Лекція 12. Обчислення потоку, потенціалу та циркуляції в ортогональних криволінійних координатах

Короткий зміст

Розділ 12.1. *Диференціальні рівняння векторних ліній в криволінійних координатах*
Розділ 12.2. *Обчислення потоку в криволінійних координатах*
Розділ 12.3. *Обчислення потенціалу в криволінійних координатах*
Розділ 12.4. *Лінійний інтеграл та циркуляція в ортогональних криволінійних координатах*

Короткий зміст

У цій лекції:

— розглянуто криволінійні ортогональні координати в просторі, означено поняття коефіцієнтів Ламе, обчислено коефіцієнти Ламе для циліндричної та сферичної систем координат;

— розглянуто градієнт, дивергенцію та ротор в криволінійних координатах;

— наведено вигляд оператора Лапласа в циліндричній та сферичній системах координат.

12.1. Диференціальні рівняння векторних ліній в криволінійних координатах

Нехай задано векторне поле в просторі $Ouvw$

$$\vec{a}(M) = P(u,v,w)\vec{e}_1 + Q(u,v,w)\vec{e}_2 + R(u,v,w)\vec{e}_3.$$

Як відомо, векторною лінією векторного поля $\vec{a}$ називають криву, дотична до якої в довільній точці M має напрям вектора $\vec{a}$ в цій точці. Диференціальні рівняння векторних ліній в криволінійних координатах u, v, w мають вигляд

$$\frac{H_1 du}{P(u,v,w)} = \frac{H_2 dv}{Q(u,v,w)} = \frac{H_3 dw}{R(u,v,w)},$$

де H_1, H_2, H_3 - коефіцієнти Ламе криволінійної системи координат.

В циліндричній системі координат ($u = \rho,\ v = \varphi,\ w = z$):

$$\frac{d\rho}{P(\rho,\varphi,z)} = \frac{\rho d\varphi}{Q(\rho,\varphi,z)} = \frac{dz}{R(\rho,\varphi,z)}.$$

В сферичній системі координат ($u = r,\ v = \theta,\ w = \varphi$) рівняння набудуть вигляду

$$\frac{dr}{P(r,\theta,\varphi)} = \frac{r d\theta}{Q(r,\theta,\varphi)} = \frac{r\sin\theta d\varphi}{R(r,\theta,\varphi)}.$$

12.2. Обчислення потоку в криволінійних координатах

Нехай Σ - частина координатної поверхні $u = c = const$, що обмежена координатними лініями

$$v = \alpha_1,\ v = \alpha_2 \quad (\alpha_1 < \alpha_2),$$
$$w = \beta_1,\ w = \beta_2 \quad (\beta_1 < \beta_2).$$

Тоді потік векторного поля

$$\vec{a}(M) = P(u,v,w)\vec{e}_1 + Q(u,v,w)\vec{e}_2 + R(u,v,w)\vec{e}_3$$

через поверхню Σ в напрямі вектора $\vec{e}_1$ обчислюється за формулою

$$\Pi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{\beta_1}^{\beta_2} P(c,v,w)\,H_2(c,v,w)\,H_3(c,v,w)\,dw\,dv. \qquad (12.1)$$

Аналогічно обчислюється потік через частину поверхні $v = c$, а також через частину поверхні $w = c$, де $c = const$.

Приклад 12.1. Знайти потік векторного поля $\vec{a} = r^2\theta\vec{e}_r + re^{2\theta}\vec{e}_\theta$ через зовнішню сторону верхньої півсфери S радіусом R з центром в початку координат.

❍Півсфера S є частиною координатної поверхні $r = const$, а саме $r = R$ (рис. 12.1). На півсфері S маємо

$u = r = R$,

$$v = \theta, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad \left(\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{\pi}{2}\right),$$

$$w = \varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \left(\beta_1 = 0, \beta_2 = 2\pi\right).$$

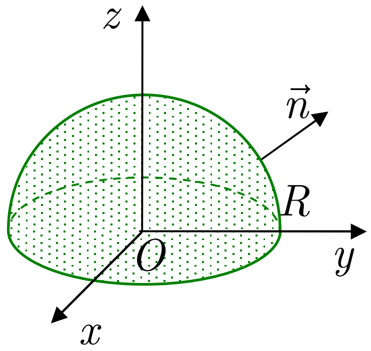

Рис. 12.1

Враховуючи, що в сферичних координатах

$$H_1 = H_r = 1,\ H_2 = H_\theta = r,\ H_3 = H_\varphi = r\sin\theta,$$

за формулою (12.1) знайдемо

$$\Pi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} R^2\theta R^2 \sin\theta d\varphi = 2\pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin\theta d\theta =$$

$$= 2\pi R^4 \left(-\theta\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \right) = 2\pi R^4 \sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi R^4. \bullet$$

12.3. Обчислення потенціалу в криволінійних координатах

Нехай в деякій області Ω задано потенціальне векторне поле

$$\vec{a}(M) = P(u,v,w)\vec{e}_1 + Q(u,v,w)\vec{e}_2 + R(u,v,w)\vec{e}_3,$$

тобто $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$ в Ω.

Знайдемо потенціал $U = U\left(u,v,w\right)$ цього поля записавши рівність $\vec{a}(M) = \operatorname{grad} U\left(M\right)$ у вигляді:

$$P\vec{e}_1 + Q\vec{e}_2 + R\vec{e}_3 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial U}{\partial u}\vec{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial v}\vec{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial U}{\partial w}\vec{e}_3.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{\partial U}{\partial u} = PH_1,\ \frac{\partial U}{\partial v} = QH_2,\ \frac{\partial U}{\partial w} = RH_3. \qquad (12.2)$$

Інтегруючи диференціальні рівняння з частинними похідними (12.2) знайдемо потенціал

$$U = U\left(u,v,w\right) + c,$$

де c довільна стала.

В циліндричних координатах ($u=\rho$, $v=\varphi$, $w=z$, $H_1=1$, $H_2=\rho$, $H_3=1$) маємо

$$\frac{\partial U}{\partial \rho}=P,\ \frac{\partial U}{\partial \varphi}=\rho Q,\ \frac{\partial U}{\partial z}=R, \tag{12.3}$$

де $\vec{a}=P(\rho,\varphi,z)\vec{e}_\rho+Q(\rho,\varphi,z)\vec{e}_\varphi+R(\rho,\varphi,z)\vec{e}_z$.

В сферичній системі координат ($u=r$, $v=\theta$, $w=\varphi$, $H_1=1, H_2=r$, $H_3=r\sin\theta$) система (14.20 має вигляд

$$\frac{\partial U}{\partial r}=P,\ \frac{\partial U}{\partial \theta}=Qr,\ \frac{\partial U}{\partial \varphi}=Rr\sin\theta, \tag{12.4}$$

де $\vec{a}=P(r,\theta,\varphi)\vec{e}_r+Q(r,\theta,\varphi)\vec{e}_\theta+R(r,\theta,\varphi)\vec{e}_\varphi$.

Приклад 12.2. Знайти потенціал векторного поля, заданого в циліндричних координатах

$$\vec{a}=\left(\frac{\operatorname{arctg} z}{\rho}+\cos\varphi\right)\vec{e}_\rho-\sin\varphi\vec{e}_\varphi+\frac{\ln\rho}{1+z^2}\vec{e}_z.$$

❍Переконаємося, що задане векторне поле потенціальне. За формулою (11.25) одержимо

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix}\dfrac{\vec{e}_\rho}{\rho} & \vec{e}_\varphi & \dfrac{\vec{e}_z}{\rho}\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\operatorname{arctg} z}{\rho}+\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & \dfrac{\ln\rho}{1+z^2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{\vec{e}_\rho}{\rho}\big(0-0\big)-\vec{e}_\varphi\left(\frac{1}{\rho(1+z^2)}-\frac{1}{\rho(1+z^2)}\right)+\frac{\vec{e}_z}{\rho}\big(-\sin\varphi+\sin\varphi\big)=\vec{0}.$$

Отже, $\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{0}$ - поле потенціальне.

Шуканий потенціал $U=U\big(\rho,\varphi,z\big)$ є розв‘язком системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial\rho}=\dfrac{\operatorname{arctg} z}{\rho}+\cos\varphi,\\ \dfrac{\partial U}{\partial\varphi}=-\rho\sin\varphi,\\ \dfrac{\partial U}{\partial z}=\dfrac{\ln\rho}{1+z^2}.\end{cases}$$

Проінтегруємо за змінною ρ перше рівняння, знайдемо

$$U=\operatorname{arctg} z\cdot\ln\rho+\rho\cos\varphi+c\big(\varphi,z\big). \tag{12.5}$$

Диференціюючи вираз (12.5) за змінною φ і використавши друге рівняння системи, маємо

$$-\rho\sin\varphi + \frac{\partial c\left(\varphi, z\right)}{\partial\varphi} = -\rho\sin\varphi,$$

Звідки

$$\frac{\partial c\left(\varphi, z\right)}{\partial\varphi} = 0 \Rightarrow c = c_1\left(z\right).$$

Таким чином,

$$U = \operatorname{arctg} z \cdot \ln\rho + \rho\cos\varphi + c_1\left(z\right).$$

Диференціюємо останнє співвідношення за змінною z і використаємо третє диференціальне рівняння системи:

$$\frac{\ln\rho}{1+z^2} + c_1'\left(z\right) = \frac{\ln\rho}{1+z^2}.$$

Отже, маємо

$$c_1'\left(z\right) = 0 \Rightarrow c_1\left(z\right) = c = const.$$

Остаточно, потенціал векторного поля

$$U\left(\rho,\varphi,z\right) = \operatorname{arctg} z \cdot \ln\rho + \rho\cos\varphi + c. \bullet$$

12.4. Лінійний інтеграл та циркуляція в ортогональних криволінійних координатах

Нехай векторне поле

$$\vec{a}(M) = P(u,v,w)\vec{e}_1 + Q(u,v,w)\vec{e}_2 + R(u,v,w)\vec{e}_3$$

визначено та неперервно в області визначення ортогональних криволінійних координат u, v, w. Оскільки диференціал радіус-вектора $\vec{r}$ довільної точки $M\left(u,v,w\right) \in \Omega$ виражається формулою

$$d\vec{r} = H_1 du\vec{e}_1 + H_2 dv\vec{e}_2 + H_3 dw\vec{e}_3, \tag{12.6}$$

то криволінійний інтеграл вектора $\vec{a}\left(M\right)$ вздовж орієнтовної гладкої або кусково-гладкої кривої $L \subset \Omega$ матиме вигляд

$$\int_L \left(\vec{a}, d\vec{r}\right) = \int_L PH_1 du + QH_2 dv + RH_3 dw. \tag{12.7}$$

Для циліндричних координат ($u = \rho,\ v = \varphi,\ w = z,\quad H_1 = 1,\ H_2 = \rho,\ H_3 = 1$) маємо

$$\vec{a}(M) = P(\rho,\varphi,z)\vec{e}_\rho + Q(\rho,\varphi,z)\vec{e}_\varphi + R(\rho,\varphi,z)\vec{e}_z,$$

$$d\vec{r} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z.$$

Звідки за формулою (12.7) одержимо

$$\int_L \left(\vec{a}, d\vec{r}\right) = \int_L P d\rho + \rho Q d\varphi + R dz. \tag{12.8}$$

Аналогічно для сферичної системи координат ($u = r$, $v = \theta$, $w = \varphi$, $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = r\sin\theta$)

$$\vec{a}(M) = P(r,\theta,\varphi)\vec{e}_r + Q(\rho,\varphi,z)\vec{e}_\theta + R(r,\theta,\varphi)\vec{e}_\varphi,$$

$$d\vec{r} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi\vec{e}_\varphi.$$

Використовуючи формулу (12.7) запишемо

$$\int_L \left(\vec{a}, d\vec{r}\right) = \int_L Pdr + rQd\theta + r\sin\theta R d\varphi. \tag{12.9}$$

Якщо крива замкнена, то циркуляція C векторного поля $\vec{a}\left(M\right)$ обчислюється за формулами (12.7) – (12.9) відповідно до системи координат.

Приклад 12.3. Обчислити циркуляцію векторного поля, заданого в циліндричних координатах $\vec{a} = \rho\sin\varphi\vec{e}_\rho + \rho z\vec{e}_\varphi + \rho^3\vec{e}_z$ вздовж замкненої кривої L: $\rho = \sin\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$, $z = 0$.

❍Координати вектора $\vec{a}$ дорівнюють

$$P = \rho\sin\varphi,\ Q = \rho z,\ R = \rho^3.$$

Контур L є колом, що лежить в площині $z = 0$ (рис.12.2).

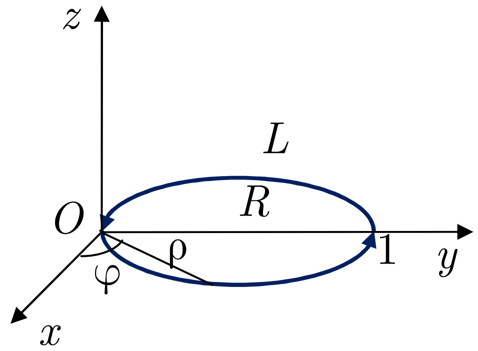

Рис.12.2

Підставляючи координати вектора $\vec{a}$ у формулу (12.8) одержимо

$$C = \oint_L \rho\sin\varphi d\rho + \rho^2 z d\varphi + \rho^3 dz = \begin{vmatrix} \rho = \sin\varphi \Rightarrow d\rho = \cos\varphi d\varphi \\ z = 0 \qquad \Rightarrow dz = 0 \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^\pi \sin^2\varphi\cos\varphi d\varphi = \left.\frac{\sin^3\varphi}{3}\right|_0^\pi = 0. ●$$