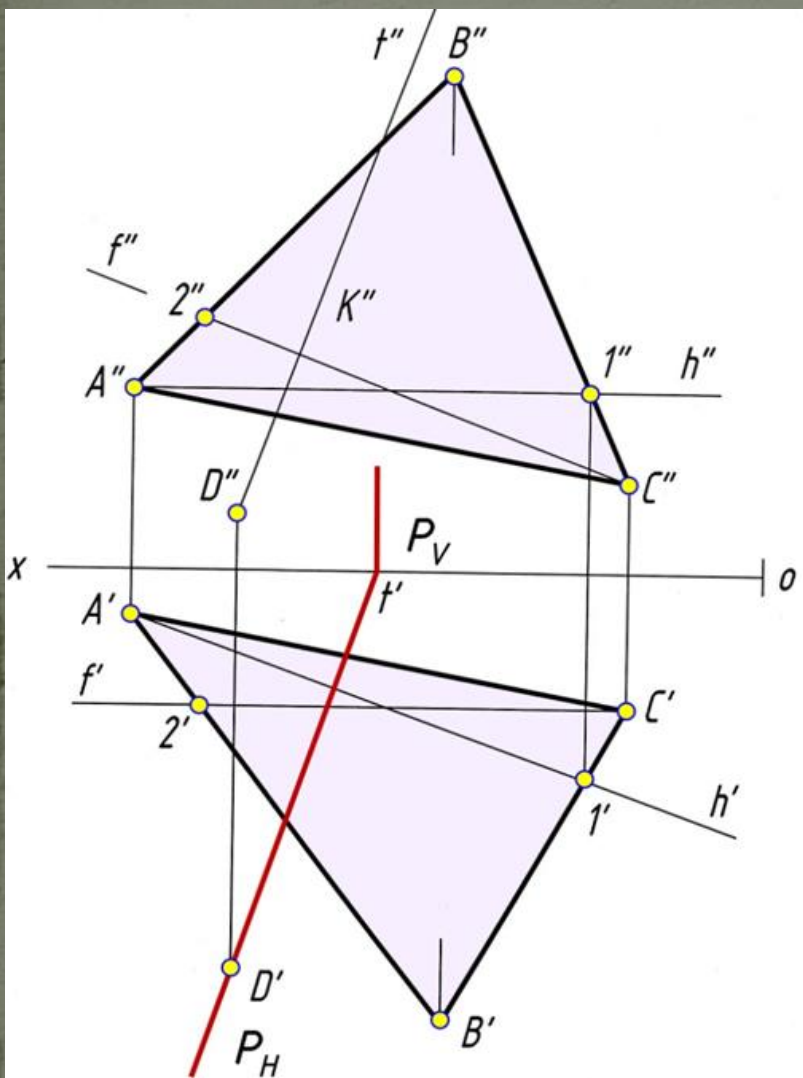
$$D' \subset t' \perp h'(A'1')$$

2.2. Epyurning frontal proyeksiyasida D'' nuqta orqali t'' to'g'richiziqni f'' frontalning frontal proyeksiyasiga perpendikulyar qilib chiziladi.

$$D'' \subset t'' \perp f''(C''2'');$$



3-bosqich.



O'tkazilgan to'g'richiziqni uchburchak ABC tekislik bilan kesishgan nuqtasini qalabolinadi. nuqta uch tabosqichlardan foydalanib aniqlanadi. 4-chizmaga qarang!

$$t \cap ABC = K$$

3.1-bosqich.

to'g'richiziq orqali xususiy vaziydagi gorizon tal proyeksiyalovchi tekislikizlar orqali o'tkaziladi.

$$t \subset P(P_H, P_V) \perp H$$

Epyurda, to'g'richiziq orqali $P(P_H, P_V)$ tekislikning P_H gorizontali o'tkazibolinadi.

$$t' \subset P_H$$

$P(P_H, P_V)$ tekislikning P_V frontal izini $[ox)$ o'qqaperpendikulyar qilib chiziladi.

$$P_V \perp [ox);$$

3.2-bosqich.

O'tkazilgan $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan berilgan ABC uchburchakning kesishgan (MN) chizig'ini aniqlab olinadi. 5-chizmaga qarang!

$$P(P_H, P_V) \cap ABC = (MN)$$

Epyurning gorizontal proyeksiyasida $A'B'$ va P_H kesishib M' nuqtani hosil qiladi. Ushbu nuqtaning M'' frontal proyeksiyasi $A''B''$ ga tegishlib o'ladi.

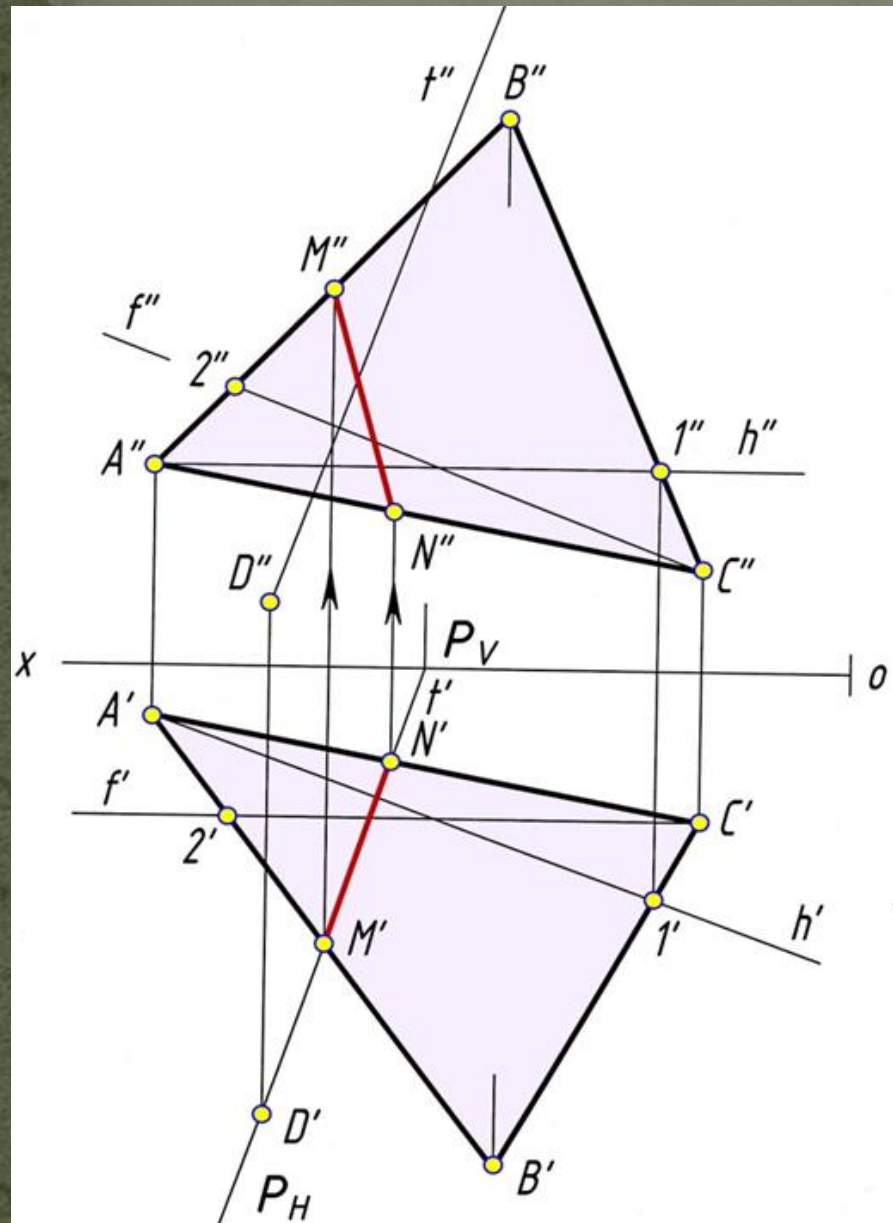
$$P_H \cap A'B' = M' \wedge M'' \in A''B''$$

Epyurning gorizontal proyeksiyasida $A'C'$ va P_H kesishib N' nuqtani hosil qiladi. Ushbu nuqtaning N'' frontal proyeksiyasi $A''C''$ ga tegishlib o'ladi.

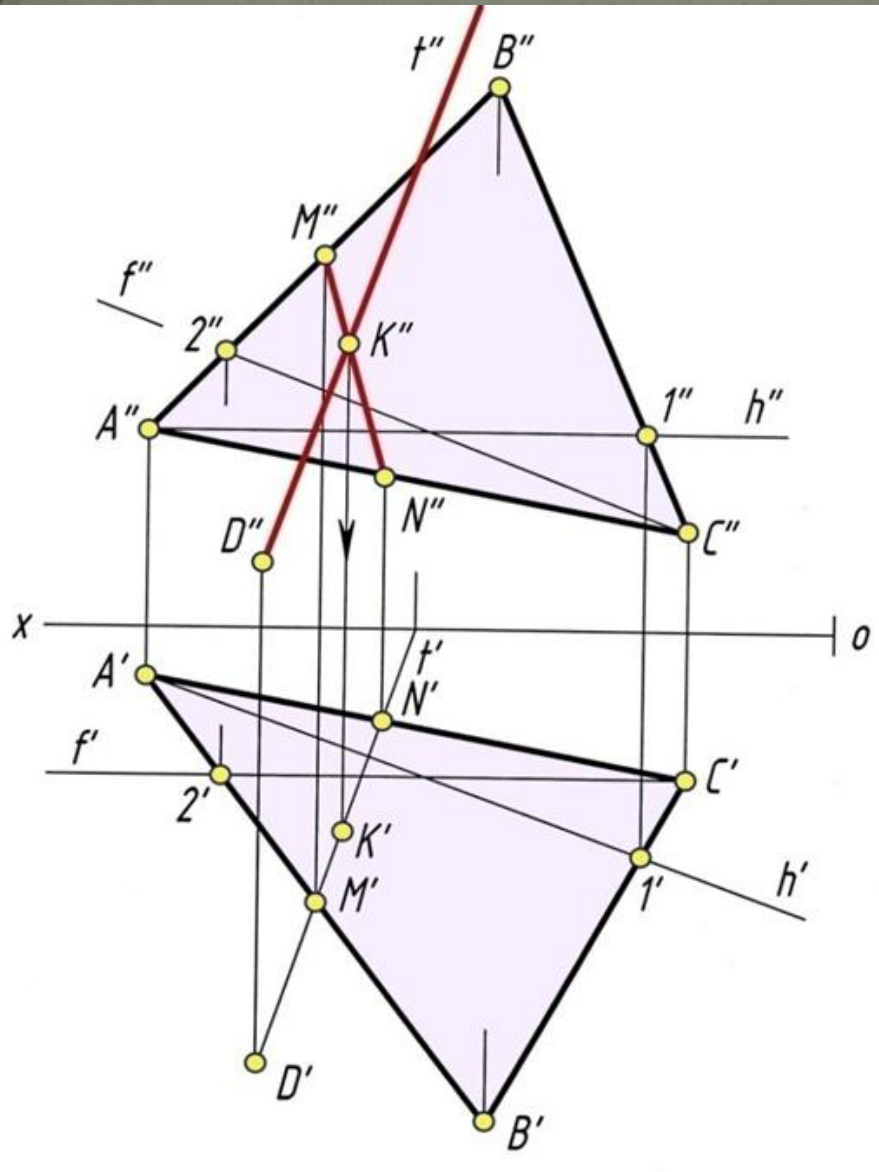
$$P_H \cap A'C' = N' \wedge N'' \in A''C''$$

Davomida M'' va N'' nuqtalar tutashtiriladi.

$$M'' \cup N'' = M''N''$$



3.3-bosqich.

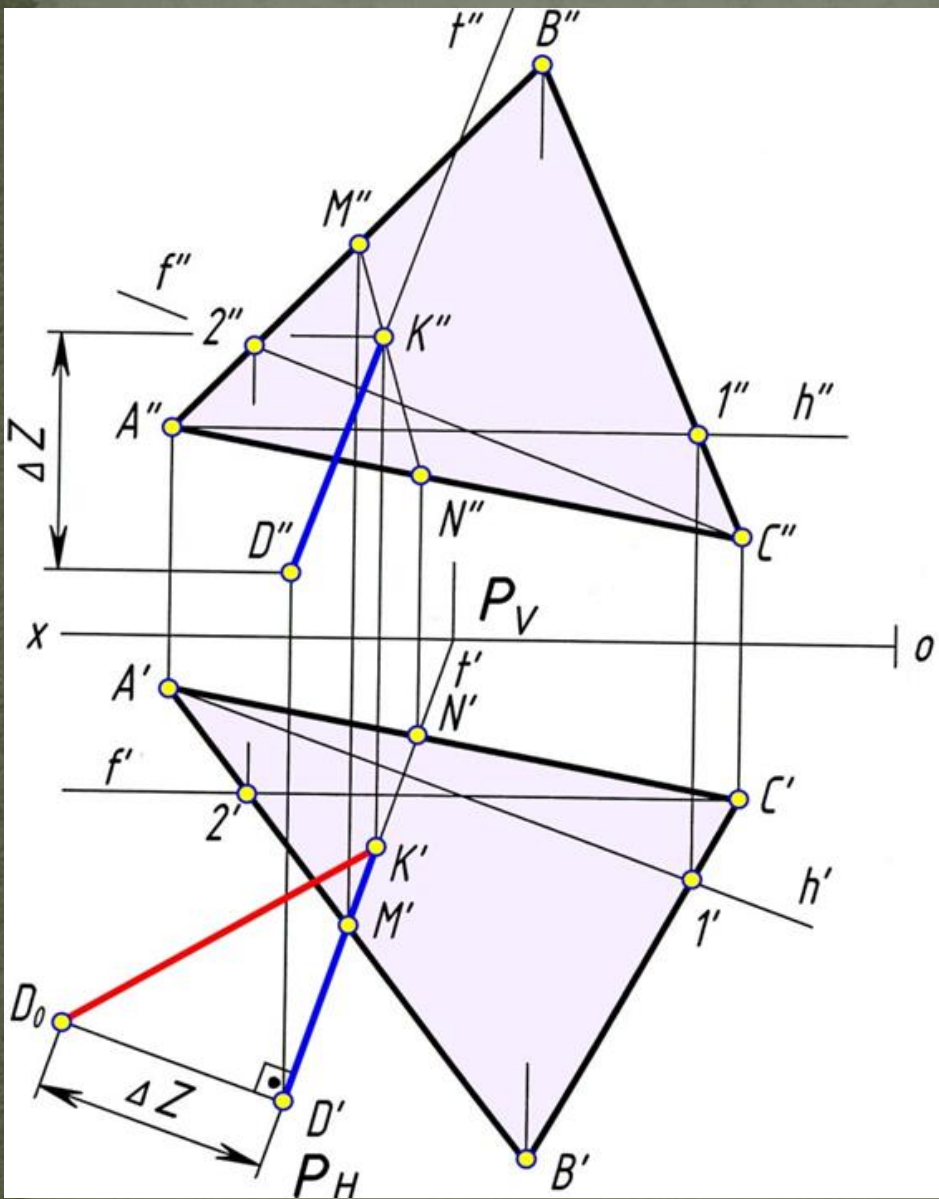


Ikkitekisliklarning kesishgan
(MN)
chiziq'it to'g'richiziq bilan kesishib
K nuqta hosil qiladi.
6-chizmaga qarang!

$$(MN) \cap t = K$$

Epyurning frontal proyeksiyasida
 $M''N''$ va t''
to'g'richiziq lar o'zaro kesishib K''
nuqta hosil qiladi. Ushbu nuqtaning
 K' gorizonta proyeksiyasi $M'N'$
chiziqqa tegishli bo'ladi.

$$M''N'' \cap t'' = K'' \text{ va } K' \in M'N'$$



4-bosqich.

D nuqtadan nuqtagacha bo'lgan masofa uzunligi, nuqtadan uchburchak tekislikka qadar bo'lgan masofa uzunligiga teng bo'ladi.

$$|DK| = |D, ABC|$$

buyerdagi, $|DK|$ kesma umumiy vaziyatda bo'lganligi uchun haqiqiy uzunligi, to'g'ri burchakli uchburchak usulidan foydalanib aniqlanadi. 7-chizmaga qarang!

To'g'ri burchakli uchburchakning 1-kateti $D'K'$ ga teng bo'ladi, 2-kateti esa $|D'D_0| = \Delta Z = (Z_K - Z_D)$ bo'ladi. Bu yerda: $D'D_0 \perp D_0K'$, D_0K' – gipotenuza.

$$|DK| = |D_0K'| \text{ - haqiqiy uzunlik.}$$

$$|D, ABC| = |D_0K'|$$

Javob.

$$|D, ABC| = |D_0K'|$$

E'tiboringiz uchun rahmat